Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный
университет»

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

20–24 сентября 2021 г.

Тезисы докладов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР В АКАДЕМГОРОДКЕ

Международный математический центр
в Академгородке

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
*Настоящая наука

Новосибирский государственный университет

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН 1957

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Новосибирск • 2021

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk State University

International Conference

MAL'TSEV MEETING

September 20–24, 2021

Collection of Abstracts

International Mathematical Center in Akademgorodok

Novosibirsk State University

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk • 2021

Содержание

I. Пленарные доклады

Почти омега-категоричность в слабо о-минимальных теориях

Б. Ш. Кулпешов

Настоящий доклад касается двух понятий: слабой о-минимальности и почти ω-категоричности. Слабая о-минимальность была первоначально исследована Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стайнхорном в [**1**]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных структур.

Определение. [**2, 3**] *Пусть T — полная теория, $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. Будем говорить, что тип $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ является $(p_1, \ldots, p_n)$*-типом, *если $q(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i(x_i)$. Множество всех $(p_1, \ldots, p_n)$-типов теории T будем обозначать через $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$. Счетная теория T называется* почти ω-категоричной, *если для любых типов $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ существует лишь конечное число типов $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$.*

Полная теория T является *бинарной*, если любая формула эквивалентна булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных.

Здесь мы представляем следующую теорему:

Теорема. *Пусть T — почти ω–категоричная слабо о-минимальная теория. Тогда T — бинарная тогда и только тогда, когда любой неалгебраический $p \in S_1(\emptyset)$ имеет конечный ранг выпуклости.*

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант AP08855544).

References

[1] Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn C., Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society, volume 352, issue 12, 2000, pp. 5435–5483.

[2] Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. *On theories having three countable models* // Mathematical Logic Quarterly. 1998. V. 44. No 2. P. 161–166.

[3] Судоплатов С.В. Классификация счетных моделей полных теорий. Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, часть 1, 2018. 376 с.

Казахстанско-Британский технический университет, Институт математики и математического моделирования, Алматы (Казахстан)
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz, kulpesh@mail.ru

О периодических группах с плотным спектром

А. С. Мамонтов

Спектром периодической группы называется множество порядков её элементов. Периодическую группу назовём *группой с плотным спектром*, или OC_n-*группой*, если её спектр, состоит из всех натуральных чисел от 1 до некоторого натурального числа n. В докладе обсуждаются периодические OC_n группы ($n \leq 7$).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: andreysmamontov@gmail.com

Теория моделей предметных областей

Д. Е. Пальчунов

В докладе обсуждается теоретико-модельный подход к формализации предметных областей.

Одна из рассматриваемых проблем связана с тем, что в классической теории моделей, как правило, рассматриваются только классы алгебраических систем, имеющих одну и ту же сигнатуру. В частности, это относится к понятию аксиоматизируемого класса алгебраических систем: все системы, входящие в аксиоматизируемый класс должны иметь одинаковую сигнатуру. Та же ситуация имеет место и для классов алгебраических систем, аксиоматизируемых предложениями специального вида: многообразий, квазимногообразий, $\forall$- и $\exists$-аксиоматизируемых классов.

Однако при построении и исследовании формальных моделей прецедентов предметных областей частой является ситуация, когда разные прецеденты одной и той же предметной области описываются разными наборами понятий. В таком случае формальные модели этих прецедентов должны иметь разную сигнатуру. При этом, на всех прецедентах предметной области должна быть истинна теория этой предметной области: то есть, на алгебраических системах должно быть истинно множество предложений, сигнатура которых может не содержаться в сигнатуре этих алгебраических систем.

Также это имеет место и для онтологий: на всех прецедентах предметной области верна онтология этой предметной области, но при этом в описание прецедента, как правило, не входят все понятия онтологии данной предметной области.

В докладе исследуется проблема аксиоматизации классов алгебраических систем, содержащих системы, имеющие разную сигнатуру. Вводятся понятия теории класса и аксиоматизируемого класса алгебраических систем, имеющих разную сигнатуру. Показывается, что введённые понятия теории класса алгебраических систем разной сигнатуры и аксиоматизируемого класса таких алгебраических систем являются естественным обобщением соответствующих понятий классической теории моделей.

Исследуются вопросы аксиоматизируемости и разрешимости теорий классов обогащённых булевых алгебр, содержащих системы, имеющие разную сигнатуру.

Рассматриваются теоретико-модельные методы формализации предметных областей.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: palch@math.nsc.ru

Обобщённо жёсткие разрешимые группы

Н. С. Романовский

Пусть группа G содержит абелеву нормальную подгруппу A. Тогда действие G на A сопряжениями $a \to g^{-1}ag$ даёт действие фактор-группы G/A, которое продолжается на целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}[G/A]$, и в результате на A возникает структура (правого) $\mathbb{Z}[G/A]$-модуля.

Группа G называется *жсткой*, если в ней существует нормальный ряд подгрупп

$$G = G_1 > G_2 > \ldots > G_m > G_{m+1} = 1, \tag{1}$$

каждый фактор которого G_i/G_{i+1} абелев и, рассматриваемый как модуль над групповым кольцом $\mathbb{Z}[G/G_i]$, не имеет модульного кручения. Примерами жёстких групп служат свободные разрешимые группы и итерированные сплетения нетривиальных абелевых групп без кручения. В работах автора и совместных с А.Г. Мясниковым работах была развита алгебраическая геометрия над жёсткими группами и теория моделей делимых жёстких групп. Отметим в этой связи обзор автора - глава 5 из книги [**1**].

Назовём G *обобщно жсткой группой* или для краткости *r-группой*, если в ней имеется нормальный ряд (1) со следующими тремя свойствами.

1) Факторы G_i/G_{i+1} абелевы.

2) Пусть R_i обозначает фактор-кольцо кольца $\mathbb{Z}[G/G_i]$ по аннулятору G_i/G_{i+1}. В этой ситуации G_i/G_{i+1} можно рассматривать как R_i-модуль. Требуется, чтобы он не имел модульного кручения.

3) Канонический эпиморфизм колец $\mathbb{Z}[G/G_i] \to R_i$ должен быть инъективен на множестве G/G_i.

Доказывается, что ряд (1), если существует, однозначно определяется самой группой, а ступень разрешимости группы в точности равна m. Класс r-групп существенно шире класса жёстких групп, в него, например, попадают разрешимые группы Баумслага — Солитера $B(1,n)$, $|n| > 1$. При этом нет большого оптимизма по поводу того, что многие результаты удастся перенести с жёстких групп на r-группы. Однако, в 2-ступенно разрешимом случае такой оптимизм есть. В докладе излагаются результаты, полученные автором в этом направлении. Отметим такие (см. [**2**]–[**6**]): найдена аксиоматика класса m-ступенно разрешимых r-групп; описаны периодические r-группы; доказано, что всякая метабелева r-группа вкладывается в делимую метабелеву r-группу; доказана расщепимость делимых метабелевых r-групп; описаны группы, универсально эквивалентные разрешимой группе Баумслага — Солитера.

References

[1] Groups and Model Theory, GAGTA BOOK 2, De Gruyter, 2021.

[2] Романовский Н.С., Обобщённо жёсткие группы: определение, базисные факты, проблемы, СМЖ, 48, N 2 (2018), 258-279.

[3] Романовский Н.С., Обобщённо жёсткие метабелевы группы, СМЖ, 60, N 1 (2019), 194-200.

[4] Романовский Н.С., Нётеровость по уравнениям метабелевых r-групп, СМЖ, 61, N 1 (2020), 194-200.

[5] Романовский Н.С., Об универсальной теориях метабелевых обобщённо жёстких групп, СМЖ, 61, N 5 (2020), 1101-1107.

[6] Романовский Н.С., Группы, универсально эквивалентные разрешимой группе Баумслага — Солитера, в печати.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Аппроксимируемость корневыми классами свободных конструкций групп

Е. В. Соколов

Напомним, что группа G называется *аппроксимируемой классом групп* $\mathcal{C}$, если для каждого неединичного элемента $g \in G$ существует гомоморфизм σ группы G на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $g\sigma \neq 1$. Класс $\mathcal{C}$ будем называть *корневым*, если он содержит хотя бы одну неединичную группу и замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathcal{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$.

Использование понятия корневого класса оказалось весьма продуктивным при изучении аппроксимируемости свободных конструкций групп: обобщенных свободных произведений, HNN-расширений, древесных произведений, фундаментальных групп графов групп. Одним из основных методов исследования аппроксимационных свойств таких конструкций является так называемый «фильтрационный подход» Г. Баумслага. Первоначально он был предложен для изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений двух групп, а затем распространен на другие свободные конструкции и адаптирован для изучения свойства аппроксимируемости конечными p-группами. Оказывается, что в большинстве случаев данный метод может быть использован для исследования аппроксимируемости произвольным корневым классом групп. Это позволяет значительно увеличить количество получаемых результатов, а также применить их к изучению аппроксимируемости некоторыми некорневыми классами групп.

В докладе описывается использование фильтрационного подхода для исследования аппроксимируемости корневыми классами свободных конструкций групп и приводятся последние результаты, полученные с помощью данного метода.

Ивановский государственный университет, г. Иваново
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Базисы частично коммутативных групп

Е. И. Тимошенко

Для любого многообразия групп $\mathfrak{M}$ и любого неориентированного графа $\Gamma = (X; E)$ без петель и кратных ребер определена частично коммутативная группа $F(X, \Gamma, \mathfrak{M})$. Пусть $X = \{x_1, x_2 \ldots\}$. Группа $F(X, \Gamma, \mathfrak{M})$ имеет в многообразии $\mathfrak{M}$ следующее представление:

$$F(X, \Gamma, \mathfrak{M}) = \langle X \mid x_i x_j = x_j x_i, \text{ если } \{x_i, x_j\} \in E\rangle.$$

Аналогично определяются частично коммутативные группы в многообразиях про-p-групп. Наиболее изучены частично коммутативные группы $F(X, \Gamma, \mathfrak{G})$ в многообразии $\mathfrak{G}$ всех групп. Они часто называются свободными частично коммутативными группами. Если граф Γ конечен, то группы $F(X, \Gamma, \mathfrak{G})$ называют в англоязычной литературе «right-angled Artin groups». Также для них используются названия «graph groups» либо «semifree groups».

Нас интересуют частично коммутативные группы в разрешимых и нильпотентных многообразиях. Мы приводим описание базисов и указываем каноническую запись элементов для групп $F(X, \Gamma, \mathfrak{M})$ в случае, когда $\mathfrak{M}$ одно из следующих многообразий:

1)$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_c$ – многообразие всех нильпотентных групп ступени $\leq c$;

2) $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}^2$ – многообразие всех метабелевых групп;

3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_c \bigcap \mathfrak{A}^2$;

4) $\mathfrak{M}$ – многообразие всех метабелевых про-p-групп.

НГТУ, Новосибирск
E-mail: eitim45@gmail.com

Problems on computable numberings

S. Badaev

Let $\mathbb{K}$ be a class of subsets of ω that is closed under the Cartesian products. Informally, we can consider a computable numbering of a family $\mathfrak{F} \subseteq \mathbb{K}$ as a sequence of elements of $\mathfrak{F}$ that is uniformly enumerable in $\mathbb{K}$. More formally, we say that a surjective mapping $\nu : \omega \mapsto \mathfrak{F}$ is a *computable numbering* if

$$\{\langle x, n\rangle : x \in \nu(n)\} \in \mathbb{K},$$

and that $\mathfrak{F}$ is a *computable family* if it possesses a computable numbering.

We consider only the pairs $\langle \mathbb{K}, \mathfrak{F}\rangle$ so that and $\mathfrak{F}$ is a computable family of sets from the class $\mathbb{K}$. The general notion for reducibility of numberings is presupposed to use in the talk.

$\mathcal{R}(\mathfrak{F})$ stands for the Rogers semilattice of computable numberings of $\mathfrak{F}$. The problems on computable numberings are usually formulated in terms of Rogers semilattices. Our goal is to discuss the current state of study the Rogers semilattices for classes $\mathbb{K}$ of

- computably enumerable sets,
- the sets of a given level of the arithmetical hierarchy,
- the sets of a finite or an infinite level of the Ershov hierarchy,
- the sets of a low levels of the analytical hierarchy.

Kazakh-British Technical University, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty (Kazakhstan)

Modal extensions of Belnap–Dunn logic

S. A. Drobyshevich

We survey a number of recent results concerning a certain family of four-valued modal logics. The foundation of this family is a four-valued logic developed by Nuel Belnap and Michael Dunn. This logic is motivated by the consideration of a computer that receives information on truth and falsity of statements from different sources. This way the computer might receive information that a certain fact is true, false, both true and false or neither true nor false, which gives one epistemically motivated truth values. Defining conjunction $\wedge$, disjunction $\vee$ and negation $\sim$ on threse four values one obtains a logic which technically coincides with the logic known as *first-degree entailment* FDE.

To reflect this connection the family of modal logics we are interested in was designated as *FDE-based modal logics* by Sergei Odintsov and Heinrich Wansing. This designation might be too broad for the following reason: all systems we will discuss are not contrapositive in the sense that $\varphi \vdash \psi$ does not necessarily imply $\sim \psi \vdash \sim \varphi$. The leads to perhaps the most interesting feature of the logics in question: they all lack the usual replacement theorem. What they have instead is the so-called weak replacement property: one can replace φ with ψ as long as φ is equivalent to ψ and $\sim \varphi$ is equivalent to $\sim \psi$ in the usual sense. On the other hand, FDE itself is contrapositive in this sense, although there is an axiom system for the logic in which the contraposition rule is merely admissible.

Some of the systems we will discuss are Belnapian modal logics of Odintsov and Wansing, modal bilattice logic MBL developed by Umberto Rivieccio, Achim Jung and Ramon Jansana, Graham Priest's $\mathsf{K}_{\mathsf{FDE}}$, Lou Goble's $\mathsf{KN4}$ and a few more. Most of the works outlined will be dedicated to highlighting connections between these logics through the lenses of proof theory (including Hilbert-style systems, FDE-style systems and display calculi), relational semantics and algebras (including twist-structures and residuated lattices).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: drobs@math.nsc.ru

Generalized Baumslag–Solitar groups: Properties, results, problems

F. A. Dudkin

A finitely generated group G acting on a tree with all vertex and edge stabilizers are infinite cyclic groups is called a *generalized Baumslag–Solitar group* (*GBS-group*). By the Bass–Serre Theorem, G is representable as $\pi_1(\mathbb{A})$, the fundamental group of a graph of groups $\mathbb{A}$ whose vertex and edge groups are infinite cyclic.

To each GBS-group G, we can associate a labeled graph $\mathbb{A}$, a particular kind of a graph of groups. Such a labeled graph corresponds to an action of G on a tree and defines a presentation of G. Any GBS group can be obtained from infinite cyclic groups using free constructions: amalgamated free product and HNN-extension.

Our goal is to tell about some recent results on GBS groups: description of the centralizer dimension, the problem of universal equivalence, $\mathcal{K}$-residuality, connection with knot groups.

Some open problems will be discussed at the end of the talk.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: DudkinF@math.nsc.ru

Computable and decidable categoricity

V. Harizanov

The topic of computable categoricity and algorithmic dimension of structures has been part of computable structure theory since Fröhlich and Shepherdson and Mal'cev. A computable structure is computably categorical if for every computable isomorphic structure there is a computable isomorphism. Computable categoricity and its extension to arbitrary levels of hyperarithmetical hierarchy have been studied extensively. Goncharov has been at the forefront of this study, establishing some of the most important results including those connecting categoricity with definability. More recently, Goncharov introduced and investigated the notion of decidable categoricity where the structures are decidable. We will present some fundamental, early and recent results in this area, including a number of collaborative results with Goncharov and others.

George Washington University, Washington DC (U.S.A.)

Probability structures

B. Khoussainov

In this talk we introduce probability structures. Probability structures are algebraic structures equipped with probability functions on the domains and the atomic predicates. These structures are fine-grained extensions of type 1 probability structures introduced by Halpern and Bacchus.

Type 1 probability structures contain probability functions on domains only. Our probability structures possess an additional statistical knowledge, — probability functions on atomic predicates. We study a few algorithmic questions on probability structures, present a method that builds probability spaces for the first order logic formulas, and prove that our semantics is sound. We also introduce smooth probability structures. The smooth probability structures carefully refine probability structure so that we have a better control of the probability spaces defined by first order logic formulas. For these structures we initiate the study of first order probability logic (FOPLS), investigate axiomatizability of FOPLS, and address decidability and undecidability questions of the sets of valid formulas.

This work is joint with Xiao (UESTC) and Liu (The Univ of Auckland).

UESTC, Chengdu (China); University of Auckland, Aucklan (New Zealand)
E-mail: bmk@cs.auckland.ac.nz

Limiting density and free structures

J. F. Knight

The talk describes ongoing work joint with Johanna Franklin and Meng-Che (Turbo) Ho. Gromov asked, "What does a typical group look like?" He suggested a way of describing typical behavior in terms of limiting density. Based on a remark of Fine, I conjectured in 2013 that for group presentations with $n \geq 2$ generators and a single relator, an elementary first order sentence has limiting density 1 iff it is true in the non-Abelian free groups. There are partial positive results due to Coulon, Ho, and Logan, and to Karlampovich and Sklinos, but the full conjecture remains open. We generalize Gromov's question to other algebraic varieties (in the sense of universal algebra). We have examples and results illustrating different possible behaviors.

University of Notre Dame, Notre Dame, Indiana (U.S.A.)
E-mail: knight.1@nd.edu

Gröbner—Shirshov bases for conformal and vertex algebras

P. S. Kolesnikov, R. A. Kozlov

The theory of vertex algebras (or vertex operator algebras, VOAs) appeared in mathematical physics as an algebraic tool for studying the operator product expansion (OPE) of chiral fields in 2-dimensional conformal field theory which goes back to A. Belavin, A. Polyakov, and A. Zamolodchikov (1984). The algebraic definition of a VOA was first stated by R. Borcherds (1986). The development of the theory of vertex algebras is mainly carried out within the framework of the representation theory. In order to define a vertex algebra in this way, one need to get the base space V, a linear operator $T : V \to V$ (translation), a selected vector $\mathbf{1} \in V$ (vacuum) such that $T\mathbf{1} = 0$, and define a family of vertex operators, formal distributions $Y(a, z) \in gl(V)[[z, z^{-1}]]$, $a \in V$, satisfying certain properties. The Dong Lemma along with the Goddard Uniqueness Theorem show that it is enough to define the series $Y(a, z)$ not for all $a \in V$, but just for "generators".

We will consider a combinatorial approach to the construction of a vertex algebra. In order to get a normal form of a vertex algebra defined by generators and relations one need to solve a Gröbner—Shirshov basis problem for a module over an appropriate associative algebra. Occasionally, the same approach works well for associative conformal algebras.

Let Vert, LSym, and LieConf be the categories of vertex, pre-Lie, and Lie conformal algebras, respectively. As follows from the definition, there are two forgetful functors

$$\Phi : \mathrm{Vert} \to \mathrm{LieConf}, \quad \Psi : \mathrm{Vert} \to \mathrm{LSym}.$$

The first one was studied by M. Roitman (2000), where the left adjoint functor for Φ was explicitly constructed. Every Lie conformal algebra L embeds into its universal enveloping vertex algebra $V(L)$, and there is an analogue of the Poincaré–Birkhoff–Witt (PBW) Theorem on the linear basis of $V(L)$.

The second functor Ψ has completely different properties. We show that there exist pre-Lie (super)algebras that cannot be embedded into a vertex (super)algebra. Namely, let A be a pre-Lie (super)algebra. If A embeds into a vertex (super)algebra in such a way that $a.b = ab$ for all $a, b \in A$ and the locality function on A is bounded then the commutator Lie (super)algebra $A^{(-)}$ is nilpotent. In particular, as follows from the results of [11], a finite-dimensional simple pre-Lie algebra cannot be embedded into a vertex algebra.

This research is supported by Russian Science Foundation (project 21-11-00286).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: pavelsk@math.nsc.ru

One jump away: Spectra of differentially closed fields

R. Miller

The spectrum Spec($\mathcal{A}$) of a countable structure $\mathcal{A}$ is the set of all Turing degrees of isomorphic copies of $\mathcal{A}$. It is well known that every possible spectrum of a first-order structure in a finite signature is also the spectrum of a symmetric irreflexive graph. In this sense, the theory of such graphs is complete. Other complete theories include those of partial orders, lattices, 2-step nilpotent groups, and fields; whereas more restrictive theories such as linear orders, Boolean algebras, and algebraically closed fields are known to be incomplete.

The theory $\mathbf{DCF}_0$ of differentially closed fields of characteristic 0 has become prominent in model theory: it is the analogue of algebraically closed fields when the signature also includes a differential operator on the field elements. We will present joint work between David Marker and the speaker, showing that this theory is incomplete for spectra, in the sense given above. However, it comes close to completeness. The spectra of models of $\mathbf{DCF}_0$ are exactly those sets of the form

$$\{\boldsymbol{d} \ : \ \boldsymbol{d}' \in \mathrm{Spec}(G)\},$$

for all countable graphs G. So this theory may be considered to be precisely one jump away from completeness. The crux of the equality, in one direction, is a demonstration that every model of $\mathbf{DCF}_0$ of low degree has a computable copy – a property well-known for Boolean algebras (although the details are different) and recently studied in more generality by several researchers as "strong jump inversion."

References

[1] Calvert W., Frolov A., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Soskova A., Vatev S., Strong jump inversion. Journal of Logic and Computation 28 (2018) 7, 1499–1522.

[2] Downey R., Jockusch C. Jr., Every low Boolean algebra is isomorphic to a recursive one, Proceedings of the American Mathematical Society 122 (1994), 871–880.

[3] Hirschfeldt D.R., Khoussainov B., Shore R.A., Slinko A.M., Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures, Annals of Pure and Applied Logic 115 (2002), 71–113.

[4] Marker D., Miller R., Turing degree spectra of differentially closed fields, Journal of Symbolic Logic 82 (2017) 1, 1–25.

Queens College – CUNY, Queens, NY (USA)
E-mail: Russell.Miller@qc.cuny.edu

Reidemeister spectrum of classical linear groups

T. R. Nasybullov

Let G be a group and φ be an automorphism of G. Two elements x, y of G are said to be (twisted) φ-conjugated if there exists an element $z \in G$ such that $x = zy\varphi(z)^{-1}$. The relation of φ-conjugation is an equivalence relation on G and it divides the group into φ-conjugacy classes. The number $R(\varphi) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ of these classes is called the Reidemeister number of the automorphism φ.

The Reidemeister spectrum $\mathrm{Spec}_R(G)$ of a group G is the subset of $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ of the form $\mathrm{Spec}_R(G) = \{R(\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{Aut}(G)\}$. If $\mathrm{Spec}_R(G) = \{\infty\}$, then the group G is said to possess the R_∞-property. The problem of classifying groups which possess the R_∞-property was proposed by A. Fel'shtyn and R. Hill in [**1**]. The study of this problem has been quite an active research topic in recent years.

Duirng the talk, at first, we are going to discuss several applications of twisted conjugacy relations and the R_∞-property in different areas of mathematics, and then talk about twisted conjugacy classes, Reidemeister spectrum and the R_∞-property for classical linear groups. Most of the results we are going to discuss are collected in papers [**3, 4, 5**].

If $\mathbb{F}$ is an algebraically closed field of zero characteristic such that the transcendence degree of $\mathbb{F}$ over $\mathbb{Q}$ is finite, then a lot of linear algebraic groups are known to possess the R_∞-property (see, for example, [**2**]). In the talk we are going, in particular, to consider linear algebraic groups over an algebracally closed field $\mathbb{F}$ of zero characteristic in the case when the transcendence degree of $\mathbb{F}$ over $\mathbb{Q}$ is infinite. It turns out that a lot of linear groups (including Chevalley groups of classical series) over such fields do not possess the R_∞-property.

References

[1] Fel'shtyn A., Hill R., Reidemeister zeta function with applications to Nielsen theory and a connection with Reidemeister torsion, K-Theory, V. 8, 1994, 367–393.

[2] Fel'shtyn A., Nasybullov T., The R_∞ and S_∞ properties for linear algebraic groups, Journal of Group Theory, V. 19, 2016, 901–921.

[3] Nasybullov T., Twisted conjugacy classes in unitriangular groups, Journal of Group Theory, V. 22, N. 2, 2019, 253–266.

[4] Nasybullov T., Reidemeister spectrum of special and general linear groups over some fields contains 1, Journal of Algebra and its Applications, V. 18, N. 8, 2019, 1950153.

[5] Nasybullov T., Chevalley groups of types B_n, C_n, D_n over certain fields do not possess the R_∞-property, Topological Methods in Nonlinear Analysis, V. 56, N. 2, 2020, 401–417.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: ntr@math.nsc.ru

Multi-agent temporal and modal logics with dynamic accessibly relations

V. V. Rybakov

We will report our own results and results of other authors in Multi-agent Temporal and Modal logics with various temporal accessibility relations and their application in Informatics and CS. We will start with non-transitive logics where elements of interval logics are applied, and accessibility relations are non-transitive and chopped into intervals of bounded time. Next portion of results concerns logics with multi-valuations - the case when the agents have separated own valuations' relations for propositions. Next we describe results concerning logics with branching time. Final part of the report deals with logics which have dynamic accessibility relations - the case when any state (world) generate (and hence have) its own accessibility relation. We feel that it most close models the real run of time (or evolution of any thread in computational process) - any current state has its own time. Mathematically we study problems of satisfiability and decidability in these logics, problems of admissibility of possible inference rules. Report will contain examples and illustrations of applications.

Supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Grant No. 075-02-2020-1534/1) and by Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE University) Moscow.

Institute of Mathematics and Informatics, Siberian Federal University, Krasnoyarsk
Institute of Informatics Systems of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk
E-mail: Vladimir_Rybakov@mail.ru

Effective inseparability and positive structures

A. Sorbi

We examine the notion of effective inseparability, and how it has been recently exploited in the study of positive structures, in particular positive lattices [**2**].

A positive lattice L is said to be *uniformly effectively inseparable* (abbreviated as *u.e.i.*) if its equality relation corresponds to a positive equivalence relation $=_L$ yielding a partition of the set ω of natural numbers in equivalence classes which are pairwise effectively inseparable in a uniform way (for applications of uniform effective inseparability to positive equivalence relations see [**1**]). The following hold of a u.e.i. positive lattice L, and the preordering relation $\leq_L$ on ω corresponding to the partial ordering relation of the lattice: (1) $\leq_L$ is *locally universal* for the class of positive preordering relations, i.e. inside any nonempty interval of $\leq_L$ one can computably embed any positive preordering relation; (2) $\leq_L$ is *uniformly dense*, i.e. there exists a computable function f such that if $x <_L y$ then $x <_L f(x, y) <_L y$, and f is well defined on equivalence classes of $=_L$: if $x =_L x'$ and $y =_L y'$ then $f(x, y) =_L f(x', y')$.

Luckily, to check that a given nontrivial positive bounded lattice L is u.e.i., it is enough to check effective inseparability of the pair $(0_L, 1_L)$ of equivalence classes corresponding to the least element and the greatest element, respectively, of the lattice. This has obvious applications to the study of formal systems, and Lindenbaum lattices of sentences. A *Lindenbaum lattice of sentences* (for this topic see [**5**]) is a positive bounded lattice $L_{\mathcal{C},T}$, where T is a recursively enumerable (r.e.) consistent theory, such that: its universe is given by an r.e. set of sentences $\mathcal{C}$ which is closed under the connectives $\wedge$ and $\vee$; its preordering relation is given by provable implication in T; lattice equality is given by provable equivalence in T; the sentences of $\mathcal{C}$ which are refutable in T correspond to the least element of the lattice, and the sentences of $\mathcal{C}$ which are provable in T correspond to the greatest element. In these cases, in order to show that the preordering relation of $L_{\mathcal{C},T}$ is locally universal and uniformly dense, it is enough to prove effective inseparability of the pair of sets $(0_{L_{\mathcal{C},T}}, 1_{L_{\mathcal{C},T}})$. Examples not previously noticed in the literature include Lindenbaum lattices $L_{\mathcal{C},T}$ where: (a) T is any r.e. consistent extension of either one of Robinson's systems R or Q, and $\mathcal{C}$ contains the $\exists\Delta_0$ sentences; the same holds if we let T be any r.e. consistent intuitionistic extension of either one of the intuitionistic versions of Robinson's systems; (b) T is any r.e. consistent extension of Buss' weak arithmetical system S^1_2, and $\mathcal{C}$ is the class $\exists\Sigma^{\mathsf{b}}_1$ of sentences.

We examine also applications of effective inseparability ([**4, 3**]) to the general problem of which positive equivalence relations can be realized (up to computable isomorphism, or computable bi-embeddability of equivalence relations) as word problems of positive algebras.

References

[1] Andrews U., Lempp S., Miller J. S., Ng K. M., San Mauro L., Sorbi A., Universal computably enumerable equivalence relations, J. Symbolic Logic 79 (2014), no. 1, 60–88.

[2] Andrews U., Sorbi A., Effective inseparability, lattices, and pre-ordering relations, Review of Symbolic Logic (2019), 1–28, DOI 10.1017/S1755020319000273.

[3] Delle Rose V., San Mauro L. F., Sorbi A., Word problems and ceers, LQ Math. Log. Q. 66 (2020), no. 3, 341–354.

[4] Nies A., Sorbi A., Calibrating word problems of groups via the complexity of equivalence relations, Mathematical Structures in Computer Science (2018), 1–15.

[5] Shavrukov V. Yu., Visser A., Uniform density in Lindenbaum algebras, Notre Dame J. Form. Log. 55 (2014), no. 4, 569–582.

Department of Information Engineering and Mathematics, University of Siena, Siena (Italy)
E-mail: andrea.sorbi@unisi.it

Coding and decoding in classes of structures

A. Soskova

Friedman and Stanley [**1**] introduced Borel embeddings as a way of comparing classification problems for different classes of structures. A Borel embedding represents a uniform procedure for coding structures from one class in structures from another. Many Borel embeddings are actually Turing computable.

When a structure $\mathcal{A}$ is coded in a structure $\mathcal{B}$, the effective decoding is represented by a uniform effective interpretation [**2**]. Part of the effective interpretation is Medvedev reduction.

The class of undirected graphs and the class of linear orderings both lie on top under Turing computable embeddings. The standard Turing computable embeddings of directed graphs (or structures for an arbitrary computable relational language) in undirected graphs come with uniform effective interpretations. We give examples of graphs that are not Medvedev reducible to any linear ordering, or to the jump of any linear ordering. Any graph can be Medvedev reducible to a linear ordering using computable Σ_3 formulas. Friedman and Stanley [**1**] gave a Turing computable embedding L of directed graphs in linear orderings. We show that there do not exist $L_{\omega_1\omega}$-formulas that uniformly interpret the input graph G in the output linear ordering $L(G)$. This is joint work with J. Knight, and S. Vatev [**3**].

We have also a positive result — we prove that the class of fields are effectively interpreted in the class of Heisenberg groups generalising an old Maltsev's result. The second part is a joint work with R. Alvir, W. Calvert, G. Goodman, V. Harizanov, J. Knight, R. Miller, A. Morozov, and R. Weisshaar [**4**].

The research was supported by FNI-SU 80-10-136/26.03.2021 and NSF Grant DMS-1600625.

References

[1] Friedman H., Stanley L., A Borel reducibility theory for classes of countable structures, JSL, vol. 54 (1989), pp. 894–914.

[2] Harrison-Trainor M., Melnikov A., Miller R., Montalbán A., Computable functors and effective interpretability, JSL, vol. 82 (2017), pp. 77–97.

[3] Knight J., Soskova A., Vatev S. Coding in graphs and linear orderings, JSL, vol. 85(2) (2020), pp. 673–990.

[4] Alvir R., Calvert W., Goodman G., Harizanov V., Knight J., Miller R., Morozov A., Soskova A., Weisshaar R., Interpreting a field in its Heisenberg group, to appear in JSL.

Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, Sofia (Bulgaria)
E-mail: asoskova@fmi.uni-sofia.bg

II. Секция «Алгебраическая комбинаторика»

Замыкания сплетений, действующих на декартовых степенях

А. В. Васильев, И. Н. Пономаренко

Пусть m — натуральное число, а Ω — конечное множество. m-Замыканием группы $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ называется наибольшая группа $G^{(m)}$ подстановок на Ω, имеющая те же орбиты в индуцированном действии на декартовой степени Ω^m, что и G. Найдена точная формула для m-замыкания сплетения в его действии на декартовой степени. Как следствие, получено достаточное условие вложения этого m-замыкания в сплетение m-замыканий факторов.

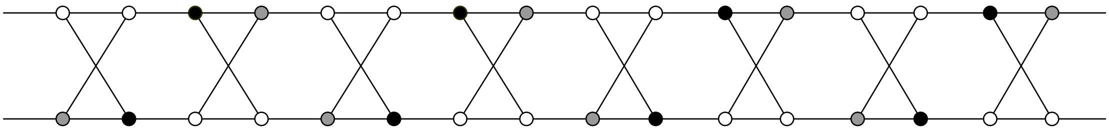
ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: vasand@math.nsc.ru
ПОМИ РАН, Санкт-Петербург
E-mail: inp@pdmi.ras.ru

Совершенные раскраски скрещенной призмы

М. А. Лисицына

Раскраска вершин графа G называется *совершенной*, если цветовой состав всякой сферы радиуса 1 в этом графе зависит только от цвета ее центра.

Граф скрещенной призмы CP_∞ – это граф, полученный из двух непересекающихся бесконечных цепей (вершины верхней цепи – четные числа, а вершины нижней цепи – нечетные) добавлением совершенного паросочетания (см. рис.).



Совершенная раскраска графа скрещенной призмы

В работе исследованы совершенные раскраски графа CP_∞ в произвольное конечное число цветов. Совершенные раскраски в k цветов для всех натуральных k описаны ранее у графа бесконечной призмы P_∞ [**1**], бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 $Ci_\infty(1,2)$ [**2**] и лексикографических произведений бесконечной цепи C_∞ на графы $\overline{K_n}$ и K_n [**3**].

Всякая совершенная раскраска скрещенной призмы периодична. Записывать ее период будем таблицей размера $2 \times l$, где l – длина периода, первая строка таблицы соответствует раскраске верхней цепи, вторая – нижней. На рисунке изображена совершенная раскраска исследуемого графа с периодом $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Первый цвет представлен белым, второй – серым, а третий – черным, в соответствии с возрастанием интенсивности цвета.

Блоком является пара вершин одной доли в 4-цикле графа CP_∞. Раскраску скрещенной призмы назовем *дизъюнктной*, если цветовые составы различных блоков в ней либо не пересекаются, либо совпадают. Верно утверждение.

Теорема. *Совершенные раскраски графа скрещенной призмы исчерпываются следующим списком:*

1. *дизъюнктные совершенные раскраски;*
2. *четыре недизъюнктные совершенные раскраски:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1' & 2 & 1' \\ 1 & 2' & 1 & 1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1' & 3 & 2' \\ 2 & 3' & 1 & 1' \end{pmatrix}.$$

Список литературы

[1] Лисицына М., Августинович С., Совершенные раскраски призмы // Сиб. электрон. мат. изв., 2016, 13, С. 1116–1128.

[2] Лисицына М., Паршина О., Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций, 2017, 24:3, С. 20–34.

[3] Lisitsyna M., Avgustinovich .S., Parshina O., On perfect colorings of infinite multipath graphs // Sib. Electron. Math. Rep., 2020, 17, P. 1863–1868.

Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Буденного, Санкт-Петербург
E-mail: lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com

Алгоритм нахождения решения системы неравенств с неизвестными в мультиоперациях

Н. А. Перязев

Пусть A – конечное множество. Не уменьшая общности можно считать, что $A = \{2^0, 2^1, ..., 2^{k-1}\}$ и 2^A есть множество всех его подмножеств. Отображение $f : A^n \to 2^A$ будем называть мультиоперацией размерности n, ранга k. Для множества всех таких мультиопераций введем обозначение $\mathcal{M}_k^{(n)}$.

Определим $(n+1)$-местный оператор суперпозиции для $f_0, ..., f_n \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ так:

$$(f_0 * f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_n) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1,...,a_n)} f_0(b_1, ..., b_n).$$

Понятие терма с множеством переменных X и множеством констант K над множеством мультиопераций $F \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$ определяется следующим образом:

- любая константа из K или любая переменная из X является термом;
- $f(t_1, ..., t_n)$ — терм, если $f \in F$ и $t_1, ..., t_n$ термы.
- $t_0(t_1, ..., t_n)$ — терм, если $t_0, ..., t_n$ термы.

Общий вид системы неравенств с неизвестными в мультиоперациях:

$$\begin{cases} t_1(\tilde{c}, \tilde{x}) \subseteq q_1(\tilde{c}, \tilde{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_m(\tilde{c}, \tilde{x}) \subseteq q_m(\tilde{c}, \tilde{x}) \end{cases} \qquad (1)$$

где t_i, q_i — термы с переменными $\tilde{x}$ и константами $\tilde{c}$ над $F \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$.

Решением системы (1) называется набор мультиопераций $g_1, ..., g_s$, такой что для всех i выполняются включения при стандартном определении значения термов посредством введенного оператора суперпозиции:

$$t_i(\tilde{c}, g_1(\tilde{c}), ..., g_s(\tilde{c})) \subseteq q_i(\tilde{c}, g_1(\tilde{c}), ..., g_s(\tilde{c}))$$

Разработан алгоритм решения системы неравенств с коэффициентами и со многими неизвестными в множестве мультиопераций с суперпозицией. Алгоритм решения такой системы получается сведением к нахождению решения некоторого булевого уравнения и основан на представлении суперпозиции мультиопераций пространственными булевыми матрицами [**1**].

Список литературы

[1] Перязев Н. А., Представление алгебр мультиопераций пространственными матрицами // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, Тула, 23–26 сентября 2020 года. Тула. ТГПУ. 2020. С. 107-111.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, Санкт-Петербург
E-mail: nikolai.baikal@gmail.com

Реберно-транзитивные накрытия полных графов и ассоциированные с ними схемы отношений

Л. Ю. Циовкина

Доклад посвящен исследованию проблемы классификации реберно-транзитивных дистанционно регулярных антиподальных накрытий полных графов. Пусть Γ — это такое накрытие и G — это его произвольная реберно-транзитивная группа автоморфизмов. Обозначим через Ω и $\mathcal{S}$ множество вершин накрытия Γ и множество орбиталов (или 2-орбит) группы G на Ω соответственно. Тогда пара $\mathrm{Inv}(G) = (\Omega, \mathcal{S})$ образует шурову схему отношений, ассоциированную с группой G. При этом множество дуг накрытия является объединением набора из не более двух орбиталов группы G и кроме того, G индуцирует 2-однородную группу подстановок G^{Σ} на множестве Σ антиподальных классов накрытия Γ, которая ввиду теорем Кантора и Бернсайда является либо почти простой, либо аффинной. В данном докладе будут представлены недавние результаты автора по классификации накрытий Γ и схем отношений $\mathrm{Inv}(G)$, полученные для случая, когда G^{Σ} — почти простая группа.

Работа автора выполнена при поддержке гранта РНФ (проект 20-71-00122).

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского, Екатеринбург
E-mail: l.tsiovkina@gmail.com

k-Closures of finite nilpotent permutation groups

D. V. Churikov

Let G be a permutation group on a finite set Ω. Denote by $\mathrm{Orb}_k(G)$ the set of orbits (*k-orbits*) of the componentwise action of G on Ω^k. H. Wielandt [**1**] defined the *k-closure* of G to be the group of all permutations that preserve every k-orbit of G as a set

$$G^{(k)} = \mathrm{Aut}(\mathrm{Orb}(G, \Omega^k)) = \{g \in \mathrm{Sym}(\Omega) \mid O^g = O \ \forall O \in \mathrm{Orb}_k(G)\}.$$

A permutation group is called *k-closed* if $G^{(k)} = G$. In this talk we discuss k-closures of finite nilpotent permutation groups. It is well-known that every finite nilpotent group is the direct product of its Sylow subgroups. The main result of this talk states that the k-closure operator preserves this direct product.

Theorem. *If G is a finite nilpotent permutation group and $k \geq 2$, then $G^{(k)}$ is the direct product of k-closures of Sylow subgroups of G.*

This theorem generalizes results of [**2, 3**] and provides a criterion of the k-closedness for finite nilpotent permutation groups.

Corollary. *For $k \geq 2$, a finite nilpotent permutation group G is k-closed if and only if every Sylow subgroup of G is k-closed.*

Acknowledgments. The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2019-1613 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

References

[1] Wielandt H. W., Permutation groups through invariant relations and invariant functions, Lecture Notes, Ohio State University, Ohio (1969).

[2] Churikov D., Praeger C., Finite totally k-closed groups, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 1 (2021) 240–245.

[3] Churikov D., Ponomarenko I., On 2-closed abelian permutation groups, arXiv:2011.12011 (2020).

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: churikovdv@gmail.com

Koolen–Park bound and nonexistence some distance-regular graphs

A. A. Makhnev

Koolen and Park obtained following bound.

Proposition 1. *Let Γ be a distance-regular graph, s be a maximal size of coclique in local subgraph of Γ. Then*

$$c_2 - 1 \geq \frac{s(a_1+1)-k}{\binom{s}{2}}.$$

Distance-regular graph Γ of diameter 3 having the second eigenvalue $\theta_1 = a_3$ is called Shilla graph. In this case $a = a_3$ devides k and we set $b = b(\Gamma) = k/a$.

By using Koolen-Park bound we proved

Theorem 1. *Distance-regular Shilla graphs with $b = 3$ and intersection arrays* $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$, $\{93, 64, 24; 1, 6, 62\}$ *do not exist.*

Belousov I.N. found intersection arrays Shilla graphs with $b = 4$ (50 arrays) and with $b = 5$ (82 arrays).

Theorem 2 (Belousov I.N., Makhnev A.A., Jinzhun C.). *Shilla graphs with $b = 4$ and intersection arrays* $\{140, 108, 36; 1, 3, 105\}$, $\{188, 144, 48; 1, 3, 141\}$, $\{196, 150, 48; 1, 4, 147\}$, $\{220, 168, 48; 1, 3, 165\}$, $\{224, 171, 57; 1, 3, 168\}$, $\{308, 234, 76; 1, 4, 231\}$, $\{308, 234, 78; 1, 3, 231\}$, $\{404, 306, 102; 1, 3, 303\}$, $\{420, 318, 104; 1, 4, 315\}$, $\{476, 360, 120; 1, 3, 357\}$, $\{572, 432, 144; 1, 9, 429\}$, $\{644, 486, 160; 1, 4, 483\}$, $\{680, 513, 168; 1, 8, 510\}$, $\{728, 549, 183; 1, 3, 546\}$, $\{764, 576, 192; 1, 9, 573\}$, $\{780, 588, 192; 1, 12, 585\}$, $\{804, 606, 202; 1, 2, 603\}$, $\{868, 654, 216; 1, 4, 651\}$, $\{980, 738, 246; 1, 3, 735\}$ *do not exist.*

Theorem 3 (Belousov I.N., Makhnev A.A., Haiyan L.). *Shilla graphs with $b = 5$ and intersection arrays* $\{305, 248, 62; 1, 2, 244\}$, $\{315, 256, 64; 1, 2, 252\}$, $\{345, 280, 64; 1, 4, 276\}$, $\{615, 496, 124; 1, 4, 492\}$, $\{815, 656, 164; 1, 2, 652\}$, $\{855, 688, 172; 1, 4, 684\}$, $\{855, 688, 170; 1, 5, 684\}$, $\{910, 732, 180; 1, 10, 728\}$, $\{1000, 804, 201; 1, 3, 800\}$, $\{1045, 840, 210; 1, 6, 836\}$, $\{1055, 848, 212; 1, 4, 844\}$, $\{1080, 868, 215; 1, 5, 864\}$, $\{1155, 928, 232; 1, 2, 924\}$, $\{1185, 952, 245; 1, 5, 948\}$, $\{1235, 992, 248; 1, 8, 988\}$,$\{1535, 1232, 308; 1, 8, 1228\}$, $\{1560, 1252, 310; 1, 10, 1248\}$, $\{1615, 1296, 324; 1, 12, 1292\}$, $\{1665, 1336, 334; 1, 2, 1332\}$ *do not exist.*

It is supporeted by Russian Science Fund (project 19-71-10067).

Institite of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

III. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»

Теоремы Гёделя о неполноте арифметики сквозь призму предиката опровержимости

А. В. Бессонов

В доказательствах своих теорем о неполноте Гёдель формализует (не)доказуемость в формальной арифметике Дедекинда-Пеано (PA)посредством предиката доказуемости $Pr(x, y)$, истинного тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером некоторой формулы, а y – номером доказательства этой формулы или некоторого ее конструктивного преобразования.При этом какие-либо иные выразимые по-Гёделю (G-*выразимые*, *definable*) предикаты обычно вообще не рассматриваются. Что будет с теоремами о неполноте при альтернативных способах формализации (не)доказуемости?

Вместо гёделева предиката доказуемости рассмотрим предикат *опровержимости* $F(x, y)$, который выполняется тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером некоторой формулы $\Phi(z)$ с одной свободной переменной, а y – гёделевым номером вывода $\neg\Phi(x)$, т.е. номером вывода *отрицания* формулы, полученной из $\Phi(z)$ подстановкой числа x на место переменной z. Этот предикат разрешим, он G-выразим в PA некоторой арифметической формулой $F(x, y)$. Рассмотрим формулу $\exists y F(x, y)$, и предположим, что её гёделев номер равен m. Подставив в эту формулу нумерал m на место x, получим формулу

$$\exists y F(m, y), \tag{1}$$

G-выражающую свою собственную опровержимость. Почти дословно повторяя гёделевские рассуждения, доказывается, что (1) неразрешима, если PA удовлетворяет условиям, аналогичным гёделевым. Таким образом, в нашей формализации (не)доказуемости в PA первая теорема о неполноте сохраняет свою силу. А что будет со второй теоремой?

Рассмотрим предикат опровержимости $Fals(x, y)$, который выполняется тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером некоторой формулы, а y – гёделевым номером доказательства *отрицания* этой формулы. Этот предикат разрешим, а значит, G-выразим в PA некоторой арифметической формулой $Fals(x, y)$. Возьмем формулу

$$\exists x \exists y Fals(x, y). \tag{2}$$

Она читается как "имеется формула, отрицание которой доказуемо в PA", что, в предположении о непротиворечивости PA, означает недоказуемость этой формулы. Поэтому (2) G-выражает существование в PA недоказуемой формулы и тем самым G-выражает непротиворечивость PA.

Легко понять, что (2) элементарно доказуема в PA (см. напр., [**1**]. Но это прямо опровергает общепринятую интерпретацию второй теоремы о неполноте: "арифметика, если она непротиворечива, не может доказать свою собственную непротиворечивость". Отсюда следует, что первая теорема о неполноте независима от второй: при одной формализации (не)доказуемости в PA обе теоремы верны, а при другой – первая теорема верна, а вторая нет.

Мы можем также утверждать, что в основе (неверной!) догмы о невозможности средствами арифметики доказать ее собственную непротиворечивость лежит случайное событие. Если бы Гёдель для доказательства своей первой теоремы о неполноте вместо предиката доказуемости выбрал предикат опровержимости, то эта догма вообще не была бы сформулирована. И уж тем более она не могла бы использоваться в аргументации против реализуемости программ Гилбберта финитного обоснования математики.

Список литературы

[1] Bessonov, A. Peano arithmetic can well prove its own consistency. The Bulletin of Symbolic Logic, 22, No. 3 (2016), p. 389.

Институт философии и права СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: trt@academ.org

Моделирование цифровых двойников ролей на основе семантических предметно-ориентированных языков

А. И. Ваганова, Д. Е. Пальчунов

Цифровой двойник (ЦД) - это виртуальное представление физического объекта, системы или процесса в течение его жизненного цикла с использованием данных в режиме реального времени [**1**].

Цифровые двойники бизнес-процессов разрабатываются на основе данных из информационных систем предприятий. Они могут использоваться для моделирования сценариев и ситуаций, тестирования процессов при изменении условий, разработки эффективных методик управления и производства. Для их создания необходимо создать базу знаний о предметной области, создать цифровых двойников регламентов и ролей, участвующих в процессах. Основная проблема такого подхода заключается в том, что процессы в бизнесе подвергаются непрерывному изменению, и цифровой двойник должен оперативно отражать в себе все изменения.

Решением является использование семантических предметно-ориентированных языков (sDSL, semantic domain-specific languages). Концепция семантического моделирования заключается в идее исполняемых спецификаций: специалист в предметной области задает спецификации на семантическом языке, и они далее будут автоматически исполнены и/или преобразованы в работающий код. Такой подход позволяет легко дополнять и изменять декларативное описание системы, повышается эффективность использования цифрового двойника [**2**].

Язык d0sl является языком sDSL, он используется для создания предметно-ориентированных языков (domain-specific languages, DSL), позволяющих описывать предметную область, создавать бизнес-правила [**3**].

Роли в бизнес-процессах строятся на знаниях и компетенциях оригинала, используют права доступа к данным и права на принятие решений для управления бизнес-процессами. Для создания цифрового двойника роли данная информация описывается на языке d0sl и далее транслируется в исполняемый код.

Список литературы

[1] Grieves M. Origins of the Digital Twin Concept. Working paper, Florida Institute of Technology/NASA. 2016.

[2] Gumirov V.S., Matyukov P.Y., Palchunov D.E. Semantic Domain-specific Languages. In: 2019 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), Novosibirsk, Russia, 21-27 Oct. 2019. IEEE Press, 2019. P. 0955–0960.

[3] D0sl Semantic Platform, электронный ресурс, режим доступа: https://d0sl.org

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: vaganova.ann00@gmail.com

Разработка методов автоматизации создания смарт-контрактов средствами семантического моделирования бизнес-процессов

А. Г. Галиева

Текущий глобальный процесс компьютеризации экономических процессов требует решения задач автоматизации бизнес-процессов. На данный момент разработаны различные методы формализованного описания бизнес-процессов, основанные на семантических моделях [1-3]. Следующим этапом реализации автоматизации таких формализованных бизнес-процессов выступает решение задачи упрощения аудита смарт-контактов. Одним из возможных решений этой задачи может быть обеспечение непосредственного управления требованиями и условиями смарт-контракта экспертами предметных областей бизнес-процесса.

Целью работы является разработка методов автоматизации создания смарт-контрактов средствами семантического моделирования бизнес-процессов.

В ходе работы была разработана программная система создания и валидации смарт-контрактов, реализующая итеративный процесс аудита. Итерация этого процесса включает генерацию текста договора на естественном языке из описания семантической модели, а также его редактирование экспертами предметной области. Для параметризации смарт-контрактов предполагается использование иерархических шаблонов.

Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф. Пальчунов Д. Е.

Список литературы

[1] Gumirov V.S., Matyukov P.Y., Palchunov D.E. Semantic Domain-specific Languages. In: 2019 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), Novosibirsk, Russia, 21-27 Oct. 2019. IEEE Press, 2019. P. 0955–0960.

[2] Galieva A. G., Palchunov D. E. Logical Methods for Smart Contract Development. In: 2019 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), Novosibirsk, Russia, IEEE Press, 2019. P. 0881–0885.

[3] Галиева А.Г., Пальчунов Д.Е. Актуальные подходы в автоматизации формализации бизнес-процессов. Материалы VII Международной конференции «Знания-Онтологии-Теории» (ЗОНТ-2019) – Новосибирск, 2019 – С. 415.

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск
E-mail: a.galieva@g.nsu.ru

Синтаксический метод построения полиномиально-вычислимых НΣ-моделей

В. Н. Глушкова

В концепции семантического программирования [1] разработан метод верификации полиномиально-вычислимых НΣ-моделей, особенность которого состоит в структурировании списочных надстроек над моделью правилами KC-грамматик $G = (V, Pr)$ (V, $Pr-$ множества символов и правил). Пусть $\mathfrak{M} = (U, Int)$ модель сигнатуры $\sigma = \langle S, C, F, P, \rho\rangle$, где S, C, P, $F-$множества сортов, констант, предикатов и функций, сорт $list \in S$, функция "сорт"ρ : $(P \cup F \rightarrow l(S))$, $l(S)$- множество наборов $\overline{s}$ элементов из S, $U-$ универс модели, $Int-$интерпретация сигнатуры. Списочная надстройка модели состоит из КС-множества списков $D_G(C_0)$, $C_0 \subset C$. Список представляет дерево таким образом, что отношению непосредственного подчинения вершин дерева соответствует отношение принадлежности элементов списка. Сорт списка l определяется меткой корня дерева tr и задается функцией $\tilde{\rho} : D_G(C_0) \rightarrow S$. Выбор класса формул теории Th модели мотивируется методами моделирования и особенностями верифицируемых свойств. В самом успешном практически значимом методе "model cheking" верифицируется регулярная последовательность действий и состояний системы, представленной конечным временным автоматом. Использование специальных переменных-локальных часов приводит к нереалистичным вычислениям автомата. Объединим логически взаимосвязанные средства спецификации системы: грамматику (правила Pr иерархизируют пространство состояний и действий моделируемой системы), прикладную теорию Th формальной модели, конечный автомат, представляемых графом как списком смежных вершин. В [2] выделен класс $\Delta_0 T$-формул, для которых можно построить модель для последовательных программ (pr) традиционных яп, на которой можно верифицировать свойство частичной корректности pr. Для систем реального времени, средства моделирования которых должны поддерживать бесконечные альтернативные вычисления, вводится класс формул вида:

$$(\forall n)(\forall \bar{x} \dot{\in} \bar{t})(\varphi(\bar{x}, \bar{t}, n) \rightarrow \psi_1(\bar{x}, \bar{t}, n) \vee \psi_2(\bar{x}, \bar{t}, n))$$

Формула φ содержит ограниченный квантор $\forall$ по спискам смежности вершин графа с негативным вхождением $\in$. Выделенный язык спецификаций из $\Sigma-$ формул решает открытую проблему, сформулированную в "model cheking". Он является более выразительным и простым по сравнению с темпоральными логиками.

Список литературы

[1] Goncharov S.S., Ershov Yu.L., Sviridenko D.I., Semantic programming. Information processing. 1986, V. 11, N 10, p. 1093–1100.

[2] Глушкова В.Н. Σ-спецификация языков программирования. Языки программирования и компиляторы-2017. Труды конф. Ростов-на-Дону, 2017, стр-78-81.

ДГТУ, Ростов-на-Дону
E-mail: lar@aaanet.ru

Разработка интеллектуального помощника для навигации

А. О. Зайцев

Популярность сети интернет и, как следствие, развитие IT технологий упростили жизнь человека. Появилась возможность голосовой передачи сообщений, из-за чего начали развиваться умные помощники и чат-боты.

В рамках работы интеллектуальный помощник - это информационая система, создаваемая для навигации. В нее входит система датчиков, браслет, который надевает на руку пользователь, и мобильное приложение.

При попадании абонента в зону действия системы, происходит идентификация абонента и производится его постоянная локализация. При поступлении голосового или текстового запроса, система в режиме диалога определяет цель запроса, строит адаптивный маршрут и с использованием голосового навигатора доводит абонента до цели или выдает ему необходимую информацию.

Целью работы является создание комплекса, состоящего из нескольких частей:

1. Четырехуровневая семантическая модель предметной области;
2. Онтологическая модель пользователя [**1, 2**];
3. Модуль определения и декомпозиции задач пользователя;
4. Модуль поиска оптимальной последовательности действий[**3**];
5. Модуль анализа тональности;

На данном этапе были решены следующие задачи: проведен анализ литературы, изучена предметная область, разаработана онтологическая модель решаемой задачи, определены технологии для поставленной задачи, описанные модули были реализованы, составлены в единную систему и протестированы.

В рамках дальнейшего развития были поставлены следующие глобальные задачи: тестирование интеллектуального помощника на реальных пользователях в повседневной жизни, возможное исправление или корректировка работы как отдельных модулей, так и системы в целом, расширение области действия, путем добавления новых предметных областей, а также постройка взаимодействий не только внутри конкретной предметной области, но и между ними.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е., Целищев В.В., Проблема извлечения знаний в системе взаимодействия человека и компьютера: онтологии и пресуппозиции. Философия науки. 2012. N 4 (55). С. 20–35.

[2] Капустина А.И., Пальчунов Д.Е., Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий, Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. С. 34–46.

[3] Филипов И.И., Пальчунов Д.Е., Степанов П.А., Разработка методов семантического поиска в Интернете, основанных на древоводных лингвистических шаблонах, Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2019. Т.17, N 3, С.111–122.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.zaitsev3@g.nsu.ru

Интерливинговые семантики непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной стратегией

А. Ю. Зубарев

Непрерывно-временная сеть Петри (НВСП) — формализм, позволяющий описывать как функциональные, так и реально-временные характеристики систем, что часто требуется при верификации. Переходы в НВСП имеют часы и временной интервал, а состояния определяются разметкой и вектором значений часов. Смена состояния — результат хода времени или срабатывания перехода. Переход может сработать из состояния только в том случае, если он разрешен в разметке (каждое входное место содержит фишку) и значение его часов лежит во временном интервале. Часы неразрешенных переходов неактивны и сброшены. В промежуточной пространственной стратегии, в отличие от атомарной и устойчиво-атомарной, при сбросе учитываются промежуточные разметки (после потребления и до производства фишек). Кроме того, в промежуточной и атомарной стратегиях часы перехода, который сработал, всегда сбрасываются, чего может не быть в устойчиво-атомарной стратегии. В НВСП с сильной временной стратегией разрешенный переход обязан сработать не позднее верхней границы его временного интервала, тогда как в НВСП со слабой стратегией такого ограничения нет. Известно, что две временные стратегии являются несравнимыми.

Последовательность изменений состояний в результате хода времени и срабатываний переходов (пробег) определяет классическую интерливинговую семантику НВСП. В работе определены и изучены интерливинговые семантики, основанные на временных процессах, в терминах НВСП со слабой временной стратегией и разными пространственными стратегиями. Временной интерливинговый процесс образован из причинной сети, временного графика (выполнение причинной сети во времени) и гомоморфного отображения причинной сети в НВСП. Причинная сеть — ацикличная сеть, представленная множествами условий и событий, которым соответствуют места и переходы НВСП. Данная конструкция определяет причинную зависимость и параллелизм событий системы. Временной график — последовательность срезов причинной сети (максимальных по включению множеств параллельных условий) со значениями глобального времени системы. Полученные для каждой пространственной стратегии ограничения на временные значения в графике определяют допустимость временного процесса. В ходе работы была доказана теорема демонстрирующая корректность предложенных интерливинговых семантик.

Теорема. *Существует взаимно однозначное отображение между множеством пробегов и множеством допустимых временных интерливинговых процессов НВСП.*

Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, Новосибирск
E-mail: auzubarev@gmail.com

Интеллектуальный помощник с использованием технологий моделирования бизнес-процессов

Я. В. Ляшук

Интеллектуальный помощник — это программный агент, который распознает команды пользователя и выполняет на их основании требуемые задачи. Под программным агентом здесь понимается компонент программного обеспечения, который способен действовать с достаточной точностью, чтобы выполнять задачи от имени своего пользователя [1].

Имеет смысл рассмотреть использование интеллектуального помощника в качестве средства для поддержки принятия решений и автоматизации некоторых бизнес-процессов [2, 3]. Результатом такой интеграции может стать программный агент, который выполняет описанные функции при помощи голосового интерфейса, причем представление информации на естественном языке позволяет улучшить понимание происходящих бизнес-процессов конечным пользователем, что также выделяет предложенную систему на фоне других средств моделирования и автоматизации.

Для моделирования бизнес-процессов, используемых при построении ответов интеллектуального помощника, предлагается использовать язык d0SL и концепцию Semantic Domain-Specific Languages [4]. Модели, построенные при помощи бизнес-правил, оказываются более гибкими по сравнению с процедурными подходами (например, BPMN) в силу отсутствия необходимости в определении всевозможных альтернативных сценариев протекания бизнес-процесса: допустимыми будут считаться все сценарии, не запрещенные бизнес-правилами.

В дальнейшем следует рассмотреть перспективы использования нейронных сетей для распознавания новых сущностей и автоматического расширения семантической модели предметной области. Таким образом, при построении диалога фактически будет достигнут нейро-символический искусственный интеллект, многочисленные преимущества которого также рассмотрены в работе.

Список литературы

[1] Nwana H. S., Software Agents: An Overview. Knowledge Engineering Review. 1996. Vol. 11, N 3. pp. 205–244.

[2] Griol D., Molina J.M., Which Is the Most Appropriate Response? Combining Decision-Support Systems and Conversational Interfaces. Distributed Computing and Artificial Intelligence, 13th International Conference. Advances in Intelligent Systems and Computing. Vol. 474. 2016.

[3] Palchunov D. , Vaganova A. Methods for Developing Digital Twins of Roles Based on Semantic Domain-Specific Languages. 2021 IEEE 22nd International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM). 2021. pp. 515-519. doi: 10.1109/EDM52169.2021.9507716.

[4] Gumirov V. S. , Matyukov P. Y. and Palchunov D. E. Semantic Domain-Specific Languages. 2019 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). 2019. pp. 955-960.

[5] Garcez A., Lamb L. Neurosymbolic AI: The 3rd Wave. arXiv e-prints. 2020. URL: https://arxiv.org/abs/2012.05876

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Разработка автоматизированных методов наполнения онтологии предметной области при помощи виртуального помощника

А. С. Орловский, Д. Е. Пальчунов

Виртуальные ассистенты применяются в различных сферах для автоматизации общения с пользователем на естественном языке [**1**] с целью сократить затраты на привлечение реальных людей. В рамках данного исследования был разработан предметно-специфичный виртуальный собеседник, задачей которого является отыскание для пользователя на основе его запроса наиболее релевантных товаров в Интернет-магазинах компьютерной техники. Программная система состоит из 4 компонентов:

1) Менеджер диалога — управляет состоянием диалога, принимает реплики пользователя и возвращает ответ после взаимодействия с остальными 3 сервисами.

2) Модуль обработки естественного языка — выполняет извлечение намерений (intents, применяется служба DialogFlow) и именованных сущностей (применяется программный пакет Pullenti SDK) из запросов пользователя.

3) Поисковый агент для анализа веб-сайтов — на основе извлечённых на предыдущем этапе сущностей (названий магазинов, типов и характеристиков товаров и т.д.) ищет требуемую информацию на сайтах и отправляет менеджеру онтологий запросы для синхронизации состояния.

4) Модуль обработки онтологий — получает данные от бота для сайтов и SQWRL-запросы от модуля обработки текстов, построенные на основе извлечённых им сущностей [**2**]. База знаний предметной области хранится в формате OWL-онтологии, что позволяет автоматизировать сложный логический вывод о совместимости товаров при помощи SWRL-правил.

Разработка ведётся на основе четырёхуровневой онтологической модели [**3**].

Список литературы

[1] Деревянко Д.В., Пальчунов Д.Е. Формальные методы разработки вопросно-ответной системы на естественном языке. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12. N 3. С. 34-47.

[2] Власов Д.Ю., Пальчунов Д.Е., Степанов П.А. Автоматизация извлечения отношений между понятиями из текстов естественного языка. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2010. Т. 8. N 3. С. 23-33.

[3] Найданов Ч.А., Пальчунов Д.Е., Сазонова П.А. Разработка автоматизированных методов предупреждения рисков возникновения критических состояний, основанных на анализе знаний, извлечённых из историй болезней пациентов. Сибирский научный медицинский журнал. 2016. Т. 36. N 1. С. 105-113.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.orlovskii@g.nsu.ru, palch@math.nsc.ru

Автоматизированное извлечение знаний из медицинских текстов

Р. С. Погодин

Работа посвящена применению теоретико-модельных методов для извлечения и формального представления знаний из медицинских текстов [1].

Цель работы ? автоматизация наполнения баз знаний платформы IACPaaS знаниями из текстов описаний болезней, особенностями которых являются наличие медицинских терминов-словосочетаний и изобилие предложений с сочинительными связями.

Для решения задачи извлечения знаний из медицинских текстов используются методы преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов в виде фрагментов атомарных диаграмм [2, 3]. Далее, по фрагментам атомарных диаграмм строится смысловое дерево, которое служит промежуточным представлением знаний для последующей трансляции в формат инфоресурсов IACPaaS. В результате работы реализована программная система, обеспечивающая автоматизирование извлечение знаний из текстов медицинских документов и преобразующая эти знания в формат инфоресурсов IACPaaS.

Преобразование текста в машиночитаемый формат состоит из нескольких этапов:

(1) Составление словарей.
(2) Преобразование предложений во фрагменты атомарных диаграмм.
(3) Преобразование многоместных предикатов в двуместные.
(4) Разбор однородных членов предложений и сочинительных связей в двуместных предикатах.
(5) Построение смыслового дерева.
(6) Экспорт извлечённых знаний в инфоресурсы IACPaaS.

Список литературы

[1] Pogodin R. S., Palchunov D. The Use of Model-Theoretical Methods for Automated Knowledge Extraction from Medical Text. In: 2021 IEEE 22nd International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM), 2021, pp. 555-560.

[2] Ненашева Е. О., Пальчунов Д. Е. Разработка автоматизированных методов преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов. Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15, вып. 3. С. 55–60.

[3] Капустина А. И., Пальчунов Д. Е. Разработка методов интеграции автоматических средств логического вывода для порождения знаний в онтологической модели. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2019. Т. 17, N 3. С. 29-42.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: ruspog@gmail.com

Разработка модуля обработки контента для рекомендательной системы электронных курсов

Т. М. Подкур

Дистанционное образование является одним из перспективных направлений развития современного образования. Ввиду роста его популярности в сети Интернет появляется большое количество образовательных электронных платформ. В настоящее время в мире создано и активно развивается около 400 платформ для ведения онлайн курсов [**1**].

Несмотря на высокий темп развития электронного обучения, потребители не могут удовлетворить некоторые образовательные потребности [**2, 3**]. Каждый студент задается вопросом, какой курс лучше выбрать из множества предложенных. Основной сложностью для студентов в выборе курса является различие платформ в интерфейсе, характеристиках и категориях курсов [**4**].

Для решения этой проблемы ведется разработка рекомендательной системы электронных курсов ChooseYourCourse [**5, 6**]. Такой системе для построения рекомендаций требуется набор данных, а именно, актуальных электронных курсов, собранных из различных образовательных платформ. В рамках данной работы был разработан программный модуль для сбора и обработки данных о курсах из сети Интернет. Этот модуль включает автоматизированные алгоритмы для построения наборов ключевых слов курсов и построения классификации курсов. На основе исходных данных о курсе, а также данных, полученных в результате работы алгоритмов, была разработана метрика схожести курсов, которая в дальнейшем будет применяться в рекомендательной системе ChooseYourCourse.

Список литературы

[1] Кедрова Г.Е. , Муромцев В.В. Современное состояние и направления развития систем дистанционного обучения. Вестник РГГУ. Серия «Экономика. Управление. Право», N 4(10), 2017. С. 88–101.

[2] Яхъяева Г.Э., Абсайдульевой А.Р. Семантический подход к моделированию фонда оценочных средств. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т. 16, вып. 2, 2018. С. 113–121.

[3] Баталин К.В. , Яхъяева Г.Э. Система управления оценочными средствами. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии, Т.18, N 2, 2020. С. 5–14.

[4] Зыкова А.А., Яхъяева Г.Э. Программная система «Абитуриент–Студент». Вестник МГПУ. Серия «Информатика и информатизация образования». N 1(55), 2021. С. 73–81.

[5] Подкур Т.М. Разработка агрегатора электронных курсов для алгоритма рекомендаций. Материалы международной конференции «Мальцевские чтения». Секция «Алгебро–логические методы в информационных технологиях», г. Новосибирск, 16–20 ноября, 2020. С. 88.

[6] Подкур Т.М., Шестакова Е.А. Разработка рекомендательной системы электронных курсов. Материалы 59-й Международной научной студенческой конференции. Секция «Информационные технологии», г. Новосибирск, 2021. С. 157.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: t.podkur@g.nsu.ru

Разработка гибридных моделей на основе синтеза логического вывода и нейронных сетей

Д. В. Протасов

Проблема интерпретации результатов работы нейронных сетей выражается в том, что сети представляют из себя «черный ящик», не позволяющий определить, как был получен результат. Поэтому была создана система, позволяющая интерпретировать результат в удобном для человеческого восприятия виде.

Система является связкой из онтологии для извлечения дополнительных знаний о классифицируемых понятиях, из которой на вход нейросети поступают данные, самой нейросети (в рассматриваемом случае классифицирующая), механизма вывода и связующего модуля. Механизм вывода основан на технологии Semantic Web и позволяет на основе данных онтологий, описанных на языке OWL DL [**1**], получить требуемую интерпретацию с помощью машины логического вывода. Построение логического вывода происходит уже на основе разбиения на классы.

Для этих целей из несколько вариантов машин логического вывода были выбраны машины на основе логики описаний ALC (attributive language with complement) [**1, 2, 3**], для которых концепты выводятся рекурсивно, начиная с атомарных. Из машин на основе такой логики был выбран фреймворк DL-Learner. Связующий модуль ответственен за непосредственное управление (опциональным) запуском нейросети, анализом данных и отправкой обработанных данных механизму вывода. Для более чем 2 классов машиной логического вывода строится описание для каждого класса.

Разработанная гибридная система на практике может применяться для оценки корректности разделения объектов на классы, сравнения результатов работы нескольких нейросетей, а также упрощения и ускорения процесса предоставления результатов заказчику в коммерческой разработке нейронных сетей.

Список литературы

[1] Корсун И.А., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. N 3. С. 34–48.

[2] Капустина А.И., Пальчунов Д.Е. Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий, Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. N 2. С. 34–46.

[3] Капустина А.И., Пальчунов Д.Е. Разработка методов интеграции автоматических средств логического вывода для порождения знаний в онтологической модели, Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2019. Т. 17, N 3. С. 29–42.

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск
E-mail: d.protasov@g.nsu.ru

Разработка интеллектуального электронного ассистента для виртуальной приемной

А. С. Трегубов

Первичный визит человека в незнакомое ему место всегда связано со стрессом и множеством вопросов. Примерами таких ситуаций могут служить первый поход в университет, заселение в незнакомую гостиницу, посещение нового торгового центра. В настоящий момент для координации и помощи клиентам организации нанимают отдельных сотрудников на должности секретарей и оборудуют специальные стойки информации. Долгое время возможность полной автоматизации работы таких сотрудников казалась невозможной. Но с появлением нейросетевых технологий решение данной задачи стало возможным.

Цель работы ? создание интеллектуального электронного ассистента для виртуальной приемной.

В рамках работы был создан веб-сервис для интеллектуального электронного ассистента. Разработана структура базы данных с учетом хранения знаний об организации в виде онтологической модели [**1, 2**]. Реализован функционал распознавания пользовательских задач и формирования ответов. Для предоставления пользовательского доступа был разработан чат-бот на платформе Telegram.

В дальнейшем планируется развитие работы, в частности расширение функционала, добавление возможности голосового взаимодействия, тестирование системы в режиме высоких нагрузок.

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е., Филиппов И. И., Степанов П. А. Разработка методов семантического поиска в интернете, основанных на древовидных лингвистических шаблонах. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии, 17:3 (2019), 111–122.

[2] Пальчунов Д. Е., Финк А. А. Разработка автоматизированных методов порождения служебных документов на естественном языке. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии, 15:3 (2017), 79–89.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: artem.tregubov@mail.ru

Разработка алгоритма рекомендации электронных курсов для системы ChooseYourCourse

Е. А. Шестакова

В последнее время как никогда становится актуальной задача цифровизации образования [**1, 2**]. Отличным средством для получения новых знаний или углубления в изучаемые ранее предметы является самообразование при помощи электронных курсов, выложенных на различных образовательных платформах. Однако огромное количество выложенных на этих платформах курсов, книг и видеоуроков, а также их постоянное изменение и расширение затрудняют поиск подходящих и действительно полезных ресурсов.

Для решения этой проблемы было предложено разработать рекомендательную систему [**3**], помогающую пользователю в подборе электронных курсов. Решение, рекомендовать пользователю определённый курс или нет, зависит от множества характеристик: тематики курса, уровня подготовки пользователя, длительности курса, стоимости курса, языка преподавания, авторов курса и т. п. Для сбора и хранения информации о предпочтениях пользователя разработана модель профиля пользователя, формирующаяся на основе выбранных вручную пользователем параметров и истории взаимодействия с другими курсами [**4**].

В рамках данной работы, для актуализации значений профиля был разработан алгоритм, осуществляющий автоматическое обновление данных на основе действий пользователя. Алгоритм учитывает вес совершенного действия (просчитываемого по разработанному алгоритму) и коэффициент давности действия, сопоставляет данную информацию с уже содержащейся в профиле и актуализирует. Полученная данным способом информация применяется в разработанном алгоритме построения рекомендаций.

Список литературы

[1] Яхъяева Г.Э., Абсайдульевой А.Р. Семантический подход к моделированию фонда оценочных средств. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т. 16, вып. 2, 2018. С. 113–121.

[2] Зыкова А.А., Яхъяева Г.Э. Программная система «Абитуриент–Студент». Вестник МГПУ. Серия «Информатика и информатизация образования». N 1(55), 2021. С. 73–81.

[3] Подкур Т.М., Шестакова Е.А. Разработка рекомендательной системы электронных курсов. Материалы 59-й Международной научной студенческой конференции. Секция «Информационные технологии», г. Новосибирск, 2021. С. 157.

[4] Шестакова Е. А. Разработка модели профиля пользователя для рекомендательной системы электронных курсов. Материалы международной конференции «Мальцевские чтения». Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях», г. Новосибирск, 16–20 ноября, 2020. С. 101.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: shestakova637@gmail.com

Разработка модуля распознавания эмоций в естественном языке

А. А. Шишкин

С ростом популярности и доступности внедрения цифровых технологий в различные сферы жизни человека, важность способности машины анализировать и обрабатывать речь человека так же возросла. Вырос и спрос на такие решения. Сегодня, многие крупные компании строят свои системы для анализа мнений и намерений потенциальных покупателей. Для голосовых ассистентов, которые продолжают набирать популярность, анализ эмоций так же открывает новые возможности.

Однако, исследования анализа эмоций и намерений все еще имеют ряд нерешенных проблем. Трудности, связанные с корректным определением цели эмоции и ее характера, накладывают ограничения на использование данного вида анализа повсеместно.

Целью данной работы является разработка программного модуля для умного ассистента, способного распознавать эмоции человека.

Для достижения цели были определены следующие требования к системе обработки эмоций: анализ эмоций должен происходить на уровне сущности, определяя, какая сущность какие эмоции вызывает, а также модуль должен обрабатывать мнения, сравнивающие несколько сущностей между собой. Кроме того, необходимо разделять эмоции на категории по продолжительности.

В дальнейшей работе планируется разработка алгоритма для распознавания эмоций в естественном языке, его реализация и оптимизация.

Список литературы

[1] Abbaschian B. J., Sierra-Sosa D., Elmaghraby A. Deep Learning Techniques for Speech Emotion Recognition, from Databases to Models.
[2] Jurafsky D., Martin J. H. Speech and Language Processing.
[3] Pareti S., Lando T. Dialog Intent Structure: A Hierarchical Schema of Linked Dialog Acts.
[4] Feine J., Morana S., Maedche A. A Chatbot Response Generation System.
[5] Liu B. Sentiment Analysis and Opinion Mining.
[6] Schuurmans J., Frasincar F. Intent Classification for Dialogue Utterances.
[7] Махина Е.Д., Пальчунов Д.Е. Программная система для определения речевых действий в текстах естественного языка // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2018. Т. 16. N 4. С. 95–106.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.shishkin3@g.nsu.ru

Алгоритм пополнения обучающего множества сверточной нейронной сети на основе произведения гауссовых функций

А. С. Щербин

Одна из актуальных проблем глубокого обучения — эффективность данных. При подходе активного обучения имеется сравнительно небольшой набор размеченных данных, большой набор немаркированных данных, а также ограниченный бюджет для их маркировки. Определена модель обучения на помеченных данных. Задача состоит в том, чтобы выбрать наиболее подходящие образцы для повышения качества модели на тестовом наборе данных [**1, 2, 3**].

В работе предлагается новый алгоритм активного обучения, основанный на распределении Гаусса. Основная идея алгоритма состоит в том, чтобы использовать эталонные образцы из каждого класса и вычислить параметры распределения для каждой координаты представления. Функция Гаусса используется как мера расстояния между немаркированными выборками и представлением класса. Это позволяет комбинировать ее с любым алгоритмом ранжирования.

Подход был протестирован на части задачи Imagenet (20 случайных классов из исходного набора данных Imagenet 2012) [**4**]. Мера, основанная на распределении Гаусса, была использована в сочетании с методом отбора выборки на основе уверенности. Эта комбинация позволила добиться значительно лучших результатов.

Список литературы

[1] Щербин А.С. Разработка алгоритма активного обучения сверточных нейронных сетей для задачи классификации изображений // Тезисы докладов международной конференции «Мальцевские чтения», Новосибирск, 2020, стр. 103.

[2] Щербин А.С. Разработка методов активного обучения для улучшения качества модели классификации изображений // Материалы 58-й Международной научной студенческой конференции Информационные технологии. Новосибирск, 2020, стр. 205.

[3] Shcherbin A., Yakhyaeva G. Gaussian Based Active Learning Algorithm for Image Classification Problem International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices, EDMthis link is disabled, 2021, 2021-June, pp. 542–546.

[4] Krizhevsky, A. ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks / A. Krizhevsky, I. Sutskever, G. E. Hinton // Advances in neural information processing systems. 2012, pp. 1097–1105.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.shsherbin@g.nsu.ru

Проектирование общей структуры интеллектуального помощника с применением методов гибридного и объяснимого искусственного интеллекта

А. А. Якобсон

В современном мире виртуальные цифровые помощники стремительно развиваются в разных областях, таких как интернет-маркетинг, автоматизация бизнес-процессов. При этом сохраняется определенное недоверие к системам искусственного интеллекта.

Ядро системы состоит из нескольких ключевых компонентов: интерфейс, модуль интерпретации ввода, база знаний предметной области, интеллектуальный модуль управления аналитическими компонентами. Предварительную обработку и подготовку входных данных обеспечивает интеллектуальный модуль анализа поступающих в систему запросов, после чего передает их в модуль управления. Модуль интеллектуального управления аналитическими компонентами включает в себя интерфейс взаимодействия с базой знаний, контекстные алгоритмы или нейросети, выполняющие обработку данных с опорой на базу знаний, а также блок управления. При этом, система должна допускать использование нескольких логических блоков анализа данных, а также систему сборки и вывода логов этих компонентов. Прозрачность работы может достигаться путем внедрения соответствующих алгоритмов и разработкой интерфейса обмена информацией между блоками и управляющей системой. Полученная система, будет масштабируема в смысле количества аналитических компонентов, единственным ограничением будет совместимость компонентов между собой, а также доступной базой знаний.

В результате разработана архитектура виртуального цифрового помощника, пригодная для использования в различных предметных областях, в зависимости от используемой базы знаний.

Список литературы

[1] Душкин Р.В., Андронов М.Г. Гибридная схема построения искусственных интеллектуальных систем. Кибернетика и программирование. 2019. N 4.

[2] Wang P. W. et al. Satnet: Bridging deep learning and logical reasoning using a differentiable satisfiability solver. International Conference on Machine Learning. PMLR, 2019. С. 6545-6554.

[3] Adadi A. and Berrada M., Peeking Inside the Black-Box: A Survey on Explainable Artificial Intelligence (XAI). In: IEEE Access, vol. 6, pp. 52138-52160, 2018, doi: 10.1109/ACCESS.2018.2870052.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск

О проблеме реализуемости множества субъективных оценок эксперта

Г. Э. Яхъяева

Понятие «субъективной вероятности» было введено в 30-х годах прошлого века Фрэнком Рамсеем, и подразумевает степень уверенности эксперта в наступлении того или иного события. Её применяют тогда, когда невозможно воспользоваться объективной вероятностью по причине неполноты или отсутствия данных о наблюдениях в прошлом, из-за высокой стоимости получения объективной вероятности. Зафиксируем основное множества A ? множество объектов предметной области и сигнатуру σ ? множество понятий предметной области. В данной работе мы ограничимся случаем, когда сигнатура σ содержит только предикатные символы. Введем множество констант $C = \{c_a \mid a \in A\}$ и обозначать $\sigma_A = \sigma \cup C$. Тогда любое событие предметной области можно формализовать в виде некоторого предложения φ сигнатуры σ_A.

Определение [**1**]**.** Тройку $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma_A, \mu \rangle$ будем называть нечеткой моделью, если

(1) Отображение $\mu : S(\sigma_A) \to [0,\ 1]$ является нечеткой мерой;
(2) $\varphi\ \sim \psi\ \Rightarrow\ \mu(\varphi) = \mu(\psi)$, для любых $\varphi,\ \psi \in\ S(\sigma_A)$.

Задавая нечеткую модель $\mathfrak{A}_\mu$ мы должны располагать знанием о субъективной вероятности всех предложений множества $S(\sigma_A)$. Однако эксперт (или даже группа экспертов) может не обладать таким полным знанием, более того множество $S(\sigma_A)$ может оказаться бесконечным. Тем не менее, существует конечное множество событий предметной области, о вероятностных значениях которых эксперт может дать свою экспертную оценку [**2, 3**].

Рассмотрим множество предложений $S \in S(\sigma_A)$. Обозначим через σ_S сигнатуру множества предложений S. Очевидно, что $\sigma_S \subseteq \sigma_A$. Пусть $C_S = C \cap \sigma_S$? множество констант, встречающихся в S. Определим множество $A_S = \{a \in A\ |c_a \in C_S\}$.

Определение. Рассмотрим множество предложений $S \in S(\sigma_A)$ и отображение $\eta_S : S \to [0,1]$. Будем говорить, что нечеткая модель $\mathfrak{B}_\mu = \langle B, \sigma_A, \mu \rangle$ согласуется с означивание η_S, если

(1) $A_S \subseteq B$;
(2) $\eta_S(\varphi) = \mu(\varphi)$ для любого предложения $\varphi \in S$.

Определение. Означивание $\eta_S : S \to [0,1]$ является реализуемым на множестве B, если

(1) $A_S \subseteq B$;
(2) Пусть $\sigma = \sigma_{S \setminus C_S}$. Тогда найдется такой класс прецедентов $\mathbb{E} = \{\mathfrak{B}_i = \langle B, \sigma \rangle | i \in I\}$, что $Fuz(\mathfrak{B}_i)$ согласуется с η_S.

Теорема. *Рассмотрим множество предложений $S \in S(\sigma_A)$ и отображение $\eta_S : S \to [0,1]$. Пусть $A_0 = A_S \cup \{a_1, a_2\}$, где $a_1, a_2 \notin A_S$. Тогда если сигнатура $\sigma = \sigma_S \setminus C_S$ содержит только одноместные предикаты, то для любого множества B такого, что $A_S \subset B$ имеем*

$$\eta_S \text{ реализуется на } A_0 \Leftrightarrow \eta_S \text{ реализуется на } B.$$

Следствие. *Рассмотрим множество предложений $S \in S(\sigma_A)$ и отображение $\eta_S : S \to [0,1]$. Пусть сигнатура σ_S содержит только одноместные предикаты и конечное (или пустое) множество констант. Тогда найдутся такие множество бескванторных* *предложений* $S' \in S(\sigma_A)$ *и означивание* $\eta_{S'} : S' \to [0,1]$, *что для любого множества* B *такого, что* $A_S \subset B$ *имеем*

$$\eta_S \text{ реализуется на } B \Leftrightarrow \eta_{S'} \text{ реализуется на } B.$$

Список литературы

[1] Yakhyaeva G. Logic of fuzzifications. In: Proceedings of the 4th Indian International Conference on Artificial Intelligence, IICAI 2009, 2009, стр. 222–239

[2] Yakhyaeva G., Yasinskaya O. An Algorithm to Compare Computer-Security Knowledge from Different Sources. In: Proceedings of the 17th International Conference on Enterprise Information Systems, p. 565–572.

[3] Yakhyaeva G.E. Application of Boolean Valued and Fuzzy Model Theory for Knowledge Base Development. In: SIBIRCON 2019 - International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, Proceedings, 2019, стр. 868–871

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: gul_nara@mail.ru

One model of circadian oscillator

V. P. Golubyatnikov, N. E. Kirillova

We consider nonlinear 6-dimensional dynamical system of biochemical kinetics

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= k_1(\Gamma_1(u)\cdot\Gamma_0(w)-p); & \frac{du}{dt} &= k_2(\Gamma_2(x)\cdot L_2(p)-u);\\ \frac{dw}{dt} &= k_3(\Gamma_3(x)\cdot L_3(p)-w); & \frac{dz}{dt} &= k_4(\Gamma_4(x)\cdot L_4(p)-z);\\ \frac{dx}{dt} &= k_5(\Gamma_5(b)-x); & \frac{db}{dt} &= k_6(L_6(z)-b); \end{aligned} \tag{1}$$

as a model of functioning of circadian oscillator described in [**1, 2**]. Here, all smooth positive monotonically increasing functions Γ_j correspond to positive feedbacks, and monotonically decreasing smooth positive functions L_j describe negative feedbacks in this gene network. Hence, $\Gamma'_j > 0$, $L'_j < 0$. We do not specify analytic forms of these functions.

All the variables in the dynamical system (1) are concentrations of the components of this oscillator. Let $a_j = \max\Gamma_j$, and $d_j = \max L_j$; $j = 0,\dots,6$.

Lemma. *Domain* $Q^6 = [0,a_0a_1]\times[0,a_2d_2]\times[0,a_3d_3]\times[0,a_4d_4]\times[0,a_5]\times[0,a_6]$ *is positively invariant in the phase portrait of the system* (1).

Theorem. *If the inequality*

$$\frac{\Gamma'_5L'_6L'_4\Gamma_4}{1-\Gamma'_5L'_6L_4\Gamma'_4}\cdot\frac{\Gamma'_1L_2\Gamma'_2\Gamma_0+\Gamma_1\Gamma'_0L_3\Gamma'_3}{1-\Gamma'_1L'_2\Gamma_2\Gamma_0-\Gamma_1\Gamma'_0L'_3\Gamma_3}<1, \tag{2}$$

holds in Q^6, *then the system* (1) *has a unique equilibrium point* S_0 *in* Q^6 .

Actually, this system does not have equilibrium points outside of Q^6.

We show that the condition (2) holds for a wide natural class of gene networks considered in [**1, 2**]. In terms of linearization matrix of the system (1) at the equilibrium point S_0, we formulate also some sufficient analytic conditions of existence of its cycle in Q^6.

Similar results can be obtained for more complicated 7-dimensional model of this circadian oscillator. More simple 3-dimensional models of such a gene network do not have cycles, see [**3**].

Supported by RFBR, grant 20-31-90011.

References

[1] Podkolodnaya O.A., Tverdokhleb N.N., Podkolodnyy N.L. Computational modeling of the cell autonomous mammalian circadian oscillator, BMC Systems Biology. 2017. V. 11. p. 27 – 42.

[2] Almeida S., Chaves M., Delaunay F. Transcription-based circadian mechanism controls the duration of molecular clock states in response to signaling inputs. Journal of Theoretical Biology. 2020, v. 484, p. 110015.

[3] Golubyatnikov V.P., Kirillova N.E. Phase portraits of two gene networks models. Mathematical notes of NEFU. 2021. V. 28, N 1, p. 3 – 11.

Sobolev institute of mathematics, Novosibirsk
E-mail: vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

IV. Секция «Неклассические логики»

О сложности некоммутативных субструктурных логик с одной переменной

М. И. Канович, С. Л. Кузнецов, А. О. Щедров

Исчисление Ламбека с единицей $\mathbf{L_1}$ [**6**] — это алгебраическая логика класса частично упорядоченных моноидов с делениями, т.е. такими операциями $\backslash$ и $/$, что $b \preccurlyeq a \backslash c \iff a \cdot b \preccurlyeq c \iff a \preccurlyeq c \,/\, b$. Данная логика — субструктурная: в ней нет правил сокращения, ослабления и перестановки. Однако $\mathbf{L_1}$ можно расширить экспоненциалом [**2**], под знаком которого эти правила допускаются.

Задача выводимости для $\mathbf{L_1}$ с экспоненциалом неразрешима [**7**]. В работе [**3**], среди прочего, построена подстановка, позволяющая доказать неразрешимость уже во фрагменте с одной переменной. Для любого n предъявлена система так называемых сильно независимых формул $P_1, \ldots, P_n$ от одной переменной, подстановка которых вместо переменных $p_1, \ldots, p_n$ сохраняет выводимость в обе стороны при условии, что экспоненциал применяется только на верхнем уровне.

Мы предлагаем несколько расширений и уточнений этого результата.

Теорема 1. *Существует бесконечная сильно независимая система формул $P_1, P_2, \ldots$, такая что размер формулы P_n полиномиально зависит от n.*

Теорема 2. *Задача выводимости в минимальном фрагменте $\mathbf{L_1}$ только с одной переменной, одной операцией деления и экспоненциалом неразрешима.*

Доказательство теоремы 2 основано на комбинации конструкций из [**3**] и [**1**].

Следующие результаты касаются расширения $\mathbf{L_1}$ итерацией Клини a^* и усиливают результаты работ [**5**] и [**4**]. В общем случае a^* определяется как $\min\{b \mid \mathbf{1} \preceq b \text{ и } a \cdot b \preceq b\}$; в более частном *-непрерывном случае — как $\sup\{a^n \mid n \geqslant 0\}$.

Теорема 3. *Расширение $\mathbf{L_1}$ итерацией Клини для общего случая, а также операцией дизъюнкции (супремума двух элементов), во фрагменте с одной переменной, неразрешимо и Σ_1^0-полно.*

Теорема 4. *Расширение $\mathbf{L_1}$ итерацией Клини в *-непрерывном случае, во фрагменте с одной переменной, Π_1^0-полно.*

Список литературы

[1] Buszkowski W. Some decision problems in the theory of syntactic categories // Z. math. Log. Grundl. Math. 1982. Vol. 28. P. 539–548.

[2] Girard J.-Y. Linear logic // Theor. Comput. Sci. 1987. Vol. 50(3). P. 1–101.

[3] Kanovich M. I. The complexity of neutrals in linear logic // LICS 1995. IEEE, 1995. P. 486–495.

[4] Kuznetsov S. Complexity of the infinitary Lambek calculus with Kleene star // Rev. Symb. Log. 2020. FirstView. 28 pp.

[5] Kuznetsov S. Action logic is undecidable // ACM T. Comput. Log. 2021. Vol. 22(2). Art. 10.

[6] Lambek J. Deductive systems and categories II: Standard constructions and closed categories // Lect. Notes Math. Vol. 86. Springer, 1969. P. 76–122.

[7] Lincoln P., Mitchell J., Scedrov A., Shankar N. Decision problems for propositional linear logic // Ann. Pure Appl. Log. 1992. Vol. 56(1–3). P. 239–311.

UCL, London (UK)
E-mail: m.kanovich@ucl.ac.uk
МИАН, Москва
E-mail: sk@mi-ras.ru
UPenn, Philadelphia (USA); НИУ ВШЭ, Москва
E-mail: scedrov@math.upenn.edu

Сводимость свойств гибридных логик к свойствам напарников

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

Рассматриваются специальные расширения минимальной логики J, так называемые гибридные логики. Гибридные логики – это расширения пересечения интуиционистской и негативной логик Int и Neg. Минимальная гибридная логика $\mathrm{Hyb} = \mathrm{J} + \bot \vee (\bot \to p)$.

Каждой J-логике L соответствуют ее интуиционистский L_{int} и негативный L_{neg} напарники [**1**]. Оказывается, многие свойства гибридной логики сводятся к подходящим свойствам ее напарников.

Рассмотрим проблемы различимости и узнаваемости в классе гибридных логик. Эти понятия были введены в [**2**]–[**4**]. Пусть L_0 — J-логика и L — конечно аксиоматизируемая логика, содержащая L_0. Говорим, что L *различима над* L_0, если существует алгоритм, проверяющий включение $L_0 + A \geq L$ для любой формулы A. Логика L — *узнаваема над* L_0, если существует алгоритм, проверяющий по любой конечной системе аксиом Ax равенство $L_0 + Ax = L$.

Доказано, что различимость и узнаваемость в гибридных логиках сводится к различимости (соответственно, узнаваемости) напарников:

Теорема 1. *Пусть L – гибридная логика.*
(1) Если L_{int} различима над Int, *а L_{neg} над* Neg, *то L различима над* Hyb.
(2) Если L различима над Hyb, *то L_{int} различима над* Int, *и L_{neg} над* Neg.
(3) L_{int} узнаваема над Int, *а L_{neg} над* Neg $\iff$ *L узнаваема над Hyb.*

Рассмотрим различные варианты интерполяционного свойства и свойства Бета. Доказано, что интерполяционные свойства гибридной логики сводятся к интерполяционным свойствам ее негативного и интуиционистского напарников:

Теорема 2. *Пусть L – гибридная логика. Тогда L имеет CIP, IPR или PBP если и только если оба напарника L_{int} и L_{neg} имеют то же свойство.*

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект 0314-2019-0002).

Список литературы

[1] Odintsov S. Constructive negations and paraconsistency. Series: Trends in Logic, Vol. 26. Springer, Dordrecht, 2008, 242 p.
[2] Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Узнаваемые логики. Алгебра и логика. 2015. Т. 52(2). С. 252–274.
[3] Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Сильная разрешимость и сильная узнаваемость. Алгебра и логика. 2017. Т. 56(5). С. 559–581.
[4] Максимова Л. Л. Узнаваемые и различимые логики и многообразия. Алгебра и логика. 2017. Т. 56(3). С. 367–374.

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск
E-mail: lmaksi@math.nsc.ru, yun@math.nsc.ru

Глобально допустимые правила WCP-логик.

В. В. Римацкий

Говорим, что финитно аппроксимируемая логика λ, расширяющая логику $S4$, имеет *слабое свойство ко-накрытий*, если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathcal{F}$ и произвольной нетривиальной антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $\mathcal{F}$, фрейм $\mathcal{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного рефлексивного ко-накрытия ко фрейму $\bigcup_{c\in\mathcal{X}^R} c^R$, также является λ-фреймом. Логики, обладающие этим свойством будем далее называть *WCP-логиками.*

Говорим, что правило r *глобально допустимо в логике* L, если r допустимо во всех фининто аппроксимируемых логиках, расширяющих логику L. Набор правил вывода $\mathcal{R}$ называется *базисом глобально допустимых правил логики* L, если (i) каждое правило из $\mathcal{R}$ глобально допустимо в L; (ii) любое глобально допустимое в L правило выводится из $\mathcal{R}$ во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих L. Базис $\mathcal{R}$ глобально допустимых в L правил называется *независимым*, если $\forall\ \lambda(\supseteq L)\ \forall\ q\in\mathcal{R}\quad(\mathcal{R}-\{q\}\not\vdash_\lambda q)$ (т.е. независим во всех логиках $\lambda\supseteq L$). Аналогичным образом определяем *WCP-глобально допустимые правила* и *базис* для WCP-глобально допустимых правил, если рассматриваем только WCP-логики, расширяющие логику L.

Теорема 1. *Правило вывода r допустимо во всех финитно аппроксимируемых WCP-логиках, расширяющих $S4$, т.е. WCP-глобально допустимо в $S4$ $\iff$ r допустимо во всех табличных WCP-логиках, расширяющих $S4$, т.е. WCP-таблично допустимо над $S4$.*

Для всех чисел $n>1,\ 1\le i,j\le n;\ n\in N$, определим формулы:

$$\pi_i := p_i \wedge \bigwedge_{j\neq i}\neg p_j;\quad A_n := \bigwedge_{1\le i\le n}\Diamond\pi_i;$$
$$A_{n,1} := \Box\big[\bigwedge_{1\le i\le n}(p_i\to\neg\Diamond q)\big];\quad B := q\vee\neg\Diamond q.$$

Определим также последовательность правил вывода:

$$\mathcal{R}_1 := \frac{\Diamond p\wedge\Diamond\neg p}{p\wedge\neg p};\qquad \mathcal{R}_n := \frac{\Box\big(A_{n,1}\wedge\neg(A_n\wedge B)\big)}{\Box\neg A_n};\ n=2,3,\ldots.$$

Теорема 2. *Правила $\mathcal{R}_n,\ n\ge1$, допустимы в любой финитно аппроксимируемой логике λ, расширяющей $S4$, имеющей слабое свойство ко-накрытий, т.е. WCP-глобально допустимы в $S4$.*

Теорема 3. *Множество правил $\{\mathcal{R}_n,\ n\in N\}$, образует независимый базис правил вывода, WCP-глобально допустимых над $S4$.*

Сибирский Федеральный университет, Красноярск
E-mail: Gemmeny@rambler.ru

О свойствах α-пополнения системы трехзначной логики, состоящей из функции Вебба

Л. В. Шабунин

Пусть P_3 — множество всех функций трехзначной логики, X — множество символов переменных со значениями из $E_3 = \{0, 1, 2\}$, $F \subseteq P_3$ — непустое множество функций. Определим по индукции понятие *α-терма над F от множества переменных X*:

1) переменная x из X есть α-терм;

2) если символ f обозначает n-местную функцию из F ($n \geq 1$), Φ есть α-терм и x_2, ..., x_n — переменные из X (не обязательно различные), то $f(\Phi, x_2, \ldots, x_n)$ есть α-терм.

Если α-терм не является переменной, то он называется *α-формулой* (см. [**1**]).

Множество всех функций из P_3, реализуемых α-формулами над F, называется *α-пополнением* множества F и обозначается через $[F]_\alpha$. Если $[F]_\alpha = P_3$, то F называется *α-полной системой.* Вопросы α-полноты для k-значной логики рассматривались в работах [1]–[6].

Пусть $V_3(x, y) = \max(x, y) + 1$ — функция Вебба из P_3, $F = \{V_3\}$, $F' = [F]_\alpha$, $F'(n)$ — множество n-местных функций из F', $F'' = [F']_\alpha$, $|M|$ — мощность множества M.

Предложение. $|F'(1)| = 6$, $|F'(2)| = 264$, $|F'(3)| = 297600$.

Теорема. *Множество F'' содержит все одноместные и двуместные функции из P_3.*

Вопрос о равенстве $F'' = P_3$ остается открытым.

Список литературы

[1] Глухов М. М. Об α-замкнутых классах и α-полных системах функций k-значной логики. Дискретная математика. 1989. Т. 1(1). С. 16–21.

[2] Чернышов А. Л. Условия α-полноты систем функций многозначной логики. Дискретная математика. 1992. Т. 4(4). С. 117–130.

[3] Шабунин А. Л. Примеры α-полных систем k-значной логики при $k = 3, 4$. Дискретная математика. 2006. Т. 18(4). С. 45–55.

[4] Шабунин А. Л. Об α-суперпозиции функций k-значной логики. Сиб. матем. журнал. 2007. Т. 48(2). С. 441–457.

[5] Шабунин А. Л. О свойствах α-пополнений одной системы трехзначной логики // Тезисы докладов международной конф. “Мальцевские чтения”, Новосибирск, Институт математики СО РАН, 11-15 ноября 2013 г. Новосибирск, 2013. С. 56.

[6] Шабунин Л. В. Об α-глубине системы трехзначной логики, состоящей из одной функции Вебба // Тезисы докладов международной конф. “Мальцевские чтения”, Новосибирск, Институт математики СО РАН, 16–20 ноября 2020 г. Новосибирск, 2020. С. 113.

Чебоксары
E-mail: lvsh@mail.ru

Axiomatizing origami planes

L. Beklemishev

We provide a variant of an axiomatization of elementary geometry based on logical axioms in the spirit of Huzita–Justin axioms for the origami constructions. We isolate the fragments corresponding to natural classes of origami constructions such as Pythagorean, Euclidean, and full origami constructions. The set of origami constructible points for each of the classes of constructions provides the minimal model of the corresponding set of logical axioms.

Our axiomatizations are based on Wu's axioms for orthogonal geometry and some modifications of Huzita–Justin axioms. We work out bi-interpretations between these logical theories and theories of fields as described in J.A. Makowsky (2018). Using a theorem of M. Ziegler (1982) which implies that the first order theory of Vieta fields is undecidable, we conclude that the first order theory of our axiomatization of origami is also undecidable.

Joint work with A. Dmitrieva and J. Makowsky.

References

[1] Makowsky J. A. The Undecidability of Orthogonal and Origami Geometries. In: International Workshop on Logic, Language, Information, and Computation. Springer, 2018. P. 250–270

[2] Ziegler M. Einige unentscheidbare Körpertheorien, In E. Engeler, H. Läuchli, V. Strassen (eds.) Logic and Algorithmic, An international Symposium held in honour of E. Specker. L'enseignement mathématique, 1982. P. 381–392.

[3] Beklemishev L., Dmitrieva A., Makowsky J. A. Axiomatizing origami planes. ArXiv: 2012.03250, 32 pp.

Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow
E-mail: bekl@mi-ras.ru

Moisil's modal logic and related systems

S. Drobyshevich, S. Odintsov, H. Wansing

In 1942 [**2**], G. Moisil developed a series of modal logics motivated by—at the time—quite novel considerations. As it turns out these logics are closely connected to some now well-known non-classical logics. The aim of this talk is to shed some light on Moisil's work, outline these connections and to supplement formal proofs to some facts Moisil seems to have envisioned.

The novelty of Moisil's approach was to associate a logic not with a single matrix but with a class of algebraic systems, namely, the class of *bi-residuated lattices*, which contain residual operations with respect to both the join (represented by the implication connective) and the meet (represented by the *difference* connective) operations. This system, which we denote here BiM, turns out to be equivalent to C. Rauszer's logic HB [**4**], which, in turn, is a conservative extension of intuitionistic logic with the difference connective. In this way Moisil has anticipated by more than thirty years the development of bi-intuitionistic logic. This logic is also related to Dummett's linear logic and to Gödel-Smetanich (*here-and-there*) logic via its *special* and *three-valued* extensions, respectively. Finally, Moisil has shown that three-valued Łukasewicz logic $Ł_3$ can be defined within the three-valued BiM-extension.

The modal aspect of Moisil's [**2**] comes in the form of the *general modal logic* GML, which conservatively extends BiM with operators η (*impossibility*), γ (*contingency*), μ (*possibility*), and ν (*necessity*) definable via implication and difference connectives. This logic makes clear how different Moisil's view of modalities was compared to the modern one. Motivated by this fact we compare Mosil's approach to modal logic with those by J. Łukasiewicz and K. Došen.

The final logic from [**2**] we are interested in is the *general symmetric modal logic* GSML, which is obtained by adding to GML an involutive and contrapositive negation motivated by the properties of Łukasiewicz's negation. As Moisil himself pointed out, the difference connective becomes definable via negation and implication in GSML, illuminating the connection of GSML to both Heyting-Ockham logic N^* and the logic $HYPE$ [**1**]. These connections were already discussed in [**3**] and we elaborate on them here.

References

[1] Leitgeb H. HYPE: A System of Hyperintensional Logic (with an Application to Semantic Paradoxes) // Journal of Philosophical Logic. 2019. Vol. 48. P. 305–405.

[2] Moisil G. C. Logique modale // Disquisitiones Mathematicae et Physicae. 1942. Vol. 2. P. 3–98.

[3] Odintsov S., Wansing H. Routley star and hyperintensionality // Journal of Philosophical Logic. 2021. Vol. 50. P. 33–56.

[4] Rauszer C. A formalization of the propositional calculus of H-B logic // Studia Logica. 1974. Vol. 33. P. 23–34.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: drobs@math.nsc.ru, odintsov@math.nsc.ru
Ruhr University, Bochum (Germany)
E-mail: heinrich.wansing@rub.de

On modal counterparts for special $\mathbf{N4}^{\perp}$-extensions

S. Odintsov, A. Vishneva

In [**1**], it was proved that an analog τ of Goedel-Tarski translation T faithfully emdeds paraconsistent Nelson's logic $\mathbf{N4}^{\perp}$ with strong negation $\sim$ into logic **BS4**, the Belnapian analog of normal modal logic **S4**. Notice that the restriction of τ to $\sim$-free fragment of the language coincides with T and that $\sim$ does not commute with τ.

Modal counterparts of $\mathbf{N4}^{\perp}$-extensions (see [**2**]) in the class of **BS4**-extensions are defined similarly to modal counterparts of superintuitionistic logics, but we use translation τ instead of Goedel-Tarski translation.

There are four families of *special* $\mathbf{N4}^{\perp}$-extensions:

$$\eta(L) = \mathbf{N4}^{\perp} + L, \quad \eta^3(L) = \eta(L) + \{\sim p \to (p \to q)\},$$
$$\eta^n(L) = \eta(L) + \{\neg\neg(p \vee \sim p)\}, \quad \eta^{\circ}(L) = \eta^3(L) + \{\neg\neg(p \vee \sim p)\},$$

where L is a superintuitionistic logic and $\neg\varphi$ abbreviates $\varphi \to \bot$. Special logics of the form $\eta^3(L)$ are called *explosive*. *Normal* special logics are those of the form $\eta^n(L)$. It is known that every superintuitionistic logic has the least modal counterpart. Now we can prove an analog of this result only for special $\mathbf{N4}^{\perp}$-extensions.

Theorem. *Let L be a special $\mathbf{N4}^{\perp}$-extension. The logic* $\mathbf{BS4} + \{\tau\varphi \mid \varphi \in L\}$ *is the least modal counterpart of L in the class of* **BS4**-*extensions.*

We demonstrate also that modal counterparts of explosive special logics need not be explosive, and that modal counterparts of normal special logics need not be complete. A **BS4**-extension is called *complete* if $p \vee \sim p \in L$. Complete logics are analogs of normal logics in the class of **BS4**-extensions.

References

[1] Odintsov S., Wansing H. Modal logics with Belnapian truth values // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2010. Vol. 20. P. 279–301.

[2] Kaushan K. Modal counterparts of Nelson's logics. Master Dissertation, Novosibirsk State University, 2019.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk; Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: odintsov@math.nsc.ru, a.vishneva@g.nsu.ru

The logic induced by effect algebras with $\sqrt{\prime}$

K. V. Shishov

Quantum logic originally started as an algebraic structure of a set of projective operators in Hilbert space. This structures were later called orthomodular lattices, which were actively investigated. However, most of the attempts to build any adequate logic on the basis of this lattice for various reasons were unsuccessful.

The effect algebras appears in the 90s thanks to D.Foulis and M.Bennett [**3**]. The effect algebras is to be a generalisation of many important for quantum physics and quantum logics algebraic structures, including orthomodular lattices.

Investigations in the field of residual effect algebras appeared to be the most attractive area for modern quantum logicians. This research would will make possible to connect quantum logic with other substructural logics.

Logic of Lattice Effect algebras was introduced in [**1**] and [**4**] as logic of residuated lattice effect algebras. The main feature of these logics is the presence of a logical connective of implication, which is unambiguously can be expressed as Sasaki arrow (or Sasaki projection) with good properties. The introduction of an implication with deductive properties and good axiomatisability of Lattice Effect algebras Logic became possible only thanks to a well-constructed residual algebra of effects.

In this work we extend the residueted effect algebra and their logic by the unary operation $\sqrt{\prime}$. This operation is defined as an operation, double application of which corresponds to involution operation $\prime$. $\sqrt{\prime}$ has an essential role in new direction of quantum logic - quantum computational logic [**2**] . Also we will report our own result of researching the properties of the logic induced by effect algebras with $\sqrt{\prime}$.

The study was implemented in the framework of the Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE University) in 2021.

References

[1] Chajda I., Halas R., Langer H. The logic induced by effect algebras // Soft Comput. 2020. Vol. 24. P. 14275–14286.

[2] Dalla Chiara M. L., Giuntini R., Greechie R. Reasoning in Quantum Theory. Kluwer, Dordrecht, 2004.

[3] Foulis D. J., Bennett M. K. Effect algebra and unsharp quantum logic // Foundations of Physics. 1994. Vol. 24(10). P. 1331–1352.

[4] Rafee Rad S., Sharafi A. H., Smets S. A. Complete axiomatisation for the logic of lattice effect algebra // Int J. Theor. Phys. 2021. Vol. 60. P. 696–709.

HSE University, Moscow
E-mail: shishov.k.w@gmail.com

Another Π^0_1-boundedness argument for infinitary action logic

S. O. Speranski

Let ACT_ω denote infinitary action logic. It corresponds to so-called $*$-*continuous action lattices*, and may be given by a suitable infinitary sequent calculus (see [**1, 3**] for details). W. Buszkowski proved in [**1**] that the derivability problem for ACT_ω is Π^0_1-hard. Next, using some specific syntactic machinery, E. Palka showed in [**3**] that the above problem is Π^0_1-bounded, and hence Π^0_1-complete.

I shall present a somewhat simpler and more general argument for the Π^0_1-boundedness result. Notice that the new argument can also be applied to the expansion of ACT_ω obtained by adding subexponentials for weakening and exchange (but not for contraction, which is a crucial point), as well as to other calculi of a certain sort.

This talk is based on joint work with Stepan L. Kuznetsov; see [**2**].

References

[1] Buszkowski W. On action logic: equational theories of action algebras // Journal of Logic and Computation. 2007. Vol. 17(1). P. 199–217.

[2] Kuznetsov S. L., Speranski S. O. Infinitary action logic with exponentiation // 2021. Preprint available at arXiv: 2001.06863v3.

[3] Palka E. An infinitary sequent system for the equational theory of $*$-continuous action lattices // Fundamenta Informaticae. Vol. 78. P. 295–309.

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow
E-mail: katze.tail@gmail.com

V. Секция «Теория вычислимости»

О нумерациях классических систем

Р. Н. Дадажанов, С. К. Джавлиев, Н. Х. Касымов

Для нумерации ν через $ker(\nu)$ будем обозначать нумерационную эквивалентность, которую, для краткости, назовем ядром ν.

Определение 1. *Универсальная алгебра называется представимой над эквивалентностью η, если существует ее нумерация с ядром η.*

Определение 2. *Эквивалентность η называется m-эквивалентностью (равномерной m-эквивалентностью), если существует такое семейство F вычислимых функций (перечислимое семейство F вычислимых функций), индуцирующих перестановки фактор-множества ω/η, что для всякой пары натуральных чисел x, y найдется такая функция $f \in F$, которая m-сводит класс x/η к классу y/η.*

Теорема 1. *Если (G, ν) – нумерованная группа, то ядро $ker(\nu)$ ее нумерации – равномерная m-эквивалентность.*

Следствие 1. *Ни над какой предполной эквивалентностью не представима никакая группа.*

Теорема 1 порождает два естественных вопроса:

– насколько велик класс равномерных m-эквивалентностей?

– является ли условие равномерности для m-эквивалентности достаточным для представимости над ней группы?

Предложение 1. *Для любой вычислимой перестановки f без конечных циклов, разбивающей ω на бесконечное число орбит, существует континуум таких равномерных m-эквивалентностей, для которых вычислимое семейство $F_f = \{f^n | n \in Z\}$ является m-сводящим.*

Предложение 2. *Существует вычислимая перестановка, являющаяся m-сводящей для такой равномерной m-эквивалентности, над которой не представима никакая группа.*

Отметим, что алгоритмическая сложность эквивалентности из предложения 2 находится в классе Π^0_2; более точно, она является эффективно T_1-отделимой, но не хаусдорфовой.

Определение 3. *Универсальная алгебра называется трансляционно полной, если всякая пара различных ее элементов переводится в любую другую пару различных элементов подходящей трансляцией.*

Классический пример трансляционно полной алгебры – любое тело.

Теорема 2. *Над любой негативной эквивалентностью представима трансляционно полная универсальная алгебра.*

Если трансляционно полная алгебра представима над позитивной эквивалентностью, то эта эквивалентность разрешима, что свидетельствует о более богатых возможностях негативных эквивалентностей относительно позитивных с точки зрения представимости над ними богатых классов систем.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент (Узбекистан)
E-mail: dadajonovrn@mail.ru;sarvar.javliyev@mail.ru; nadim59@mail.ru

Низкие линейные порядки имеющие вычислимые копии

М. В. Зубков

К. Джокуш и Р. Соар [**1**] построили низкий линейный порядок, не имеющий вычислимой копии (на самом деле, они построили такой порядок в каждой ненулевой перечислимой степени). С другой стороны, Р. Доуни и М. Мозес [**2**] доказали, что каждый низкий дискретный линейный порядок имеет вычислимую копию (линейный порядок является дискретным, если он не содержит предельных элементов). Из этих результатов естественно возник вопрос (а по сути целая программа исследований), который был поставлен в 1998 году в обзорной работе Р. Доуни [**3**]: описать порядковые свойства P такие, что для любого низкого линейного порядка L из выполнимости $P(L)$ следует существование вычислимого представления L.

В данной работе было найдено новое такое свойство $P(L)$. Напомним, что если $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ перечисление (возможно с повторениями) некоторого множества, то линейный порядок вида $\eta + a_0 + \eta + a_1 + \eta + a_2 + \eta + \ldots$ называется η-представлением множества A.

Теорема. *Если низкий линейный порядок имеет вид $\mathcal{L} + \omega^*$, где $\mathcal{L}$ является η-представлением некоторого множества, то он имеет вычислимую копию.*

Кроме того получена оценка сложности изоморфизма между низкой и вычислимой копиями.

Теорема. *Если $\mathcal{L}'$ является η-представлением некоторого множества, то для низкого порядка $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \omega^*$ существует Δ^0_3-изоморфный ему вычислимый линейный порядок. Существует низкий порядок вид $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \omega^*$ не являющийся Δ^0_2-изоморфным никакому вычислимому порядку.*

Работа автора частично поддержана грантом РФФИ 20-31-70012.

Список литературы

[1] Jockusch C. G., Soare R. I., Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings, Annales of Pure and Applied Logic, 52 (1991), 39–61.
[2] Downey R. G., Moses M. F., On Choice Sets and Strongly Non-Trivial Self-Embeddings of Recursive Linear Orders, Mathematical Logic Quarterly, 35 (1989), 237–246.
[3] Downey R. G., Computability Theory and Linear Orderings, in Handbook of Recursive Mathematics V. 2., eds. Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., and Remmel J. B., with Marek V. W. (Elsevier, Amsterdam, 1998), 823–976.

Казанский федеральный университет, Казань
E-mail: maxim.zubkov@kpfu.ru

К проблеме вхождения в изоляторы централов

И. В. Латкин

Напомним, что изолятором подгруппы H называется множество всех таких элементов группы, подходящая степень которых попадает в H. В нильпотентной группе G для любого централа $\gamma_j G$ (т.е. члена нижнего центрального ряда) его изолятор $I(\gamma_j G)$ (называемый далее γ_j-изолятором) — нормальная подгруппа.

В [**1, 2**] изучалась проблема вхождения в γ-изоляторы для вычислимых групп и вопросы о вычислимости факторов по этим подгруппам:

Теорема 1. [**1, 2**] *Для любого набора $\hat{e} = \langle e_2, \ldots, e_n \rangle$ вычислимо перечислимых тьюринговых степеней найдётся нильпотентная ступени n группа без кручения $G(\hat{e})$, у которой при некоторой вычислимой нумерации β сложность проблемы вхождения в γ_j-изолятор равна e_j для $2 \leqslant j \leqslant n$. Более того, при любой вычислимой нумерации этой группы для $3 \leqslant j \leqslant n$ сложность проблемы вхождения в γ_j-изолятор не меньше e_j, а фактор группа всей группы по такому изолятору $G(\hat{e})/I(\gamma_j G(\hat{e}))$ вычислима тогда и только тогда, когда $e_j = 0$.*

Отсюда следует известный результат: существуют не вычислимые позитивно нумерованные нильпотентные группы без кручения. В то же время, если $\langle G, \mu \rangle$ — позитивно нумерованная нильпотентная группа без кручения, то все фактор группы вида $\gamma_j G/(I(\gamma_{j+1} G) \cap \gamma_j G)$ и $I(\gamma_j G)/I(\gamma_{j+1} G)$ — позитивно нумеруемые абелевы группы без кручения, а потому и вычислимые [**3**], здесь $1 \leqslant j \leqslant n$ и $I(\gamma_1 G) = \gamma_1 G = G$.

Применяя некоторые технические приёмы из [**4**], удаётся несколько усилить вторую часть теоремы 1:

Теорема 2. *Для любого набора $\hat{e} = \langle e_2, \ldots, e_n \rangle$ вычислимо перечислимых тьюринговых степеней найдётся не автоустойчивая нильпотентная ступени n группа без кручения $G(\hat{e})$, у которой при любой вычислимой нумерации для $3 \leqslant j \leqslant n$ сложность проблемы вхождения в γ_j-изолятор равна e_j, а фактор группа по такому изолятору $G(\hat{e})/I(\gamma_j G(\hat{e}))$ вычислима тогда и только тогда, когда $e_j = 0$.*

Список литературы

[1] Латкин И. В., Проблема вхождения в изоляторы членов нижнего центрального ряда, Тез. докл. междунар. научн. конф. Мальцевские чтения, Новосибирск, Россия (2016), 54.

[2] Латкин И. В., Мархабатов Н. Д., Сложность изоляторов нижнего центрального ряда в вычислимых нильпотентных группах // Математический журнал, Институт математики и математического моделирования, Алматы, 18:1 (2018), 111–125.

[3] Хисамиев Н. Г. Иерархии абелевых групп без кручения, Алгебра и логика, 25:2 (1986), 205–226.

[4] Гончаров С. С., Молоков А. В., Романовский Н. С., Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности, Сиб.мат.журн., 30:1 (1989), 82–88.

Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск (Казахстан)
E-mail: lativan@yandex.ru

О фридберговых нумерациях

С. С. Оспичев

Р. М. Фридберг в 1958 году показал, что семейство всех одноместных частично вычислимых функций обладает вычислимой нумерацией без повторений. Данный результат породил целое направление исследований в теории нумераций. Было получено множество результатов, исследующих существование и количество однозначных нумераций семейств различных объектов, а также их связь с другими вычислимыми нумерациями. В 1997 году С. С. Гончаровым и А. Сорби в статье «Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса» был предложен подход к изучению вычислимых характеризаций для классов алгебраических структур, в частности, рассматривать нумерации, обладающие той или иной алгоритмической сложностью (так называемые, Г-*вычислимые нумерации*). Теория фридберговых нумераций нашла свое продолжение для различных Г: арифметической и аналитической иерархий, иерархии Ершова и т.д.

В докладе будут представлены недавние результаты автора об обобщенно вычислимых фридберговых нумерациях.

Институт Математики им.С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: ospichev@math.nsc.ru

Об обобщенно вычислимых нумерациях

Ф. Ракымжанкызы, Б. С. Калмурзаев, Н. А. Баженов

Нумерация ν называется *A-вычислимой*, если множество $\{(x,y) : y \in \nu(x)\}$ является вычислимо перечислимым относительно A. Говорим, что нумерация ν *сводится* к нумерации μ, если существует вычислимая функция $f(n)$, такая что $\nu(n) = \mu(f(n))$ для любого $n \in \mathbf{N}$ [**1**]. Если ν и μ — A-вычислимые нумерации семейства $\mathcal{S}$, то говорят, что μ является *минимальным накрытием* ν, если $\nu \leq \mu$, $\mu \not\leq \nu$ и для любой A-вычислимой нумерации γ верно $\nu \leq \gamma \leq \mu \to \gamma \equiv \nu \vee \gamma \equiv \mu$.

В работе [**2**] было приведено два простых признака существования минимальных накрытий.

Теорема 1 [**2**]**.** *Если нумерация не является $\mathbf{0}'$-главной, тогда для нее существует минимальное накрытие.*

Теорема 2 [**2**]**.** *Если для нумераций $\nu \in \mathrm{Com}_n^0(S)$ существует $\mathbf{0^{(n-1)}}$-вычислимая всюду определенная диагональная функция, тогда для ν в $\mathcal{R}_n^0(S)$ существует минимальное накрытие.*

В данной работе исследуется условии существования минимальных накрытии. В частности, доказывается что достаточные условии Бадаева и Подзорова не являются необходимыми.

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{0}' \leq_T A$. Существует A-вычислимая семейство $\mathcal{S}$ такое, что для всех $\nu \in \mathrm{Com}^A(\mathcal{S})$ выполнено*

(1) *ν не имеет A-вычислимую диагональную функцию;*

(2) *существует $\mu \in \mathrm{Com}^A(\mathcal{S})$ который является минимальным накрытием для ν.*

Список литературы

[1] Ершов Ю. Л., Теория нумераций. М.: Наука. 1977.

[2] Бадаев С. А., Подзоров С. Ю. Минимальные накрытия в полурешетках Роджерса Σ_n^0-вычислимых нумераций, Сиб.мат.жур., 43:4 (2002), 769–778.

Казахстанско-Британский технический университет, Алматы (Казахстан)
E-mail: fariza.rakymzhankyzy@gmail.com
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы (Казахстан)
E-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru

Обобщенно вычислимые нумераций эффективно дискретных семейств

Ф. Ракымжанкызы, Б. С. Калмурзаев, Н. А. Баженов, А. А. Исахов

Пусть ν и μ — вычислимые нумерации. Будем говорить, что нумерация ν *сводится* к нумерации μ, если $\nu = \mu \circ f$ для некоторой вычислимой функции f. Назовём нумерацию ν семейства $\mathcal{S}$ A-*вычислимой*, если её универсальное множество $\{(x, n) : x \in \nu(n)\}$ является A-вычислимо перечислимым. Нумерация ν семейства S является *универсальной*, если $\beta \leq \nu$ для всех $\beta \in \mathrm{Com}^A(S)$ [**1**]. Если отображение $\nu \colon \omega \to S$ является взаимно однозначной, то нумерация ν называется *фридберговой*.

Семейство всюду определенных функции $\mathcal{A}$ называется A-*эффективно дискретной*, если существует A-вычислимая последовательность начальных сегментов $\{\sigma_i\}_{i\in\omega}$ такое, что

(1) $(\forall f \in \mathcal{A})(\exists i)[\sigma_i \subset f]$;
(2) $\sigma_i \subseteq \sigma_j \to \sigma_i = \sigma_j$;
(3) $\sigma_i \subset f_j \in \mathcal{A}\ \&\ \sigma_i \subset f_k \in \mathcal{A} \to f_j = f_k$.

В данной работе исследуются существования обобщенно вычислимых универсальных и фридберговых нумерации эффективно дискретных семейств. В работе [**2**], [**3**] были доказаны различные результаты. Получены следующие результаты:

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{F}$ — бесконечное A-вычислимо эффективно дискретное семейство всюду определенных функции и A — гипериммунно-свободна, тогда семейство $\mathcal{F}$ имеет универсальную A-вычислимую нумерацию.*

Теорема 1. *Пусть A — не вычислимое множество. Если семейство $\mathcal{F}$ имеет A-вычислимую фридбергово нумерацию, тогда $\mathcal{F}$ имеет бесконечно много попарно не сравнимых A-вычислимых фридберговых нумерации.*

Список литературы

[1] Гончаров С. С., Сорби А., Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешётки Роджерса, Алгебра и логика, 36:6 (1997), 621–641.

[2] Issakhov A. A., Rakymzhankyzy F, Friedberg numberings with a hyperimmune oracle, Herald of the Kazakh-British Technical University, 16:1 (2019), 68–72.

[3] Issakhov A. A., Rakymzhankyzy F., Ostemirova U., Infinite families of total functions with principal numberings. Herald of the Kazakh-British Technical University (preprint).

Казахстанско-Британский технический университет, Алматы (Казахстан)
E-mail: fariza.rakymzhankyzy@gmail.com
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы(Казахстан)
E-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com
Институт математики им.С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru
Казахстанско-Британский технический университет, Алматы (Казахстан)
E-mail: a.isakhov@kbtu.kz

Об отсутствии $(0,1)$-решений у системы уравнений

А. В. Селиверстов

Для многих задач распознавания известные алгоритмы имеют высокую вычислительную сложность в худшем случае, однако существуют так называемые генерические алгоритмы, работающие без ошибок и быстро принимающие или отвергающие почти любой вход, но уведомляющие об отказе от решения на малой доле входов [**1, 2**].

Задача. *Даны $m \times n$ матрица A и вектор $\mathbf{b}$ с целыми коэффициентами. Имеет ли система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ некоторое $(0,1)$-решение?*

Когда все элементы $m \times n$ матрицы A и вектора $\mathbf{b}$ неотрицательные, метод динамического программирования позволяет перечислить все $(0,1)$-решения системы неравенств $A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$. При $m > 13\log_2 n$ и некоторых предположениях о распределении коэффициентов, среднее число $(0,1)$-решений полиномиально ограничено, следовательно, эти решения легко найти. Доказательство, которое предложил Н. Н. Кузюрин [**3**], основано на оценке хвостов биномиального распределения. Если же система неравенств имеет мало $(0,1)$-решений, легко выбрать те решения, на которых неравенства обращаются в равенства.

Новый метод уточняет структуру множества трудных входов и свободен от предположения о неотрицательности коэффициентов.

Теорема. *Пусть целое число q равно степени простого числа. Для каждого такого q существуют сублинейная функция $s_q(n) = o(n)$ и генерический алгоритм полиномиального времени, который для всех положительных целых чисел t, m и $n = 1 + q + \cdots + q^t$, удовлетворяющих неравенству $m > n - \sqrt{q(q+1)n - s_q(n)}$, и для почти каждого набора из m линейных форм $\ell_j(x_0, \cdots, x_{n-m})$, где $j > n - m$, допускает лишь такой вход, для которого не существует $(0,1)$-решения системы уравнений $x_j = \ell_j(1, x_1, \cdots, x_{n-m})$. Более того, для указанных n и m существует такой отличный от константы многочлен степени $O(\sqrt{n^{q+1}})$ от коэффициентов линейных форм ℓ_j, что, если алгоритм не принимает и не допускает вход, то этот многочлен обращается в нуль.*

Случай $q = 1$ был рассмотрен ранее [**2**].

Список литературы

[1] Рыбалов А. Н., О генерической сложности проблемы о сумме подмножеств для полугрупп целочисленных матриц, Прикладная Дискретная Математика, 50 (2020), 118–126.

[2] Селиверстов А. В., Двоичные решения для больших систем линейных уравнений, Прикладная Дискретная Математика, 52 (2021), 5–15.

[3] Кузюрин Н. Н., Полиномиальный в среднем алгоритм в целочисленном линейном программировании, Сибирский Журнал Исследования Операций, 1:3 (1994), 38–48.

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, Москва
E-mail: slvstv@iitp.ru

Primitive recursive algebraic systems of different signatures

A. E. Alaev

Let $\mathfrak{A}$ be a structure of finite signature L. We say that $\mathfrak{A}$ is a primitive recursive (p.r.) structure if its universe $A \subseteq \omega$ is a p.r. set and all functions and predicates in L are p.r. on A. We say that $\mathfrak{A}$ is a punctual structure if it is p.r. and A is an initial segment of ω.

Let $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ be two isomorphic structures, where $A, B \subseteq \omega$. They are primitive recursively isomorphic, $\mathfrak{A} \cong_{\mathrm{pr}} \mathfrak{B}$, if there exists an isomorphism $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ s.t. f, f^{-1} are p.r.f. We write that $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\mathrm{pr}} \mathfrak{B}$ if there is a p.r. isomorphism $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. It is known that if $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\mathrm{pr}} \mathfrak{B}$ and $A = \omega$ then there exists a punctual structure $\mathfrak{C} \cong_{\mathrm{pr}} \mathfrak{B}$.

Theorem 1. Suppose that $\mathfrak{A} = (A, \cdot, ^{-1})$ is a group and the structure $(A, \cdot)$ is p.r. Then there exists a p.r. structure $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{B} \preccurlyeq_{\mathrm{pr}} \mathfrak{A}$.

Theorem 2. Suppose that $\mathfrak{A} = (A, \cdot, ^{-1})$ is an Abelian group and the structure $(A, \cdot)$ is p.r. Then there exists a p.r. structure $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\mathrm{pr}} \mathfrak{B}$.

Theorem 3. Suppose that $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, -)$ is an associative ring and the structure $(A, +, \cdot)$ is p.r. Then there exists a p.r. structure $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\mathrm{pr}} \mathfrak{B}$.

Theorem 4. Suppose that $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, -)$ is an associative ring and the structure $(A, +, \cdot)$ is p.r. Then there exists a p.r. structure $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\mathrm{pr}} \mathfrak{B}$.

In theorems 2,3,4 we can replace p.r. structures by punctual structures.

Proposition 1. Let $\mathfrak{A} = (A, +, -)$ be a p.r. non-zero torsion-free Abelian group. Then there exists a p.r. structure $\mathfrak{B} = (B, +)$ s.t. $\mathfrak{B} \cong (A, +)$ and the operation $x \mapsto -x$ is not p.r. in $\mathfrak{B}$.

Proposition 2. Let $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, -, ^{-1})$ be a p.r. field which is not locally finite. Then there exists a p.r. structure $\mathfrak{B} = (B, +, \cdot, -)$ s.t. $\mathfrak{B} \cong (A, +, \cdot, -)$ and the operation $x \mapsto x^{-1}$ is not p.r. in $\mathfrak{B}$.

Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk
E-mail: alaev@math.nsc.ru

Computable Stone spaces

N. Bazhenov, M. Harrison-Trainor, A. Melnikov

Following the works [**1, 2**], we investigate computable metrizability of Polish spaces *up to homeomorphism*. We use Stone duality to construct the first known example of a Polish space M such that M is a computable topological space, but M is not homeomorphic to a computably metrized space.

An *effectively compact presentation* of a Polish space M is a computable metrization of M equipped with an effective enumeration $\{(B^i_0, B^i_1, \dots, B^i_{n_i})\}_{i\in\omega}$ of all finite open covers of M, which consist of basic open balls with rational radii. We say that an effectively compact Polish space M is *effectively categorical* if for any pair of effectively compact X and Y homeomorphic to M, there is an effectively continuous surjective homeomorphism from X onto Y. We prove that effectively categorical Stone spaces are precisely the duals of computably categorical Boolean algebras.

Let X be a separable Stone space, and let $C(X;\mathbb{R})$ be the Banach space of continuous functions $X \to \mathbb{R}$. We prove that the following conditions are equivalent:

(1) $C(X;\mathbb{R})$ has a presentation as a computable Banach space;

(2) X is computably metrizable.

References

[1] Harrison-Trainor M., Melnikov A., and Ng K. M., Computability of Polish spaces up to homeomorphism, Journal of Symbolic Logic, 85:4 (2020), 1664–1686.

[2] Hoyrup M., Kihara T., Selivanov V., Degree spectra of homeomorphism types of Polish spaces, arXiv:2004.06872

[3] Bazhenov N., Harrison-Trainor M., Melnikov A., Computable Stone spaces, arXiv:2107.01536

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru
University of Michigan, Ann Arbor (USA)
E-mail: matthhar@umich.edu
Victoria University of Wellington, Wellington (New Zealand)
E-mail: alexander.g.melnikov@gmail.com

Degree spectra of computable functions on $(\omega, <)$

N. Bazhenov, D. Kaloci\'nski, M. Wrocławski

Existing results provide some insights into obtaining computable, c.e. or Δ_2 degrees as a spectrum of a total *unary* recursive function on natural numbers with standard ordering [**1, 2**]. These results, however, fall far short from the full classification of such functions in terms of degree spectra. In this talk, we briefly discuss the current state of knowledge and new results in this direction.

We say that f is a quasi-block function if there are arbitrarily large initial segments of ω closed under f. We show, among others, that a computable quasi-block function has a c.e. degree spectrum, if it has a non-decreasing computable lower bound g with $\lim_n g(n) = \infty$. An example is demonstrated showing that quasi-block functions with no computable lower bound but with c.e. degree spectrum exist. Another sufficient condition for having the c.e. degree spectrum is that a computable structure $(\omega, <, f)$ has a finitely generated infinite substructure.

A block function f is a quasi-block function with initial segments closed under f^{-1} as well. Such functions can be decomposed into atomic blocks—finite intervals closed under f and f^{-1} with no such proper subintervals. We will discuss the following result:

Theorem 1. *If a computable structure $(\omega, <, f)$, with f unary, has only finitely many isomorphism types of atomic blocks, then either f is intrinsically computable or its degree spectrum on $(\omega, <)$ consists of all Δ_2 degrees.*

Finally, we will develop notions and comment on the construction of a function having an unusual degree spectrum.

Theorem 2. *There exists a computable block function having neither trivial, nor the c.e., nor the Δ_2 degrees as a spectrum on $(\omega, <)$.*

We will finish by formulating some open questions.

References

[1] Downey, R., Khoussainov, B., Miller, J.S., and Yu, L. Degree spectra of unary relations on $(\omega, <)$. In: Glymour, C., Wei, W., and Westerståhl, D. (eds) Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proc. 13th Internat. Congress, 35–55. College Publications, London, 2009.

[2] Wright, M. Degrees of relations on ordinals. Computability, 7(4), 349–365 (2018).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru
Institute of Computer Science, Warsaw (Poland)
E-mail: dariusz.kalocinski@ipipan.waw.pl
University of Warsaw, Warsaw (Poland)
E-mail: m.wroclawski@uw.edu.pl

1-Computability of Boolean algebras with extra ideal in the language

M. N. Gaskova

We call the sequence of predicates $\mathrm{E}_0, \mathrm{At}_0, \mathrm{Als}_0, \mathrm{Atm}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{At}_1, \ldots$ — *the standard sequence of predicates*, where E_0 highlights $\{0\}$, and for all $n \geq 0$ predicate At_n highlights the set $\{x \in \mathcal{A} | x/\mathrm{E}_n$ — atom of factor algebra $\mathcal{A}/\mathrm{E}_n.\}$, Als_n highlights ideal $\{x \in \mathcal{A} | x/\mathrm{E}_n$ — atomless element of factor algebra $\mathcal{A}/\mathrm{E}_n.\}$, Atm_n highlights ideal $\{x \in \mathcal{A} | x/\mathrm{E}_n$ — atomic elemet of factor algebra $\mathcal{A}/\mathrm{E}_n.\}$, $\mathrm{E}_{n+1} = \mathrm{Als}_n + \mathrm{Atm}_n = \{x \in \mathcal{A} | \exists y \in \mathrm{Als}_n, z \in \mathrm{Atm}_n : x = y + z\}$. F_n highlights iterated Freche ideal (finate summs of elements of At_n).

Structure $\mathcal{A}$ of finate langauge is called computable if the set of its elements is computable subset of ω, and all functions and predicates are computable. Structure is n-computable if there exists an algorithm to check Σ_n-formulas. S. S. Goncharov in [**1**] showed that Boolean algebra $\mathcal{A}$ is n-computable iff $\mathcal{A}$ is computable and the first $(n+1)$ predicates of standard sequence of predicates are computable in $\mathcal{A}$.

In current work 1-computability of Boolean algebras with predicate for an extra ideal added to the language is studied. P. E. Alaev suggested a hypothesis and in current work we managed to proof the following statement.

Theorem. *Let $\mathcal{B}^*$ be Boolean algebra. Then $(\mathcal{B}^*, I)$ is 1-computable iff $(\mathcal{B}^*, I, At, I \to 0, At_I$ is computable, where $I \to 0 = \{x | \forall y \leq x : (y = 0 \vee y \notin I)\}$.*

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR according to the research project N 20-01-00300.

References

[1] Goncharov S. S., Countable Boolean Algebras and Decidability, Siberian School of Algebra and Logic, Springer US, 1997.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: margarita.leontyeva@gmail.com

On the degree of decidable categoricity of a model with infinite solutions for complete formulas

S. S. Goncharov, M. I. Marchuk

Goncharov[**1**] investigated computable categoricity restricted to decidable structures. A decidable structure $\mathcal{M}$ is $\mathbf{d}$-*decidably categorical* if for every decidable copy $\mathcal{N}$ of $\mathcal{M}$, there exists a $\mathbf{d}$-computable isomorphism from $\mathcal{M}$ onto $\mathcal{N}$. The *decidable categoricity spectrum* of $\mathcal{M}$ is the set

$$DCatSpec(\mathcal{M}) = \{\mathbf{d} : \mathcal{M}\ \mathbf{d}\text{-decidably categorical}\}.$$

A degree $\mathbf{d}_0$ is the *degree of decidable categoricity* of $\mathcal{M}$ if $\mathbf{d}_0$ is the least degree in the spectrum $DCatSpec(\mathcal{M})$.

There was the following hypothesis. If there exists a decidable prime model $\mathcal{M}$ and a set of complete formulas of $Th(\mathcal{M})$ has degree $\mathbf{d}$, each complete formula of the theory $Th(\mathcal{M})$ is satisfied by infinitely many tuples of elements, then $\mathbf{d}$ is the degree of decidable categoricality of $\mathcal{M}$. We show that this is not the case.

We prove the following theorem.

Theorem. *There exists a prime decidable model $\mathcal{M}$ and a Turing degree $\mathbf{d}$ such that the set of complete formulas of the theory $Th(\mathcal{M})$ has degree $\mathbf{d}$, each complete formula of the theory $Th(\mathcal{M})$ is satisfied by infinitely many tuples of elements and the spectrum of decidable categoricity for $\mathcal{M}$ is equal to the set of all PA -degrees.*

References

[1] Goncharov S. S., Degrees of autostability relative to strong constructivizations, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 274 (2011), 105–111.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: s.s.goncharov@math.nsc.ru;margaretmarchuk@gmail.com

Index sets of positive preorders

B. S. Kalmurzayev, N. A. Bazhenov

The main object of our research is computably enumerable (positive) preorders with respect to computable reducibility. We say that a preorder P is computably reducible to a preorder Q iff there is a computable function f such that xPy iff $f(x)Qf(y)$ for all $x, y \in \omega$. We investigate and classify the arithmetical complexity of some index sets of positive preorders and positive linear preorders. We refer to some fixed universal computable numbering $\{P_i \colon i \in \omega\}$ of all positive preorders. Unfortunately, the family of all positive linear preorders does not have a computable numbering, so we will refer to the universal computable numbering of some superfamily of all positive linear preorders.

Papers [**1, 2, 3, 4**] established the complexities of the index sets of such classes of c.e. equivalence relations (ceers) as the following: universal ceers, dark ceers, light ceers, self-full ceers, precomplete ceers, weakly precomplete ceers, and e-complete ceers. In addition, they consider the c-degree of a given ceer E, its upper cone and lower cone (under computable reducibility). In the talk we will discuss complexity of index sets of analogous classes of positive preorders and linear preorders.

References

[1] Andrews U., Lempp S., Miller J. S., Ng K. M., San Mauro L., Sorbi A., Universal computably enumerable equivalence relations, The Journal of Symbolic Logic, 79:1 (2013), 60–88.

[2] Andrews U., Sorbi A., The Complexity of index sets of classes of computably enumerable equivalence relations, The Journal of Symbolic Logic, 81:4 (2016), 1375–1395.

[3] Andrews U., Sorbi A., Joins and meets in the structure of ceers, Computability, 81:3–4 (2019), 193–241.

[4] Badaev S., Sorbi A., Weakly precomplete computably enumerable equivalence relations, Mathematical Logic Quarterly, 62:1–2 (2016), 111–127.

Al-Farabi Kazakh National University, Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: bazhenov@mail.math.nsc.ru

Non-empty open intervals of c.e. sQ_1-degrees

R. Sh. Omanadze

We say that a set A is sQ_1-reducible to a set B (in symbols: $A \leqslant_{sQ_1} B$), if there exist computable functions f and g such that, the following three conditions are satisfied: (i) $(\forall x)(x \in A \Longleftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B)$, (ii) $(\forall x)(\forall y)(y \in W_{f(x)} \Longrightarrow y \leq g(x))$, and (iii) $(\forall x)(\forall y)(x \neq y \Longrightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset)$. This relation generates the sQ_1-degrees. Condition (i) characterizes Q-reducibility, which yields the Q-degrees; (i) and (ii) together define sQ-reducibility, generating the sQ-degrees.

Our notation and terminology are standard, and can be found e.g., in [**1, 2**].

In this talk we will present the following results.

Theorem 1. *Given any c.e. sQ_1-degree a such that $o_{sQ_1} <_{sQ_1} a <_{sQ_1} o'_{sQ_1}$, there exist infinitely many pairwise sQ-incomparable c.e. sQ-degrees $\{c_i\}_{i\in\omega}$ such that*

$$(\forall\, i)\ \big(a <_{sQ_1} c_i <_{sQ_1} o'_{sQ_1}\big).$$

Theorem 2. *Let A, B be noncomputable c.e. sets such that B is not simple, $A <_{sQ_1} B$ and $A \oplus B \leqslant_{sQ_1} B$. Then there exist infinitely many pairwise sQ_1-incomparable c.e. sets $\{C_i\}_{i\in\omega}$ such that*

$$(\forall\, i)\ \big(A <_{sQ_1} C_i <_{sQ_1} B\big).$$

Theorem 3. *Let A, B be noncomputable c.e. sets such that $A <_{sQ_1} B$ and $A \equiv_{sQ} B$. Then there exist infinitely many pairwise sQ_1-incomparable c.e. sets $\{C_i\}_{i\in\omega}$ such that*

$$(\forall\, i)\ \big(A <_{sQ_1} C_i \leqslant_{sQ} B\big).$$

Theorem 4. *If A is a maximal set and B is a non-maximal hyperhypersimple set, then either $A|_{sQ_1}B$, or there exist a non-maximal hyperhypersimple set C and maximal set D such that*

$$A <_{sQ_1} D <_{sQ_1} C <_{sQ_1} B.$$

Theorem 5.

(i) $A \equiv_{sQ_1} A \times \omega \Longleftrightarrow (\forall B)(B \leqslant_{sQ} A \Longrightarrow B \leqslant_{sQ_1} A$.

(ii) $A \leqslant_{sQ} B \Longleftrightarrow A \times \omega \leqslant_{sQ_1} B \times \omega$.

Theorem 6. *Let A, B be noncomputable c.e. sets such that $A <_{sQ_1} B$ and $B \equiv_{sQ_1} B \times \omega$. Then there exist infinitely many pairwise sQ_1-incomparable c.e. sets $\{C_i\}_{i\in\omega}$ such that*

$$(\forall\, i)\ \big(A <_{sQ_1} C_i <_{sQ_1} B\big).$$

Theorem 7. *The sQ_1-degrees of c.e. cylinders are a dense uppersemilattice.*

References

[1] Rogers H. J., Theory of Recursive Functions and Effective Computability, MIT Press, 1967.

[2] Soare R. I., Recursively enumerable sets and degrees: A study of computable functions and computably generated sets, Springer Science & Business Media, 1999.

I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi (Georgia)
E-mail: roland.omanadze@tsu.ge

On the Soare–Stob theorem

M. M. Yamaleev

In our work we study relative enumerability of 2-c.e. Turing degrees in c.e. degrees below them. We consider an old question which arises from the well-known work of Soare and Stob in 1982 [**1**]. The Soare-Stob theorem says that for any noncomputable low c.e. Turing degree $\mathbf{a}$ there exists a non-c.e. Turing degree $\mathbf{d}$ which is above $\mathbf{a}$ and relative enumerable in $\mathbf{a}$. The question is whether the degree $\mathbf{d}$ can always be constructed as 2-c.e. We answer this question, and also consider its possible generalizations. All results are obtained in a joint work with Arslanov M.M. and Batyrshin I.I., and our main theorem is as follows.

Theorem. *There exists a noncomputable low c.e. degree* $\mathbf{a}$ *such that any 2-c.e. degree* $\mathbf{d} > \mathbf{a}$, *which is relative enumerable in* $\mathbf{a}$, *must be c.e.*

Acknowledgement. The author is partially supported by the Program of development of Scientific and Educational Mathematical Center of Volga Region (project No. 075-02-2021-1393)

References

[1] Soare R. I., Stob M, Relative computable enumerability, In J. Stern, editor, Proceedings of the Herbrand symposium, Logic Colloquium'81, North-Hollad, (1982), 299–324.

Kazan Federal University, Kazan
E-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru

VI. Секция «Теория групп»

Соотношения по модулю 2 для круговых единиц кругового поля Q_{2^n}

Р. Ж. Алеев, А. Д. Годова, О. В. Митина

Круговое поле, полученное присоединением примитивного корня α из 1 степени $2^n \geqslant 4$, обозначается $\mathbf{Q}_{2^n}$. Пусть $n \geqslant 4$. Для любого целого j положим $d_j = 1+\alpha^j+\alpha^{-j}$ и $r_j = d_j + d_{2^{n-2}-j} - 2$. В работе [**1**] определена подгруппа $K(\alpha)$ круговых единиц группы единиц $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\alpha])$ кольца $\mathbf{Z}[\alpha]$, которое является кольцом целых поля $\mathbf{Q}_{2^n}$. Из [**2**] следует, что $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\alpha]) = K(\alpha)$ для $n \leqslant 8$.

Лемма 1. *$K(\alpha) = \langle\alpha\rangle \times D(\alpha)$, где $D(\alpha) = \prod_{l=0}^{2^{n-2}-2}\langle d_{2l+1}\rangle$.*

Будем изучать соотношения между степенями порождающих группы $D(\alpha)$. В силу алгебраической сопряжённости достаточно рассматривать случай, когда изучается d_1 и его связи.

Пусть $q(k) = d_1^{-1}d_{2^{n-1-k}-1}$ и $P(k) = \prod_{j=k-1}^{n-4} d_1^{2^j}$ для любого $k \in \{1,\dots,n-3\}$.

Лемма 2. *Для любого $k \in \{0,1,\dots,n-3\}$*

(1) $d_1^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod 2$ *и* $d_1^{2^k} \not\equiv 1 \pmod 2$,

(2) $d_{2^{n-1-k}-1}^{2^k} \equiv d_1^{2^k} \pmod 2$ *и* $d_{2^{n-1-k}-1}^{2^{k-1}} \not\equiv d_1^{2^{k-1}} \pmod 2$

(3) $d_1^{-2^{k-1}} \equiv d_{2^{n-3}}P(k) \pmod 2$,

(4) $d_{2^{n-1-k}-1}^{2^{k-1}} \equiv d_{2^{n-2}-2^{k-1}} \equiv d_{2^{k-1}} + r_{2^{k-1}} \pmod 2$,

Пусть $R_{\mathbf{Z}}$ — подгруппа (по сложению) в поле $\mathbf{Q}_{2^n}$, порождённая элементами

$$\{r_{2l+1} \mid l \in \{0,\dots,2^{n-2}-1\}\}$$

и $\widetilde{R} = R_{\mathbf{Z}} + 2\mathbf{Z}[\alpha+\alpha^{-1}]$.

Теорема.

(1) *Для любого целого l имеем $d_1 r_l = r_l + r_{l+1} + r_{l-1} \in \widetilde{R}$ и* $d_{2^{n-3}} r_l \equiv r_l \pmod 2$.

(2) *Для любого $k \in \{1,\dots,n-3\}$ имеем $d_{2^{k-1}}^{-1} r_{2^{k-1}} \in \widetilde{R}$ и* $q(k)^{2^{k-1}} \equiv 1 + d_{2^{k-1}}^{-1} r_{2^{k-1}} \equiv 1 + P(k) r_{2^{k-1}} \pmod 2$.

Полученные результаты применяются при изучении единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта 20-51-00007, при поддержке Правительства РФ в соответствии с Постановлением 211 от 16.03.2013 г. (соглашение 02.A03.21.0011) и при частичной поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ 14.Z50.31.0020).

Список литературы

[1] Sinnott W. On the Stickelberger ideal and circular units of a cyclotomic field // Ann. of Math. 1978. 108 (1). 107–134.

[2] Miller J. C. Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem // Acta Arithmetica. 2014. 164 (4). 381–397.

Южно-Уральский госуниверситет (НИУ), Челябинский госуниверситет
E-mail: aleevrz@susu.ru, sashka_1997_godova55@mail.ru, ovm@csu.ru

Алгебраическая геометрия над свободными нильпотентными группами

М. Г. Амаглобели, А. Г. Мясников

Основные понятия алгебраической геометрии над группами были изложены в работе Г. Баумслага, А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова [**1**]. Более общая, универсальная алгебраическая геометрия, применимая к произвольным алгебраическим системам, рассматривается в работах Б. И. Плоткина, Э. Ю. Данияровой, А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова (см. книгу [**2**]). В настоящее время алгебраическая геометрия над группами стала важным инструментом исследований в комбинаторной, геометрической и теоретико-модельной теории групп. Наиболее полно разработаны алгебро-геометрические методы для свободных групп, гиперболических групп и частично-коммутативных групп (см. обзор [**3**]), а также для свободных разрешимых и жестких разрешимых групп (см. обзор [**4**]). Одним из принципиальных открытых вопросов в этой области является построение алгебраической геометрии над нильпотентными группами без кручения, в частности, над свободными нильпотентными группами. Помимо непосредственного интереса к нильпотентным группам, важность этого вопроса заключается также в том, что во многих случаях подгруппа Фиттинга F данной группы G выделяется в G некоторой конечной системой уравнений, поэтому алгебраическая геометрия над нильпотентной группой F непосредственно вкладывается в алгебраическую геометрию исходной, возможно ненильпотентной, группы G. В этом докладе мы описываем алгебраические свойства координатных групп алгебраических множеств и их неприводимых компонент над свободной нильпотентной группой N (топология Зарисского здесь нетерова, а потому каждое алгебраическое множество есть конечное объединение своих неприводимых компонент). Эти результаты позволяют надеяться на решение других фундаментальных вопросов в алгебраической геометрии над N, например, получить разумное описание множеств решений конечных систем уравнений над N (несмотря на то, что Диофантова проблема над N неразрешима).

Список литературы

[1] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V., Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory. J. Algebra 219 (1999), no. 1, 16–79.

[2] Даниярова Э., Мясников А., Ремесленников В., Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск, Сибирское отделение РАН, 2016.

[3] Kharlampovich O., Myasnikov A., Model theory and algebraic geometry in groups, non-standard actions and algorithmic problems. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Seoul 2014. Vol. II, 223–245, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.

[4] Romanovski N., Rigid solvable groups: Algebraic geometry and model theory. Groups and model. Theory, GAGTA BOOK 2, 2021.

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили (Грузия)
E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge
Технологический Институт им. Стивенса (США)
E-mail: amiasnikov@gmail.com

О слабо дополняемых коврах лиева типа

П. С. Бадин, Я. Н. Нужин, Е. Н. Троянская

Ковер аддитивных подгрупп $\{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ над коммутативным кольцом, ассоциированный с системой корней Φ, назовем *дополняемым* и *слабо дополняемым*, если выполняются соответственно включения: (1) $\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r,\ r \in \Phi$; (2) $\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r,\ r \in \Phi$, где $\mathfrak{A}_r^2 = \{a^2 \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$. Определения ковра такое как в [**1**].

В работе [**2**] по ковру $\mathfrak{A}$ определено ковровое кольцо Ли $L(\Phi, \mathfrak{A})$ и, в частности, доказано, что кольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$ тогда и только тогда инвариантно относительно ковровой подгруппы $\Phi(\mathfrak{A})$, когда выполняются включения (2). По определению кольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$ порождается (относительно обеих операций — сложения и лиева умножения) всеми множествами $\mathfrak{A}_r e_r,\ r \in \Phi$, где $\{e_r,\ r \in \Phi;\quad h_s,\ s \in \Pi\}$ — базис Шевалле соответствующей алгебры Ли, Π — фундаментальная система корней для Φ. В [**2**] был также сформулирован следующий вопрос, записанный позднее в Коуровской тетради [**3**, вопрос 19.63]. *Верно ли, что включения (2) являются достаточными для замкнутости ковра* $\{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$*?*

Очевидно, условия (2) являются ослаблением включений (1). Более того, для колец нечетной характеристики условия (1) и (2) эквивалентны. Мы переносим результаты статьи [**4**] о разделении классов слабо дополняемых и дополняемых матричных ковров над полями характеристики 0 и 2 на ковры любого лиева типа над коммутативными кольцами четной характеристики. Установлено, что эти классы ковров разделяют также примеры неприводимых замкнутых ковров типа B_l и C_l над несовершенными полями характеристики 2, параметризуемые двумя аддитивными подгруппами, которые построены в работе [**5**] для получения нестандартных групп между группами Шевалле над полем и его подполем.

Работа второго автора поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2021-1388) и РФФИ (проект 19–01–00566).

Список литературы

[1] Левчук В. М., Параболические подгруппы некоторых ABA-групп, Матем. заметки., 31 (1982), 509–525.

[2] Нужин Я. Н., Кольца Ли, определяемые системой корней и набором аддитивных подгрупп основного кольца, Тр. ИММ УрО РАН, 18 (2012), 195–200.

[3] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 19-е изд., Новосибирск, изд-во ИМ СО РАН, 2018.

[4] Гутнова А. К., Койбаев В. А., О достаточных условиях замкнутости элементарной сети, Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия, 65 (2020), 230–235.

[5] Нужин Я. Н., Степанов А. В., Подгруппы групп Шевалле типов B_l и C_l, содержащие группу над подкольцом, и связанные с ними ковры, Алгебра и анализ, 31 (2019), 4, 198–224.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: pbadin@sfu-kras.ru, nuzhin2008@rambler.ru, troyanskaya.elizaveta@yandex.ru

Локально свободные подгруппы групп с одним определяющим соотношением

А. И. Будкин

В этой статье мы находим условия, при которых нормальное замыкание каждой n-порождённой подгруппы группы с одним определяющим соотношением является локально свободной группой.

Если T — групповое слово в алфавите X, то через $[T]$ обозначим множество элементов из X, входящих в T. Через $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle^G$ будем обозначать нормальное замыкание подгруппы, порождённой элементами $t_1, \ldots, t_n$ в G (т.е. это нормальная подгруппа группы G, порождённая элементами $t_1, \ldots, t_n$); G' — это коммутант группы G.

Теорема 1. *Пусть*

$$G = \langle x_1, \ldots x_s; [x_1, x_{n+1}][x_2, x_{n+2}] \ldots [x_n, x_{2n}]R \rangle,$$

где $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n} \notin [R]$. Если $t_1, \ldots, t_{n-1} \in G$, то $G' \langle t_1, \ldots, t_{n-1} \rangle^G$ является свободной группой.

Теорема 2. *Пусть*

$$G = \langle a, x_1, \ldots, x_s; P \rangle,$$

где $P = P(a, x_1, x_2, \ldots, x_s) = [a, x_1][a, x_2] \ldots [a, x_n]S$ $(n \geq 7)$ and $x_1, \ldots, x_7 \notin [S]$. Если $t_1, t_2, t_3 \in G$, то $G' \langle t_1, t_2, t_3 \rangle^G$ является локально свободной группой.

Алтайский госуниверситет, Барнаул
E-mail: budkin@math.asu.ru

Многоообразия, порожденные простыми монотонно упорядоченными группами

С. В. Вараксин

Напомним, что *m-группа* (G, φ) это алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, \varphi \rangle$, которая является ℓ-группой и одноместная операция φ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$. Будем также говорить, что m-группа (G, φ) допускает представление в виде (G, Ω, a) порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Ω, если $G \subset Aut(\Omega)$ и $\varphi(g) = aga$ для любого $g \in G$, где a —реверсивный автоморфизм второго порядка множества Ω.

Автор ранее показал, что простая не о-аппроксимируеая ℓ-группа порождает или многообразие нормальнозначных ℓ-групп, или многообразие всх ℓ-групп. А. Зенков и О. Исаева построили пример простой m-группы, определив реверсивный автоморфизм на группе $B(\mathbb{R})$ ограниченных автоморфизмов числовой прямой. Верны следующие утверждения:

Теорема 1. *Простая m-группа или является простой ℓ-группой с определенным на ней реверсивным автоморфизмом, или декартовым произведением двух простых ℓ-групп, и реверсивный автоморфизм φ меняет их местами.*

Следствие. *Простая не о-аппроксимируемая m-группа породает или многообразие нормальнозначных m-групп, или многообразие всех m-групп.*

Можно построить пример простой нормальнозначной m-группы с помощью конструкции Ф.Холла. Пусть (H, φ) - m-группа, обладающая точным транзитивным представлением л. у. множества Ω. Сопряжение элементом t на объединении $C(H, \Omega)$ вложенных друг в друга сплетений увеличивающегося числа m-групп подстановок (H, Ω, a) переводит порождающие элементы на один уровень вверх, полупрямое произведение $D(H, \Omega) = C(H, \Omega) \leftthreetimes t$, по индукции определены вложенные друг в друга m-группы $(F_0(H, \Omega), \varphi) = (H, \varphi), \Lambda_0 = \Omega$, $(F_{i+1}(H, \Omega), \varphi) = (D((F_i(H, \Omega), \Lambda_i)\varphi), \Lambda_{i+1} = \prod_{i=-\infty}^{i=\infty} \Lambda_i$ и объединение $(G(H, \Omega), \varphi) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (F_i(H, \Omega), \varphi)$.

Теорема 2. *Если m-группа (H, φ) нормальнозначна и обладает точным транзитивным представлением (H, Ω, a) автоморфизмами линейно упорядоченного множества Ω с неподвижным элементом $\omega_0 \in \Omega$ реверсивного автоморфизма a множества Ω, то m-группа $(G(H, \Omega), \varphi)$ нормальнозначна и проста.*

Список литературы

[1] Zenkov A. V., Isaeva O. V., On variety N of normal valued m-groups // Сиб. электрон. матем. изв., 2021, 18:1, 54–60.

[2] Вараксин С. В. Многообразия, порожденные простыми ℓ-группами // Сиб. матем. журн., 1990, 31:5, 167–170.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: varaksin@bk.ru

О порождении групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны

Р. И. Гвоздев, Я. Н. Нужин, Т. Б. Шаипова

Группы, порожденные тремя инволюциями, две их которых перестановочны, будем называть $(2\times 2, 2)$-порожденными. Очевидно, из $(2\times 2, 2)$-порождаемости какой-то группы следует $(2\times 2, 2)$-порождаемость любого ее неединичного гомоморфного образа, при этом, мы не исключаем того, что две или все три инволюции совпадают. В работах [**1**] и [**2**] установлена $(2\times 2, 2)$-порождаемость проективных специальных линейных групп $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ при $n\geq 8$ и соответственно при $n=7$. Доказательство в [**1, 2**] состояло в том, что порождающие тройки указывались в явном виде, более того, при $n\neq 4k+2$ они выбирались из специальной линейной группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Поэтому для таких размерностей справедлив более сильный результат. При $n\geq 7$ и $n\neq 4k+2$ группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ является $(2\times 2, 2)$-порожденной. Мы рассматриваем оставшиеся малые размерности $n\leq 6$. Доказана

Теорема 1. (а) *Группа $SL_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не порождается никаким множеством инволюций.*

(б) *Группы $PSL_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, $SL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, $PSL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, $SL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождаются тремя инволюциями, но не порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

(в) *Группа $PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождаются тремя сопряженными инволюциями, две из которых перестановочны.*

Объединяя теорему 1 с указанными выше утверждениями из [**1, 2**], получаем для групп $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ следующий почти законченный результат.

Теорема 2. *При $n\neq 5$ группа $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n\geq 6$.*

Группа $PSL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ $(=SL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}))$ порождается тремя инволюциями, но неизвестно, будет ли она $(2\times 2, 2)$-порожденной? Группа $SL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не является $(2\times 2, 2)$-порожденной, но неизвестно, порождается ли она тремя инволюциями?

Работа второго автора поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2021-1388) и РФФИ (проект 19–01–00566).

Список литературы

[1] Levchuk D. V., Nuzhin Ya. N., On generation of the group $PSL_n(Z+iZ)$ by three involutions, two of which commute, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 1 (2008), no. 2, 133–139.

[2] Левчук Д. В., О порождаемости группы $PSL_7(Z+iZ)$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны, Вестник НГУ, 1 (2009), 35–38.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: gvozdev.rodion@bk.ru, nuzhin2008@rambler.ru, 663431@mail.ru

О группах с перестановочными строго вторыми и строго третьими максимальными подгруппами

Ю. В. Горбатова

Все рассматриваемые группы конечны. Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-*максимальной подгруппой* группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы. Также n-максимальная подгруппа группы G называется *строго n-максимальной*, если она не является n-максимальной подгруппой ни в одной собственной подгруппе группы G.

В работе [**1**] авторы получили точное описание групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами. Развивая данный результат, в настоящей работе приводится точное описание групп, в которых каждая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми строго 3-максимальными подгруппами. В частности, доказана эквивалентность строения групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами, а также групп, в которых каждая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми строго 3-максимальными подгруппами.

Лемма 1. *Пусть G — группа. Если каждая строго 2-максимальная подгруппа из G перестановочна со всеми её строго 3-максимальными подгруппами, то G разрешима.*

Лемма 2. *Пусть G — группа. Если каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми её строго 3-максимальными подгруппами и $|\pi(G)| > 3$, то G нильпотентна.*

Теорема. *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *каждая 2-максимальная подгруппа группы G перестановочна с каждой её 3-максимальной подгруппой*;

(2) *каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G перестановочна с каждой её строго 3-максимальной подгруппой.*

Список литературы

[1] Легчекова Е. В., Скиба А. Н. Конечные группы с частично перестановочными вторыми и третьими максимальными подгруппами // Доклады НАН Беларуси. 2006. 50 (3). 1012–1017.

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (Брянский филиал), Брянск
E-mail: g.julia32@yandex.ru

О локально почти разрешимых группах конечного метабелева ранга

О. Ю. Дашкова

Д.И.Зайцевым было введено понятие F-ранга группы G [1]. Пусть G – группа, F – некоторая непустая система ее конечно порожденных подгрупп. F-рангом группы G называется такое наименьшее число r, что любая подгруппа системы F может быть порождена не более чем r элементами. В случае, когда такого числа r нет, F-ранг группы G считается бесконечным. Если F – система всех метабелевых неабелевых конечно порожденных подгрупп неабелевой группы G, то F-ранг группы G называется метабелевым. Установлено, что разрешимые неабелевы группы конечного метабелева ранга могут иметь бесконечный специальный ранг [2].

Основным результатом работы является теорема.

Теорема. *Неабелева локально почти разрешимая группа конечного метабелева ранга локально минимаксна.*

Список литературы

[1] Дашкова О. Ю. Локально почти разрешимые группы конечного неабелева ранга. Укр. мат. журн., 1990, 42 (4), 477–482.

[2] Дашкова О. Ю. О разрешимых группах конечного метабелева ранга. Сиб. мат. журн., 2020, 61 (6), 1331–1342.

Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Севастополе, Севастополь
E-mail: odashkova@yandex.ru

О периодических группах, насыщенных конечными группами Фробениуса

Б. Е. Дураков

Группа G *насыщена группами из множества групп* $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Группу G называем *группой Фробениуса с дополнением* H *и ядром* F, если:

(1) F и H — собственные подгруппы группы G и $G = F \leftthreetimes H$;

(2) (G, H) — пара Фробениуса, т. е. $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$;

(3) $G \setminus F^{\#} = \bigcup H^g$.

Элемент a называется *конечным* в группе G, если все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$ $(g \in G)$ конечны. Группа, в которой каждый элемент простого порядка конечен, называется *слабо сопряженно бипримитивно конечной.* Группа, все сечения которой по конечным подгруппам (включая единичную) слабо сопряженно бипримитивно конечны, называется *сопряженно бипримитивно конечной*, или *группой Шункова.*

В [**1**] получены результаты о периодических слабо сопряженно бипримитивно конечных и бинарно конечных группах с нетривиальным локально конечным радикалом, насыщенных конечными группами Фробениуса. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — периодическая группа, насыщенная конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков, i — её инволюция. Если для некоторых элементов $a, b \in G$ с условием $|a| \cdot |b| > 4$ все подгруппы вида $L_g = \langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$, конечны, то $G = A \leftthreetimes C_G(i)$ — группа Фробениуса с абелевым ядром A.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-71-10017).

Список литературы

[1] Durakov B. E., Sozutov A. I. On Periodic Groups Saturated with Finite Frobenius Groups // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2021, 35, 73–86.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: durakov96@gmail.com

О конечных подгруппах точно кратно транзитивных групп

Е. Б. Дураков

Группа G подстановок множества X ($|X| \geq k$) называется *точно k-транзитивной* на X, если для любых двух упорядоченных множеств $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ элементов (точек) из X таких, что $\alpha_i \neq \alpha_j$ и $\beta_i \neq \beta_j$ для $i \neq j$, существует точно один элемент группы G переводящий α_i в β_i ($i = 1, \ldots, k$). Элемент a группы G называется *конечным*, если для всех $g \in G$ подгруппы $\langle a, a^g \rangle$ конечны. Группа G *насыщена группами из множества групп* $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Смешанная группа G обладает *периодической частью* $T(G)$, если все элементы конечных порядков в G составляют подгруппу $T(G)$. Собственная подгруппа H группы G называется *сопряженно плотной*, если H имеет не пустое пересечение с каждым классом сопряженных элементов из G.

Теорема 1. *Насыщенная конечными группами Фробениуса точно дважды транзитивная группа подстановок, в стабилизаторе точки которой нет сопряженно плотных подгрупп, обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой.*

Указаны примеры смешанных групп с конечными элементами, насыщенных конечными группами Фробениуса, не обладающих периодической частью.

Теорема 2. *Точно трижды транзитивная группа с конечным элементом, насыщенная конечными простыми группами, локально конечна.*

В [**1**] доказана

Теорема 3. *Точно трижды транзитивная группа характеристики $p > 3$, содержащая конечный элемент порядка p, локально конечна.*

Ведется работа по доказательству аналогичной теоремы без ограничения на характеристику группы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, проект 19-01-00566 А.

Список литературы

[1] Durakov E. B., Sharply 3-transitive groups with finite element, Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics. 2021. (the article was accepted for publication)

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: durakov@mail.ru

Автоморфизмы нерасщепляемых расширений 2-групп с помощью $\mathbf{PSL_2}(q)$

А. В. Заварницин, Д. О. Ревин

Нерасщепляемые расширения G группы $L = \mathrm{PSL}_2(q)$ при нечётном q, задаваемые короткой точной последовательностью

$$0 \to V \to G \to L \to 1, \tag{1}$$

где V — элементарная абелева 2-группа и соответствующее действие L на V неприводимо, были описаны в [**1**]. В докладе будет представлено строение группы автоморфизмов каждого такого расширения.

Напомним, что $\mathrm{P\Sigma L}_2(q)$ обозначает расширение группы L с помощью её полевых автоморфизмов. Аналогично, $\mathrm{P\Gamma L}_2(q)$ — расширение $\mathrm{PGL}_2(q)$ полевыми автоморфизмами. Получено следующее описание.

Теорема 1. *Пусть G — нерасщепляемое расширение групп, заданное последовательностью* (1), *где V — элементарная абелева 2-группа, на которой неприводимо и нетривиально действует группа $L \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ при нечётном q. Тогда существует короткая точная последовательность групп*

$$0 \to W \to \mathrm{Aut}(G) \to A \to 1,$$

где W — элементарная абелева 2-группа порядка 2^n и справедливо одно из утверждений:

(*i*) $q \equiv -1 \pmod 8$, $n = (q+1)/2$ *и* $A \cong \mathrm{P\Sigma L}_2(q)$;
(*ii*) $q \equiv 3 \pmod 8$, $n = q+1$ *и* $A \cong \mathrm{P\Gamma L}_2(q)$.

Доказательство теоремы опирается на ряд полученных нами вспомогательных утверждений из теории представлений, которые могут представлять самостоятельный интерес. Сама теорема 1 оказывается полезной при изучении проблемы Г. Виланда [**2**, Offene Frage (g)] о π-субмаксимальных подгруппах минимальных неразрешимых групп.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект N 0314-2019-0001) и при поддержке РФФИ и БРФФИ (проект N 20-51-00007).

Список литературы

[1] Буриченко В. П., Расширения абелевых 2-групп с помощью $\mathrm{L}_2(q)$ с неприводимым действием, Алгебра и логика 39 (2000), N 3, 280–319.
[2] Wielandt H., Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute, Finite groups, Santa Cruz Conf. 1979, Proc. Symp. Pure Math. 37 (1980), 161–173.

ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: zav@math.nsc.ru
ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН и Новосибирский государственный университет, Новосибирск; Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: revin@math.nsc.ru

О пересечениях нильпотентных подгрупп в некоторых конечных классических группах

В. И. Зенков

Пусть G — конечная группа, A и B—подгруппы из G. Определим $M_G(A,B)$ как множество минимальных по включению нересечений вида $A \cap B^g$, где g из G, а $m_G(A,B)$ как множество минимальных по порядку нересечений такого вида. Положим $Min_G(A,B)$=«$M_G(A,B)$» и $min_G(A,B)$=«$m_G(A,B)$». Некоторые свойства подгрупп $Min_G(A,B)$ и $min_G(A,B)$ приведены в [**1**]. При изучении подгрупп $Min_G(A,B)$ и $min_G(A,B)$ в почти простых группах, где $Soc(G)$—простая группа из [**2**] в локальных ситуациях возникают подгруппы, не лежащие в списке из [**2**]. Такое происходит в группе $E_8(2)$ с ортогональными группами размерностей 14 и 12 над полем порядка 2, а также с группами $U_5(4)$ и $U_9(2)$, что непосредственно видно из таблиц 4.7.3 A, B в [**3**]. Поэтому они рассматриваются отдельно.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная группа, в которой цоколь изоморфен либо ортогональной группе размерности 12 или 14 над полем порядка 2 и знака минус, либо $U_5(4)$ или $U_9(2)$. Тогда $min_G(A,B) = 1$ для любых нильпотентных подгрупп A и B группы G.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 20-01-00456.

Список литературы

[1] Зенков В.И. О пересечениях трех нильпотентных подгрупп в конечной группе // Сиб. мат. журн. 2021. 62 (4). 764–783.
[2] Convay J.H. [et.al.] Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
[3] Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups, Number 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc, 1998

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: v1i9z52@mail.ru

Несуществование спорадического композиционного фактора в некоторых конечных группах с условием на граф Грюнберга — Кегеля

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$.

М. Хаги [**1**] исследовала конечные группы с графом Грюнберга — Кегеля как у спорадической группы. А. В. Заварницин [**2**] изучил конечные группы с графом Грюнберга — Кегеля как у групп J_4, $G_2(7)$ или ${}^2G_2(q)$, $q = 3^{2m+1} > 3$.

Мы рассматриваем следующую задачу: может ли конечная группа с графом Грюнберга — Кегеля как у конечной простой неабелевой группы иметь композиционный фактор, изоморфный простой спорадической группе. В рамках этой задачи мы получили следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $H = A_{n-1}(q)$ — конечная простая линейная группа, $7 \le n \neq 8, 9, 10, 12$, G — конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S — ее композиционный фактор. Тогда S не изоморфен простой спорадической группе.*

Теорема 2. *Пусть $H = {}^2A_{n-1}(q)$ — конечная простая унитарная группа, $7 \le n \neq 8, 9, 10, 12$, G — конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S — ее композиционный фактор. Тогда S не изоморфен простой спорадической группе.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-01-00456.

Список литературы

[1] Hagie M., The prime graph of a sporadic simple group. Comm. Algebra. 31(9) (2003) 4405–4424.

[2] Заварницин А. В., О распознавании конечных групп по графу простых чисел. Алгебра и логика. 45(4) (2006) 390–408.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

Об одном необходимом условии регулярности P-группы и его следствиях

С. Г. Колесников, В. М. Леонтьев

В 1982 г. Б. Верфриц в Коуровской тетради поставил вопрос [**1**, вопрос 8.3]: для каких n, m, p силовская p-подгруппа $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ группы $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ над кольцом вычетов целых чисел $\mathbb{Z}_{p^m}$ регулярна? Ответ известен в следующих случаях: $nm-1<p$ (Ю. И. Мерзляков), $n \geqslant p+1$ (А. В. Ягжев), $n \geqslant (p+1)/2$ или $n^2 < p$ (С. Г. Колесников). В работе получено необходимое условие регулярности, которое позволяет частично исследовать случай $n \geqslant (p+1)/3$, а также получить полное решение аналога этого вопроса для силовской p-подгруппы $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ группы Шевалле $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ для Φ типа G_2.

Теорема 1. *Если конечная p-группа G регулярна, то для любых $a, b \in G$ существует элемент $d \in \langle a,b\rangle'$ такой, что $d^p = \prod_{w(R_i)\geqslant p} R_i^{f_i(p)}$, где произведение берется по всем коммутаторам R_i веса $w(R_i) \geqslant p$ из собирательной формулы Ф. Холла. В частности, для любого целого неотрицательного j имеем*

$$d^p \equiv \prod_{p\leqslant w(R_i)\leqslant p+j} R_i^{f_i(p)} \pmod{G^{(p+j+1)}},$$

где $G^{(p+j+1)}$ — $(p+j+1)$-й член нижнего центрального ряда группы G.

Из теоремы 1 и результатов [**2**] получается

Следствие. *Пусть G — регулярная p-группа, $p \geqslant 3$, $a, b \in G$. Допустим, что всякий коммутатор от a и b: 1) имеющий более двух вхождений b, равен 1; 2) веса p имеет порядок 1 или p. Тогда существует элемент $d \in \langle a,b\rangle'$ такой, что*

$$d^p \equiv [b, {}_{p-1}a]\,[b, {}_{p-2}a, b]^{-1} \prod_{k=1}^{(p-3)/2} [[b, {}_{p-2-k}a], [b, {}_k a]]^{(-1)^{k+1}} \pmod{G^{(p+1)}}.$$

Следующие две теоремы доказаны с использованием следствия.

Теорема 2. *Пусть p такое простое число, что число $(p+2)/3$ — целое. Группа $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ не регулярна, если $n \geqslant (p+2)/3$ и $m \geqslant 3$.*

Теорема 3. *Группа $PG_2(\mathbb{Z}_{p^m})$ регулярна, только если $p \geqslant 17$ или $6m \leqslant p < 17$.*

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

Список литературы

[1] Коуровская тетрадь. Нерешённые вопросы теории групп, 16-е издание // редакторы Мазуров В. Д., Хухро Е. И., Новосибирск, ИМ СО РАН, 2006.

[2] Kolesnikov S. G., Leontiev V. M., Egorychev G. P. Two collection formulas // Journal of Group Theory, 2020, 23 (4), 607–628.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: sklsnkv@mail.ru

Об одном вопросе о тензорном произведении модулей

А. В. Коныгин

Пусть G — группа, K — алгебраически замкнутое поле и V_1, V_2 — KG-модули. В работе рассматривается вопрос: при каких ограничениях на G, K, V_1, V_2 выполняется изоморфизм $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$, где I — тривиальный KG-модуль (размерности $\dim(V_2)$)?

Ранее автором в [**1**] было показано, что если G — нееиничная связная редуктивная алгебраическая группа над K и V_1, V_2 — точные полупростые KG-модули, то $V_1 \otimes V_2 \ncong V_1 \otimes I$. В случае, если G — неединичная конечная группа, $\mathrm{char}\,(K) = 0$, V_1 — KG-модуль, V_2 — точный KG-модуль, то $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$ справедливо в том и только том случае, когда V_1 — прямая сумма $\dfrac{\dim(V_1)}{|G|}$ регулярных представлений группы G.

Настоящая работа продолжает исследование вопроса. В ней доказывается, что $V_1 \otimes V_2 \ncong V_1 \otimes I$ в случае, когда G — конечная группа лиева типа характеристики p, $\mathrm{char}\,(K) = p$ и V_1, V_2 — точные простые KG-модули.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00456).

Список литературы

[1] Коныгин А. В., Об одном вопросе, касающемся тензорного произведения модулей, Тр. ИММ УрО РАН, 27 (1), 2021, 103–109.

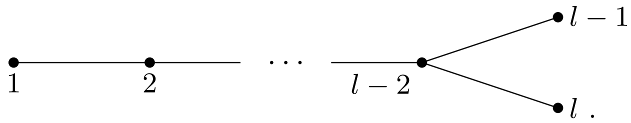
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: konygin@imm.uran.ru

Максимальные унипотентные подгруппы двойных стабилизаторов примитивных параболических подстановочных представлений группы $D_l(q)$

В. В. Кораблева

Пусть G — конечная простая группа лиева типа и P — параболическая максимальная подгруппа в G. Рассмотрим представление группы G подстановками множества Γ левых смежных классов группы G по подгруппе P, в котором элементу g из G соответствует подстановка, переводящая левый смежный класс xP в gxP. Орбиты Γ_i подгруппы P на Γ называются *подорбитами* группы G. Ранее автором было получено описание примитивных параболических подстановочных представлений всех конечных простых групп лиева типа (вычислены степень, ранг, строение стабилизаторов точки и двух точек). При этом исследования исключительных групп проводились методом BN-пар. Для классических групп метод BN-пар удалось применить только для групп типа A_l. Для других классических групп применение этого метода приводило к большого объема вычислениям и к поиску иных подходов, поэтому классические группы изучались в их естественных матричных представлениях, а доказательства были получены в терминах матриц линейных преобразований и билинейных или квадратичных форм. Поставлена задача унифицировать описание примитивных параболических подстановочных представлений конечных простых групп лиева типа и получить единое (лиево) описание таких представлений. Это описание было бы полезным для решения многих задач теории групп.

С этой точки зрения в данной работе исследуется ортогональная группа $G = D_l(q)$ и ее параболическая максимальная подгруппа P_k, полученная отбрасыванием k-й вершины диаграммы Дынкина в стандартном упорядочении ее вершин:



Более точно, для некоторых подорбит Γ_i и их представителей z_i указываются корневые подгруппы, порождающие максимальную унипотентную подгруппу двойного стабилизатора $P_k \cap z_i P_k z_i^{-1}$, соответствующего подорбите Γ_i. Это позволяет получить коммутаторные соотношения для группы $P_k \cap z_i P_k z_i^{-1}$ и тем самым найти ее строение. Элементы z_i явно указываются в терминах порождающих группы Вейля для G.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-01-00456.

Челябинский государственный ниверситет, Челябинск; Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: vvk@csu.ru

Подгруппы Судзуки в группе автотопизмов полуполевой проективной плоскости

О. В. Кравцова

Исследования проективных плоскостей восходят ещё к Эйлеру. Группы коллинеаций конечных дезарговых проективных плоскостей, наряду со знакопеременными группами подстановок, явились первым источником конечных простых неабелевых групп.

Начиная с работ Диксона (1905), Веблена и Веддерберна (1906), стали изучаться недезарговы проективные плоскости трансляций, координатизируемые не полем, а квазиполем и, в частных случаях, (неассоциативной) алгеброй с делением – полуполем.

Обсуждая гипотезу Хьюза (1959) о разрешимости группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевой плоскости (вопрос 11.76 Н.Д. Подуфалова в Коуровской тетради), предлагаем, прежде всего, выявить простые неабелевы группы, которые не могут являться подгруппами в группе автотопизмов (автоморфизмов, фиксирующих треугольник).

Доказаны общие результаты, ограничивающие возможный порядок подгруппы Судзуки $Sz(2^{2n+1})$ в группе автотопизмов.

Теорема 1. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка p^N, где $p > 2$ – простое, $N = 2^m \cdot s$, s нечетно. Тогда группа автотопизмов не содержит подгрупп, изоморфных $Sz(2^{2n+1})$ для $2n + 1 > m$.*

Теорема 2. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка 2^N, где N не делится на 4. Тогда группа автотопизмов не содержит подгрупп, изоморфных $Sz(2^{2n+1})$ для любого n.*

Изучаются условия существования в группе автотопизмов подгруппы, изоморфной Sz(2) (как подгруппы $Sz(2^{2n+1})$ при любом n). Получены технические результаты. В частности, выявлен геометрический смысл порождающих элементов, унифицировано матричное представление автотопизмов порядка 4. Для плоскостей минимального ранга доказана следующая

Теорема 3. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка p^{2N}, где p – простое, левое ядро которой изоморфно $GF(p^N)$. Тогда группа линейных автотопизмов не содержит подгрупп, изоморфных $Sz(2)$.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00566 А.

Сибирский федеральный универститет, Красноярск
E-mail: ol71@bk.ru

Вложения счетных групп, задаваемые универсальными словами в свободной группе

В. Г. Микаелян

По теореме Хигмэна, Ноймана и Нойман [**2**] любая счётная группа G вложима в 2-порожденную группу T. Этот известный результат стал отправной точкой для исследований о вложениях в 2-порожденные группы с дополнительными свойствами. В [**5**] мы строим метод явного вложения любой счётной группы G, заданной своими порождающими и определяющими соотношениями, в такую 2-порожденную группу T_G, что определяющие соотношения T_G могут быть легко выведены из таковых группы G, и они наследуют некоторые свойства соотношений G, нужные для вложений рекурсивных групп в конечно определённые группы, изучаемые нами в [**6**].

Следующие обозначения понадобятся для задания вложения. В свободной группе $F_2 = \langle x, y\rangle$ ранга 2 рассмотрим некоторые *универсальные* слова $a_i(x,y) = y^{(xy^i)^2\, x^{-1}}$, $i = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим произвольную счётную группу $G = \langle\, A \mid R\,\rangle = \langle a_1, a_2, \ldots \mid r_1, r_2, \ldots\rangle$, где $r_s \in R$ есть слово длины k_s над буквами, например, $a_{i_{s,1}}, \ldots, a_{i_{s,k_s}} \in A$. Если в r_s заменим каждый $a_{i_{s,j}}$ соответствующим словом $a_{i_{s,j}}(x,y)$, получим новое слово $r'_s(x,y) = r_s\big(a_{i_{s,1}}(x,y), \ldots, a_{i_{s,\,k_s}}(x,y)\big)$ в F_2 над всего лишь двумя буквами x, y. В этих обозначениях в [**5**] мы доказываем:

Теорема. *Для любой счётной группы* $G = \langle a_1, a_2, \ldots \mid r_1, r_2, \ldots\rangle$ *отображение* $\gamma : a_i \to a_i(x,y),\ i = 1, 2, \ldots,$ *задает инъективное вложение* G *в 2-порожденную группу* $T_G = \big\langle x, y \mid r'_1(x,y),\ r'_2(x,y), \ldots \big\rangle$.

По теореме Хигмэна [**1**] каждая рекурсивная группа вложима в конечно определённую группу, в связи с чем в проблеме 14.10 в [**3**] ставится вопрос о *явных* вложений рекурсивных групп в “естественные” конечно определенные группы. В [**6**] мы строим явные вложения в 2-порожденные группе для разных классов рекурсивных групп, включая группу $\mathbb{Q}$, подчёркнутую в проблеме 14.10.

Список литературы

[1] Higman G., Subgroups of finitely presented groups, Proc. R. Soc. Ser. A (1961), 262, 455–475.

[2] Higman G., Neumann B. H., Neumann H., Embedding theorems for groups, J. London Math. Soc., 3, 24, (1949), 247–254.

[3] Мазуров В. Д., Хухро Е. И. (ред.), Коуровская тетрадь. Нерешённые вопросы теории групп, 19-е изд, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (2018).

[4] Mikaelian V. H., Subvariety structures in certain product varieties of groups, J. Group Theory, 21 (2018), 5, 865–884.

[5] Микаелян В. Г., Вложения, задаваемые универсальными словами в свободной группе ранга 2, Сибирский мат. журнал, 62 (2021), 1, 154–163.

[6] Mikaelian V. H., The Higman operations and embeddings of recursive groups, 2020, arXiv:2002.09728 [math.GR]

Ереванский государственный университет, Ереван (Армения)
E-mail: v.mikaelian@gmail.com

О сверхразрешимости конечной группы с пермутируемыми подгруппами

В. С. Монахов, И. Л. Сохор

Рассматриваются только конечные группы. Примарной называют группу, порядок которой есть степень некоторого простого числа.

Пермутизатором [**1**, p. 26] подгруппы H в группе G называется подгруппа $P_G(H)$, порожденная всеми теми циклическими подгруппами группы G, каждая из которых перестановочна с H:

$$P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x\rangle H = H\langle x\rangle\rangle \,.$$

Понятно, что пермутизатор подгруппы H содержит ее нормализатор: $P_G(H) \geq N_G(H)$. В [**2**] доказано, что группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, если $P_G(X) = G$ для каждой силовской подгруппы X группы G. В [**3**] описана структура группы G, в которой $P_Y(X) = Y$ для каждой силовской подгруппы X в G и каждой подгруппы $Y \geq X$.

Следуя [**3**], подгруппу H группы G будем называть

пермутируемой в G, если $P_G(H) = G$;

сильно пермутируемой в G, если $P_U(H) = U$ для любой подгруппы U из G такой, что $U \geq H$.

Заметим, что квазинормальная подгруппа сильно пермутируема. В симметрической группе S_n степени $n \in \{3, 4, 6\}$, силовская 2-подгруппа сильно пермутируема, но не квазинормальна.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если все примарные циклические подгруппы группы G сильно пермутируемы в G, то группа G сверхразрешима.*

Список литературы

[1] Weinstein M. Between Nilpotent and Solvable. Polygonal. Passaic, N.J. 1982.

[2] Liu X., Wang Y. Implications of permutizers of some subgroups in finite groups. Comm. Algebra. 2005. 33. 559–565.

[3] Васильев А. Ф., Васильев В. А., Васильева Т. И. О пермутируемых подгруппах конечных групп. Сиб. матем. журн. 2014. 55:2. 285–295

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: victor.monakhov@gmail.com
Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)
E-mail: irina.sokhor@gmail.com

АТ-группы, не являющиеся АТ-подгруппами

А. В. Рожков

АТ-группы (1986) - это обобщение известного примера С.В.Алешина (1972) ф.а. бернсайдовой группы бесконечного периода. Пусть A — последовательность множеств, T — слойно однородное дерево, построенное над A. Группа, порожденная корневыми и продольными автоморфизмами дерева T называется АТ-группой над деревом T. Подгруппа АТ-группы называется АТ-подгруппой, если она АТ-группа над тем же деревом T, что и объемлющая группа. Если последовательность A состоит из групп, то АТ-группа называется регулярной, если из циклических групп конечного порядка $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, ...)$, то AT_Ω-группой, а из циклических групп простого порядка $\omega = (\omega_1, \omega_2, ...)$, AT_ω-группой.

Вопрос 16.79. *Верно ли, что в любой конечно порожденной АТ-группе над последовательностью циклических групп, порядки которых ограничены, все силовские подгруппы локально конечны?*

На конференции (Геленджик, 2018) было доложено, что ответ отрицательный и приведено несколько примеров. Вот более полное решение вопроса.

Теорема 1. *Если ограниченная последовательность ω, начиная с некоторого номера, стабилизируется на простом числе p, то существует AT_ω-группа с нелокально конечной силовской p-подгруппой. Если последовательность ω не имеет предела, т.е. не стабилизируется, все силовские подгруппы любой такой AT_ω-группы локально конечны.*

Теорема 2. *Если у ограниченной последовательности Ω,(не являющейся ω) все члены, начиная с некоторого номера, делятся на простое число p, то существует AT_Ω-группа с нелокально конечной силовской p-подгруппой, которая будет AT-группой, но не AT-подгруппой. Если ни один "хвост" последовательности Ω не имеет такого простого числа p, то все силовские подгруппы любой такой AT_Ω-группы локально конечны.*

1. В классе AT_ω-групп нет групп, у которых есть подгруппы, являющиеся АТ-группами, но не АТ-подгруппами.

2. Теорема 1 не является частным случаем теоремы 2, они дополняют друг друга.

3. AT_ω-группы отличаются от остальных АТ-групп так же сильно, как циклические группы простого порядка отличаются от других простых групп.

4. Группа $\mathbb{Z}_p$ порождается любым своим нееденичным элементом, является полем, сопровождающие перестановки задаются векторами и т.д. что существенно облегчает изучение AT_ω-групп. Именно поэтому почти все исследованные к настоящему времени АТ-группы являются AT_ω-группами.

Проект реализуется победителем Конкурса на предоставление грантов благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина

Кубанский государственный университет, Краснодар
E-mail: great.ros.marine2@gmail.com

О группах Шункова, насыщенных специальными линейными группами степенни три над конечными полями нечетной характеристики

И. В. Сабодах, А. К. Шлепкин

По определению, группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X (множество X называется *насыщающим множеством* для группы G) [**1**]. Напомним, что группа G (сопряженно бипримитивно конечная группа в определении В.П. Шункова, [**2**]) называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы $H \leq G$ в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. В [**3**] доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества групп $\{SL_2(p^n)\}$, где p и n не фиксируются, изоморфна $SL_2(Q)$, где Q — локально конечное поле. Естественно рассмотреть случай, когда группа Шункова насыщена группами из множеств групп $\{SL_3(p^n)\}$. Поучен следующий результат.

Теорема. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\{SL_3(p^n)\}$, где p — фиксированное простое чсло, n не фиксируется, обладает периодической частью которая изоморфна $SL_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики p.*

Работа первого автора выполнена за счёт гранта Российского научного фонда, проект 19-71-10017.

Список литературы

[1] Шлепкин А. К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Математические труды. 1998. 1 (1). 129–138.

[2] Шунков В. П. Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. 9. 484–496.

[3] Рубашкин А. Г., Филиппов К. А. О периодических группах, насыщенных $SL_2(p^n)$ // Сибирский математический журнал. 2005. 46 (6). 1388–1392.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: sabodax@mail.ru
Сибирский государственный аэрокосмический университет, Красноярск
E-mail: akkgau@mail.ru

n-Кратно σ-локальные формации конечных групп с булевыми подрешетками

И. Н. Сафонова

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, G — группа и $\mathfrak{F}$ — класс групп. Тогда [**1**] $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(|G|) \neq \emptyset\}$; $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{F}} \sigma(G)$. Функция f вида $f : \sigma \to$ {формации групп} называется формационной σ-функцией. Для всякой формационной σ-функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом: $LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1$ или $G \neq 1$ и $G/O_{\sigma'_i,\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$. Если $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то формацию $\mathfrak{F}$ называют σ-локальной, а формационную σ-функцию f — σ-локальным определением формации $\mathfrak{F}$. Всякую формацию называют 0-кратно σ-локальной. При $n > 0$, формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно σ-локальной [**1**], если либо $\mathfrak{F} = (1)$ — класс всех единичных групп, либо $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)$ — $(n-1)$-кратно σ-локальная формация для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.

Для всякого набора групп $\mathfrak{X}$ символ $l_n^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначает пересечение всех n-кратно σ-локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Для любых двух l_n^σ-формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M} \vee_n^\sigma \mathfrak{H} = l_n^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

Совокупность l_n^σ всех n-кратно σ-локальных формаций образует полную алгебраическую модулярную решетку [**2**], в которой $\cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ является точной нижней гранью и $l_n^\sigma\mathrm{form}(\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j)$ — точной верхней гранью $\{\mathfrak{F}_j \in l_n^\sigma \mid j \in J\}$ в l_n^σ. Формации из l_n^σ называют l_n^σ-формациями. l_n^σ-Подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$ называется l_n^σ-дополнением к l_n^σ-подформации $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F} = l_n^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Если $\mathfrak{F}$ — l_n^σ-формация, то через $L_n^\sigma(\mathfrak{F})$ обозначают решетку ее l_n^σ-подформаций.

Основным результатом работы является следующая теорема, дающая описание l_n^σ-формаций с булевыми решетками l_n^σ-подформаций.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно σ-локальная формация, где $n \geq 1$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) решетка $L_n^\sigma(\mathfrak{F})$ булева;

2) $\mathfrak{F} = \oplus_{\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{F})}\mathfrak{G}_{\sigma_i}$, где $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ — класс всех σ_i-групп;

3) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})}$ — класс всех σ-нильпотентных $\sigma(\mathfrak{F})$-групп;

4) в $\mathfrak{F}$ дополняема каждая подформация вида $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобразования Республики Беларусь (проект 20211328).

Список литературы

[1] Skiba A.N. On one generalization of the local formations. Probl. Phys. Math. Tech.. 2018; 34(1), 79–82.
[2] Chi Z., Safonov V.G., Skiba A.N. On n-multiply σ-local formations of finite groups. Comm. Algebra. 2019; 47(3), 957–968.

Белорусский государственный университет, Минск
E-mail: safonova@bsu.by

О группах с симплектическими 3-транспозициями

В. М. Синицин, А. И. Созутов

В работе [**1**] были описаны минимальные системы $\{w_1, ..., w_n\}$ порождающих симплектических трансвекций групп $Sp_{2l}(2)$ и $O^{\pm}_{2l}(2)$ $(l \geq 3)$, графы Кокстера Γ_n [**2**] которых являются деревьями с n вершинами ($n = 2l + 1$ для $Sp_{2l}(2)$ и $n = 2l$ для $O^{\pm}_{2l}(2)$). Множество трансвекций в $W_n = W(\Gamma_n) \in \{Sp_{2l}(2), O^{\pm}_{2l}(2)\}$ является классом 3-транспозиций [**3**, теорема 2.58], и в W_n выполняются соотношения $(w_i w_j)^{m_{ij}} = 1$ группы Кокстера ранга n: $G_n = \langle s_1, ..., s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}}, m_{ij} \leq 3 \rangle$, где $m_{ii} = 1$, $1 \leq i < j \leq n$ и $m_{ij} = 3$, или $m_{ij} = 2$ в зависимости от того, есть в Γ_n ребро (i, j), или такого ребра нет. По теореме Дика отображение $s_i \to w_i$ $(i = 1, ..., n)$ продолжается до сюрьективного гомоморфима $\varphi_n : G_n \to W_n$ с ядром $K_n = \operatorname{Ker} \varphi_n$, и генетический код группы W_n в данной системе порождающих состоит из кода группы G_n и некоторых дополнительных соотношений. Как доказано в [**4**] с помощью системы вычислительной алгебры GAP для $n = 2l \leq 20$ достаточно одного дополнительного соотношения, а для $n = 2l+1 \leq 20$ — двух соотношений. Эти соотношения указаны в [**4**] как слова от $s_1, ..., s_m$ $(m \leq 9)$. Гипотеза о том, что указанные в [**4**] генетические коды и при $l \geq 10$ определяют группы с симплектическими 3-транспозициями $Sp_{2l}(2)$, $O^{\pm}_{2l}(2)$, пока не доказана.

Получена характеризация групп Фишера $W_n \in \{Sp_{2l}(2), O^{\pm}_{2l}(2)\}$ [**3**, теорема 2.58] как фактор-групп групп Кокстера G_n, указывающая на их близкое "родство":

Группа Кокстера G_n с графом Γ_n, $n = 2l + 1 \geq 9$, имеет единственную простую неабелеву фактор-группу; эта фактор-группа совпадает с G_n/K_n и изоморфна $Sp_{2l}(2)$.

Группа Кокстера G_n с графом Γ_n, $n = 2l \geq 6$, имеет единственную фактор-группу с простым неабелевым коммутантом; данная фактор-группа совпадает с G_n/K_n и изоморфна одной из групп $O^{-}_{2l}(2)$, $O^{+}_{2l}(2)$.

Есть основания также предполагать, что ядро $K_n = \operatorname{Ker} \varphi_n$ является в G_n максимальной нормальной подгруппой без кручения.

Работа поддержана РФФИ (грант 19-01-00566 А) и Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Список литературы

[1] Созутов А.И., Синицин В.М. О графах Кокстера групп с симплектическими 3-транспозициями // Тр. ИММ УрО РАН, 22:3 (2016), 251–258

[2] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы, порождённые отражениями. IV–VI. М.: Мир, 1972.

[3] Горенстейн Д. Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.

[4] Созутов А. И., Синицин В. М. О связи некоторых групп, порожденных 3-транспозициями, с группами Кокстера, Тр. ИММ УрО РАН, 26:4 (2020), 234–243.

КВСОШ 10, Красноярск
E-mail: sinkoro@yandex.ru
СФУ, Красноярск
E-mail: sozutov_ai@mail.ru

О $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгруппах конечных групп

М. М. Сорокина, С. П. Максаков

Рассматриваются только конечные группы. Понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы произвольной конечной группы (Л.А. Шеметков, 1974), где $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп, является естественным обобщением понятия субнормальной подгруппы (см. [**1**]). Общая теория $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп разработана С.Ф. Каморниковым (см., например, [**2**], глава 3). В [**3**] получено описание наследственных локальных формаций $\mathfrak{F}$, обладающих решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, тем самым решена проблема Л.А. Шеметкова нахождения условий, при которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе G образует решетку ([**1**], проблема 12). При изучении и применении ω-локальных формаций, где ω – непустое множество простых чисел, целесообразным оказалось рассмотрение определенных подгрупп в конечных группах с учетом множества ω. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Следуя [**1**], подгруппу H группы G назовем $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная $(G - H)$-цепь $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_k = H$ такая, что $H_i/(Core_{H_i}(H_{i+1}) \cap O_{\omega}(H_i)) \in \mathfrak{F}$, где $O_{\omega}(H_i)$ – наибольшая нормальная ω-подгруппа группы H_i, $i = \overline{0, k-1}$ [**4**]. Отметим, что если класс $\mathfrak{F}$ является гомоморфом, то всякая $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная в группе G подгруппа является $\mathfrak{F}$-субнормальной в G. В случае, когда $\pi(G) = \omega$, множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп группы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. В теореме 1 установлены условия, при которых наследственная ω-локальная формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп. Класс групп $\mathfrak{F}$ назовем R^{ω}-замкнутым, если из того, что A и B – нормальные ω-подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, всегда следует, что $\langle A, B\rangle \in \mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная ω-локальная формация. Множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп в любой конечной группе образует решетку в том и только в том случае, когда формация $\mathfrak{F}$ является R^{ω}-замкнутой и в любой группе всякая $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа содержится в ее $\mathfrak{F}$-радикале.*

Список литературы

[1] Шеметков Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978.

[2] Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. – Минск: Беларуская навука, 2003.

[3] Васильев А.Ф., Каморников С.Ф., Семенчук В.Н. О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. 27–54.

[4] Сорокина М.М., Максаков С.П. О нормальности $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальных максимальных подгрупп конечных групп // Математические заметки, 2020. 108 (3). 428–440.

Брянский государственный университет имени И.Г. Петровского, Брянск
E-mail: mmsorokina@yandex.ru, msp222@mail.ru

О группе $Lim(N)$

Н. М. Сучков

Пусть $S(N)$ — группа всех подстановок множества натуральных чисел N. Изучается группа

$$G = \{g \mid g \in S(N),\ \omega(g) = \max_{\alpha \in N} |\alpha - \alpha^g| < \infty\}$$

ограниченных подстановок множества N.

Теорема 1. *Группа G является расширением локально конечного радикала посредством локально финитно аппроксимируемой группы.*

Теорема 2. *Любая бесконечная конечно порождённая простая группа не изоморфна подгруппе группы G.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00566 А.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: ns7654321@mail.ru

О формулах групповой сигнатуры, построенных по графам

Е. И. Тимошенко

По конечному неориентированному графу Γ без петель определяется предложение $\Phi(\Gamma)$ теории групп. Используя последовательность графов Γ_i, получаем последовательность предложений $\Phi(\Gamma_i)$. С их помощью определяется $\Gamma-$размерность группы и исследуются свойства размерности. При некоторых ограничениях на группу известная централизаторная размерность является $\Gamma-$размерностью для некоторой последовательности графов. Основное внимание уделено размерностям, определенным с помощью линейных графов и циклов. Вычисляются размерности для некоторых частично коммутативных метабелевых групп.

НГТУ, Новосибирск
E-mail: eitim45@gmail.com

О корадикале конечной группы, факторизуемой слабо субнормальными подгруппами

А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы. Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B.

В работе [**1**] введено следующее понятие: подгруппа H называется *слабо субнормальной в* G, если $H = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и полунормальной подгруппы B из G.

Очевидно, что если подгруппа H полунормальна в G, то она слабо субнормальна в G. Обратное не всегда выполняется. Например, в знакопеременной группе $G = A_4$ максимальная подгруппа из подгруппы $V = Z_2 \times Z_2$ является субнормальной в G, но не полунормальной в G.

В работе [**2**] были исследованы группы $G = AB$ с полунормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B. В частности, установлено, что $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}}$, см. [**2**, теорема 2.3]. Авторы работы [**1**] развили этот результат на случай слабо субнормальных сомножителей. Здесь $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}$ — формации всех сверхразрешимых и нильпотентных групп, а $H^{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{X}$-корадикал группы H.

Пусть p, q — простые числа и $\mathfrak{S}_{\{p,q\}}$ — формация всех $\{p, q\}$-групп. Для группы G, $|\pi(G)| > 2$, в [**2**] введено следующее обозначение:

$$\mathfrak{B}(G) = \bigcap_{\forall \{p,q\} \subseteq \pi(G)} G^{\mathfrak{S}_{\{p,q\}}}.$$

Если $|\pi(G)| \leq 2$, то считаем $\mathfrak{B}(G) = 1$.

В настоящей заметке представлена новая информация о строении корадикала групп, факторизуемых слабо субнормальными подгруппами.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация такая, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G = AB$, где A и B — слабо субнормальные подгруппы группы G. Тогда:*

1) *если подгруппы A и B принадлежат $\mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \leq (G')^{\mathfrak{N}}$.*

2) *если подгруппы A и B принадлежат $\mathfrak{U}$ и $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то $G^{\mathfrak{U}} = G^{\mathfrak{N}^2} \cap \mathfrak{B}(G) = (G')^{\mathfrak{N}}$.*

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция — 2025» (задание 1.1.02 подпрограммы 11.1 «Математические модели и методы») при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Список литературы

[1] Хуан Ц., Ху Б., Скиба А. Н. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2021. 62 (1). 210–220.

[2] Монахов В. С., Трофимук А. А. О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами // Сиб. матем. ж. 2020. 61 (1). 148–159.

Брестский университет им. А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)
E-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

О группах, насыщенных полными линейными группами степенни три над конечными полями нечетной характеристики

А. А. Шлепкин

По определению, группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X (множество X называется *насыщающим множеством* для группы G) [**1**]. Напомним, что группа G (сопряженно бипримитивно конечная группа в определении В.П. Шункова, [**2**]) называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы $H \leq G$ в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. В [**3**] доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества групп $\{GL_2(p^n)\}$, где p и n не фиксируются, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q — локально конечное поле. Естественно рассмотреть случай, когда группа Шункова насыщена группами из множеств групп $\{GL_3(p^n)\}$. Получен следующий результат.

Теорема. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\{GL_3(3^n)\}$, где n не фиксируется, обладает периодической частью, которая изоморфна $GL_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики* 3.

Работа автора выполнена за счёт гранта Российского научного фонда, проект N 19-71-10017.

Список литературы

[1] Шлепкин А. К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Математические труды. 1998. 1 (1). 129–138.
[2] Шунков В. П. Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. 9 (4). 484–496.
[3] Шлепкин А. А. О группах, насыщенных $GL_2(p^n)$ // Вестник СибГАУ. 2013. 1. 100—108.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: shlyopkin@gmail.com

On listing the spectra of finite simple groups

A. A. Buturlakin

The spectrum $\omega(G)$ is the set of orders of elements of a group G. Let G be a finite nonabelian simple group. We discuss whether there exists an algorithm that, given the degree of G if it is an alternating group and the Lie type, Lie rank and order of the underlying field if G is a group of Lie type, outputs the spectrum of G. Since the spectrum is large compared to these parameters, we are looking for an algorithm with processing time bounded by a polynomial in the length of the output.

Let $\mu(G)$ be the set of elements of $\omega(G)$ that are maximal with respect to divisibility. Since the spectrum is closed under taking divisors, it is uniquely determined by any subset of $\omega(G)$ that contains $\mu(G)$.

Define the length of a set of positive integers S as the sum of $\log s$ where s runs through S.

We prove the following statements.

Theorem. *Let G be a finite simple group.*

(1) *If G is an alternating group, then there is an algorithm that, given the degree of G outputs $\mu(G)$ and $\omega(G)$ in time bounded by a polynomial of the length of the output.*

(2) *If G is an exceptional group of Lie type, then there is an algorithm that, given the Lie type and the order of the underlying field of G outputs $\mu(G)$ in time bounded by a polynomial of the length of the output.*

(3) *If G is a classical group, that given the Lie type, Lie rank and the order of the underlying field of G, outputs $\mu(G)$ in time $m^{O(\sqrt{\log\log m})}$, where m is the length of the output.*

This result together with the main result of [**1**] provides that there exists an algorithm that given a finite set of positive integers $\mathcal{M}$ outputs a finite simple group G whose spectrum coincides with the set of divisors of elements of $\mathcal{M}$, or says that there is no such a group. If m is the length of $\mathcal{M}$, then the proceeding time of the algorithm is bounded by a polynomial of m if G is an alternating group or an exceptional group of Lie type, and is $m^{O(\sqrt{\log\log m})}$ if G is a classical group or there is no finite simple group G satisfying the condition.

The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2019-1613 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

References

[1] Buturlakin A. A, Vasil'ev A. V. The graph of atomic divisors and recognition of finite simple groups, J. Algebra, 537 (2019), 478–502.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: buturlakin@math.nsc.ru

On non-solvable finite groups isospectral to simple groups

M. A. Grechkoseeva

This is a joint work with A.V. Vasil'ev. Given a finite group G, we denote the set of prime divisors of the order of G by $\pi(G)$ and the set of element orders of G by $\omega(G)$. If $\omega(G) = \omega(H)$, then G and H are said to be isospectral.

Suppose that G is a finite group isospectral to a finite nonabelian simple group L. It is known that G is either solvable (in which case L is one of $L_3(3)$, $U_3(3)$, $S_4(3)$), or has exactly one nonabelian composition factor (see [**1**, Theorem 2]). We assume that G is not solvable, and so G has a normal series

$$1 \leqslant K < H \leqslant G, \tag{1}$$

where K is the solvable radical of G, H/K is a nonabelian simple group and G/K is an almost simple group with socle H/K.

If L is sufficiently 'large', more precisely, if L is a classical group of dimension at least 38 or a non-classical group other than Alt_6, Alt_{10}, J_2, ${}^3D_4(2)$, then $K = 1$ and $H \simeq L$ (see [**2**]). Furthermore, in the situation when $K = 1$ and $H \simeq L$, it follows that G/H is cyclic (see [**3**] and the references therein). If L is not sufficiently 'large', then K is not always trivial and H/K is not always isomorphic to L but in all known examples, G/H is cyclic. This observation suggests us to conjecture that G/H is always cyclic and our main goal is to prove this conjecture.

Theorem 1. *Let L be a finite nonabelian simple group and let G a be non-solvable finite group with $\omega(G) = \omega(L)$. Suppose that $1 \leqslant K < H \leqslant G$ is the normal series of G as in (1). Then G/H is cyclic.*

If L is alternating or sporadic, Theorem 1 is a direct consequence of the known description of groups isospectral to L (see [**1, 4**]). If L is a group of Lie type, the proof is based on the next result.

Theorem 2. *Suppose that a finite group G has a normal series $1 \leqslant K < H \leqslant G$, where K is the solvable radical of G and $S = H/K$ is a finite simple group of Lie type. Suppose also that K is nilpotent. If G/H is not cyclic, then there is $r \in \pi(G/H)$ such that $rs \in \omega(G)$ for all $s \in \pi(G) \setminus \{r\}$.*

References

[1] Gorshkov I. B., Recognizability of alternating groups by spectrum, Algebra Logic 52 (2013), no. 1, 41–45.

[2] Grechkoseeva M. A. and Vasil'ev A. V., On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups J. Group Theory 18 (2015), no. 5, 741–759.

[3] Grechkoseeva M. A., On spectra of almost simple extensions of even-dimensional orthogonal groups, Siberian Math. J. 59 (2018), no. 4, 623–640.

[4] Mazurov V. D. and Shi W.J., A note to the characterization of sporadic simple groups,Algebra Colloq. 5 (1998), no. 3, 285–288.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: grechkoseeva@gmail.com

Recognition of the group $E_6(2)$ by Gruenberg-Kegel graph

W. Guo, A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova

Gruenberg–Kegel graph (or *the prime graph*) of a finite group G is a simple graph $\Gamma(G)$ whose vertices are the prime divisors of the order of G, and two distinct vertices p and q are adjacent in $\Gamma(G)$ if and only if G contains an element of order pq. A finite group is called *recognizable by Gruenberg–Kegel graph* if it is determined uniquely up to isomorphism in the class of finite groups by its Gruenberg–Kegel graph.

In finite group theory, the direction of the study of recognition of a finite group by its Gruenberg-Kegel graph is active developed. Contemporary state of the direction can be found, for example, in the recent paper by P. J. Cameron and N. V. Maslova [**1**], where, in particular, it was proved that if a finite group is recognizable by Gruenberg-Kegel graph, then the group is almost simple, i. e., it has nonabelian simple socle. In this work, we make a one more step in the solving the problem of the recognition of a finite simple group by its Gruenberg–Kegel graph. We prove the following theorem.

Theorem. *Finite simple exceptional group of Lie type $E_6(2)$ is recognizable by Gruenberg–Kegel graph.*

Acknowledgements. The work is supported by the National Natural Science Foundation of China (project No. 12171126), by Wu Wen-Tsun Key Laboratory of Mathematics of Chinese Academy of Sciences, and by the Regional Scientific and Educational Mathematical Center "Ural Mathematical Center" under the agreement No. 075-02-2021-1387 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

References

[1] Cameron P. J., Maslova N. V., Criterion of unrecognizability of a finite group by its Gruenberg–Kegel graph // arXiv:2012.01482v2 [math.GR].

Hainan University, Haikou, Hainan (China), University of Science and Technology of China, Hefei (China)
E-mail: wbguo@ustc.edu.cn

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ural Federal University, Ural Mathematical Center, Yekaterinburg
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ural Federal University, Ural Mathematical Center, Yekaterinburg
E-mail: butterson@mail.ru

Recognition of groups $E_6(3)$ and ${}^2E_6(3)$ by their Gruenberg–Kegel graphs

A. P. Khramova, N. V. Maslova, V. V. Panshin, A. M. Staroletov

Let G be a finite group. Denote by $\pi(G)$ the set of all prime divisors of $|G|$. The *Gruenberg–Kegel graph* (or the *prime graph*) $\Gamma(G)$ of G is defined as a simple graph with vertex set $\pi(G)$, where vertices p and q are adjacent if and only if there is an element of order pq in G.

We say that a finite group G is *recognizable* (*by Gruenberg-Kegel graph*) if for each finite group L, the equality $\Gamma(G) = \Gamma(L)$ implies $G \cong L$. It is known that if a finite group is recognizable, then the group is almost simple [**1**, Theorem 1.3]; some known results on recognition of finite groups are also surveyed in [**1**]. Recently W. Guo, A. S. Kondrat'ev, and the second author have proved that the finite simple group $E_6(2)$ is recognizable. We prove the following statement.

Theorem. *Finite simple groups $E_6(3)$ and ${}^2E_6(3)$ are recognizable by their Gruenberg–Kegel graphs.*

This result was obtained in the frame of The Great Mathematical Workshop which was organized by the Mathematical Center in Akademgorodok in Summer of 2021.

Acknowledgement. The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2019-1675 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

References

[1] Cameron P. J. and Maslova N. V., Criterion of unrecognizability of a finite group by its Gruenberg–Kegel graph, arXiv:2012.01482[math.GR].

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: akhramova@math.nsc.ru, staroletov@math.nsc.ru
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ural Federal University, and Ural Mathematical Center, Yekaterinburg
E-mail: butterson@mail.ru
Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: v.pansh1n@yandex.ru

On pronormality of subgroups of odd index in finite simple unitary groups

A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, D. O. Revin

We consider only finite groups, and henceforth the term group means finite group. A subgroup H of a group G is said to be *pronormal* in G (notation $H \, prn \, G$) if H and H^g are conjugate in $\langle H, H^g \rangle$ for each $g \in G$. In 2012, E. P. Vdovin and the third author [**4**] proved that the Hall subgroups (when they exist) are pronormal in all simple groups and, guided by the analysis in their proof, they conjectured that any subgroup of odd index of a simple group is pronormal in this group. We have disproved this conjecture in [**3**], in [**1**] and [**2**] we have completed a classification of finite simple groups G such that the subgroups of odd indices are pronormal in G and $C_G(S) \leq S$ for a Sylow 2-subgroup S of G or G is a simple exceptional group of Lie type, respectively. Thus, at this moment the problem of classification of nonabelian simple groups in which the subgroups of odd index are pronormal is still open for the following groups: $PSL_n(q)$ and $PSU_n(q)$, where q is odd and n is not a power of 2.

Let m and n be non-negative integers with the binary expansions $m = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 2^i$ and $n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot 2^i$, where $a_i, b_i \in \{0, 1\}$ for every i. We write $m \preceq n$ if $a_i \leq b_i$ for each i and $m \prec n$ if additionally $m \neq n$. We prove the following theorem.

Theorem. *Let $n \geq 3$ be an integer and q be a power of an odd prime. If g.c.d.$(m, q+1)$ is not a power of 2 for some positive integer m such that $m \prec n$, then the group $PSU_n(q)$ contains a non-pronormal subgroup of odd index.*

Acknowledgement. This work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

References

[1] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., Finite simple exceptional groups of Lie type in which all the subgroups of odd index are pronormal, Journal of Group Theory, 23 (2020), 999–1016, https://doi.org/10.1515/jgth-2020-0072.

[2] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., On pronormal subgroups in finite simple groups, Doklady Mathematics, 98:2 (2018), 405–408, https://doi.org/10.1134/S1064562418060029.

[3] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., A pronormality criterion for supplements to abelian normal subgroups, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues), 296:Suppl. 1 (2017), S145–S150, https://doi.org/10.1134/S0081543817020134.

[4] Vdovin E. P., Revin D. O., Pronormality of Hall subgroups in finite simple groups, Siberian Math. J. 53:3 (2012), 419–430, https://doi.org/10.1134/S0037446612020231.

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, butterson@mail.ru
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk; N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg
E-mail: revin@math.nsc.ru

On finite solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw

A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov

The *Gruenberg–Kegel graph* (or the *prime graph*) $\Gamma(G)$ of a finite group G is a graph, in which the vertex set is the set of all prime divisors of the order of G and two different vertices p and q are adjacent if and only if there exists an element of order pq in G. The paw is a graph on four vertices whose degrees are 1, 2, 2, and 3.

A. S. Kondrat'ev has described finite groups with the same Gruenberg–Kegel graphs as groups $Aut(J_2)$ (see [**1**]) and A_{10} (see [**2**]). The Gruenberg–Kegel graphs of all these groups are isomorphic as abstract graphs to the paw.

We establish the following more general problem: to describe finite groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic as abstract graphs to the paw.

As a part of the solution of this problem, in [**3**] we have proved that if G is a finite non-solvable group and the graph $\Gamma(G)$ as abstract graph is isomorphic to the paw, then the quotient group $G/S(G)$ (where $S(G)$ is the solvable radical of G) is almost simple, and have classified all finite almost simple groups such that their Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the paw. Also we have classified in [**4**] finite non-solvable groups G whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to the paw in the followings two cases: (1) G has no elements of order 6; (2) G contains element of order 6 and the vertex of degree 1 in the graph $\Gamma(G)$ divides $|S(G)|$.

In this talk, we discuss a recent progress in description of finite solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic as abstract graphs to the paw.

Acknowledgments. The work is supported by Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

References

[1] Kondrat'ev A. S., Finite groups with prime graph as in the group $Aut(J_2)$. Proc. Steklov Inst. Math. 283 (2013) 78–85.
[2] Kondrat'ev A. S., Finite groups that have the same prime graph as the group A_{10}. Proc. Steklov Inst. Math. 285 (2014) 99–107.
[3] Kondrat'ev A.S., Minigulov N. A., Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group A_{10}. Siberian Electr. Math. Rep. 15 (2018) 1378–1382.
[4] Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A., On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw. Commun. Math. Stat. (accepted for publication).

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, n.a.minigulov@imm.uran.ru

Finite simple groups with two maximal subgroups of coprime orders

N. V. Maslova

In 1962, V. A. Belonogov [**1**] proved that if a finite group G contains two maximal subgroups of coprime orders, then either G is one of known solvable groups or G is simple. Basing on results by M. Liebeck and J. Saxl [**2**] on odd order maximal subgroups in finite simple groups we determine possibilities for triples (G, H, M), where G is a finite nonabelian simple group, H and M are maximal subgroups of G with $(|H|, |M|) = 1$.

Acknowledgement. This work was funded by RFBR and BRFBR, project no. 20-51-00007.

References

[1] Belonogov V.A., On maximal subgroups. II, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 5 (1962), 3–11 (in Russian).

[2] Liebeck M., Saxl J., On point stabilizers in primitive permutation groups, Communicatons in Algebra 19 (10) (1991), 2777–2786.

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ural Federal University, Ural Mathematical Center, Yekaterinburg
E-mail: butterson@mail.ru

On non one-generated totally σ-local formations

I. N. Safonova, V. G. Safonov

All considered groups are finite. Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, that is, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ for all $i \neq j$, and let G be a group, $\mathfrak{F}$ a class of groups. Then [**1**] $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(|G|) \neq \emptyset\}$, $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}}\sigma(G)$, and a group G is called: σ-primary if G is a σ_i-group for some i; σ-soluble if $G = 1$ or $G \neq 1$ and every chief factor of G is σ-primary. The class of all σ-soluble groups is denoted by $\mathfrak{S}_\sigma$. If $\sigma(G) \subseteq \Pi \subseteq \sigma$, then G is said to be a Π-group. The symbol $\mathfrak{S}_\Pi$ denotes the class of all σ-soluble Π-groups.

A function f of the form $f : \sigma \to \{\text{formations of groups}\}$ is called [**2**] a formation σ-function. For any formation σ-function f the class $LF_\sigma(f)$ is defined as follows: $LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ or } G \neq 1 \text{ and } G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma(G))$. If for some formation σ-function f we have $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, then the class $\mathfrak{F}$ is called σ-local and f is called a σ-local definition of $\mathfrak{F}$. Every formation is called 0-multiply σ-local. For $n > 0$, a formation $\mathfrak{F}$ is called n-multiply σ-local provided either $\mathfrak{F} = (1)$ is the class of all identity groups or $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, where $f(\sigma_i)$ is $(n-1)$-multiply σ-local for all $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$. A formation is called totally σ-local if it is n-multiply σ-local for all n.

For any collection of groups $\mathfrak{X}$, $l_\infty^\sigma\text{form}(\mathfrak{X})$ denotes the totally σ-local formation generated by $\mathfrak{X}$, i.e. $l_\infty^\sigma\text{form}(\mathfrak{X})$ is the intersection of all totally σ-local formations containing the collection of groups $\mathfrak{X}$. If $\mathfrak{X} = \{G\}$ for some a group G, then $\mathfrak{F} = l_\infty^\sigma\text{form}(G)$ is called a one-generated totally σ-local formation.

The study of general properties of totally σ-local formations and its lattices was started in [**3**]. In this work, we have established the following result.

Theorem. *Let $\mathfrak{F}$ be non one-generated totally σ-local formation. Then all proper totally σ-local subformations of $\mathfrak{F}$ are one-generated if and only if $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\Pi$ is a formation of all σ-soluble Π-groups, where $|\Pi| = 2$.*

In the classical case, when $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ we get the following result.

Corollary [**4**]. *Let $\mathfrak{F}$ be non one-generated totally local formation. Then all proper totally local subformations of $\mathfrak{F}$ are one-generated if and only if $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ is a formation of all soluble π-groups, where $|\pi| = 2$.*

The work is supported by the Ministry of Education of Belarus (grant 20211328).

References

[1] Skiba A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups. J. Algebra. 2015; 436, 1–16.
[2] Skiba A.N. On one generalization of the local formations. Probl. Phys. Math. Tech. 2018; 34 (1), 79–82.
[3] Safonova I.N., Safonov V.G. On some properties of the lattice of totally σ-local formations of finite groups. J. Belarusian State University. Math. and Informatics. 2020; 3, 6–16.
[4] Safonov V.G. A question in the theory of totally local formations of finite groups. Algebra and Logic. 2003; 42 (6), 407–412.

Belarusian State University, Minsk (Belarus)
E-mail: safonova@bsu.by, vgsafonov@bsu.by

Group identities preserved by m-closures

S. V. Skresanov

A permutation group G on Ω acts naturally on the Cartesian power Ω^m; orbits in such action are called m-orbits. The largest permutation group on Ω having the same m-orbits as G is called the *m-closure* of G.

Certain classes of groups are preserved by m-closures, for example, the 2-closure of an abelian group is abelian [**1**], the 2-closure of a nilpotent group is nilpotent [**2**], the 3-closure of a solvable group is solvable [**3**].

In our contribution we give a sufficient condition for the m-closure to preserve certain group identities. Presented theorem generalizes some well-known results as well as implies new ones, for instance, we show that the 4-closure of a metabelian group is metabelian.

References

[1] Wielandt H.W., Permutation groups through invariant relations and invariant functions, The Ohio State University, 1969.
[2] Churikov D., Ponomarenko I., On 2-closed abelian permutation groups, arXiv: 2011.12011.
[3] O'Brien E.A., Ponomarenko I., Vasil'ev A.V., Vdovin E., The 3-closure of a solvable permutation group is solvable, Journal of Algebra, 2021.

Sobolev Institute of Mathematics; Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: skresan@math.nsc.ru

Groups and algebras of Jordan type

A. M. Staroletov

Axial algebras of Jordan type η were introduced in [**1**]. These are commutative algebras generated by idempotents whose adjoint operators have the minimal polynomial dividing $(x-1)x(x-\eta)$, where $\eta \notin \{0,1\}$ is fixed, with restrictive multiplication rules. These properties generalize the Peirce decompositions for idempotents in Jordan algebras, where $\frac{1}{2}$ is replaced with η.

It turned out that for each generating idempotent one can construct an algebra automorphism of order two which is called a Miyamoto involution. In the talk, we will discuss the properties of finite groups that are generated by Miyamoto involutions of axial algebras over different fields.

The work is supported by Mathematical Center in Akademgorodok under agreement No. 075-15-2019-1675 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

References

[1] Hall J.I., Rehren F., Shpectorov S., Primitive axial algebras of Jordan type, J. Algebra 437 (2015), 79–115

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: staroletov@math.nsc.ru

VII. Секция «Теория колец»

Комбинаторное описание дифференцирований в групповых алгебрах

А. А. Арутюнов

Пусть G – конечнопоржденная группа, и $\mathbb{C}[G]$ – групповая алгебру, т.е. пространство конечных линейных комбинаций $\sum_i \lambda_i g_i$. Дифференцированиями назовем всевозможные линейные операторы $d : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$, удовлетворяющие правилу Лейбница $d(uv) = d(u)v + ud(v), \forall u, v \in \mathbb{C}[G]$.

Может быть построено (см. [**1, 2**]) описание дифференцирований в терминах т.н. характеров на группоиде. А именно, если Γ – группоид ассоциированный с внутренним действием, то определим характер как отображение $\chi : Hom(\Gamma) \to \mathbb{C}$ такое, что $\chi(\psi \circ \phi) = \chi(\psi) + \chi(\phi)$ для компонируемых морфизмов. Оказывается (см. [**1**]), что дифференцирования канонически описываются характерами.

Наряду со стандартными внутренними и внешними дифференцированиями, полезно рассмотреть квазивнутренние и квазивнешние дифференцирования (см. [**3**]). Квазивнутренние – порождаемые всеми характерами, принимающими нулевое значение на петлях. Как доказывается в [**3**] они образуют идеал. Это позволяет изучать алгебру квазивнешних дифференцирований (фактор-алгебру по квазивнутренним). Для этого используем известный инвариант, предложенный Столлингсом, – число концов группы, обозначаемый $e(G)$. Справедлива следующая

Теорема.

- *Если* $e(G) = 0$, *то все дифференцирования будут внутренними и поэтому алгебра* $OutDer(\mathbb{C}[G])$ *тривиальна.*
- *Если* $e(G) = 1$, *то имеется естественный изоморфизм*

$$OutDer(\mathbb{C}[G]) \cong \bigoplus_{[u]\in G^G} Hom(Z([u]), \mathbb{C}).$$

- *Если* $e(G) > 1$, *то имеется естественный изоморфизм*

$$QOutDer(\mathbb{C}[G]) \cong \bigoplus_{[u]\in G^G} Hom(Z([u]), \mathbb{C}).$$

Здесь $Hom(Z([u]), \mathbb{C})$ – некоторое линейное пространство комплекснозначных гомоморфизмов группы G.

Отметим, что может быть дано и описание обычных внешних дифференцирований в таких терминах, но оно выражается чуть более громоздкой формулой.

Такое описание не только позволяет получить удобное комбинаторное описание дифференцирований групповых алгебр, но и получить некоторые прикладные результаты (см. [**4**]).

Работа поддержана грантом Президента для молодых ученых - кандидатов наук МК-2364.2020.1.

Список литературы

[1] Arutyunov A. A., Mishchenko A. S., Shtern A. I.: Derivations of group algebras. Fundam. Prikl. Mat., **21**(6), 65-78 (2016) *arxiv: 1708.05005*

[2] Arutyunov A. A.: Derivation Algebra in Noncommutative Group Algebras. Proc. Steklov Inst. Math. **308**, 22-34 (2020).

[3] Arutyunov A. A., Alekseev A. V.: Complex of n-categories and derivations in group algebras., Topology and its Applications, **275**, 107002 (2020), *arxiv: 1808.07828*

[4] Arutyunov A.A., Kosolapov L.M.: Derivations of group rings for finite and FC groups, 2020 *arxiv: 2102.00829*

ИПУ РАН, Москва
E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com

О сжатых графах делителей нуля конечных коммутативных локальных колец

Е. В. Журавлев, О. А. Филина

Пусть S – коммутативная полугруппа с нулем. Введем на S отношение эквивалентности: $\forall x, y \in S \;\; x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y)$. Класс эквивалентности элемента $x \in S$ обозначим $[x]$, а соответствующее фактормножество $S/\!\sim$. Рассмотрим $S/\!\sim$ как полугруппу относительно операции $[x][y] = [xy]$. Сжатым графом делителей нуля $\Gamma(S/\!\sim)$ полугруппы S будем называть граф, вершинами которого являются элементы $S/\sim$ и две вершины $[x]$, $[y]$ (не обязательно различные) соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $[x][y] = [0]$ (равносильно $xy = 0$).

Пусть R – конечное коммутативное локальное кольцо с единицей, $J = J(R)$ – радикал Джекобсона, $F = R/J = GF(p^r)$. Существуют элементы $m_1, \ldots, m_h \in J$ такие, что кольцо R раскладывается в прямую сумму F-модулей (см. [**1**]):

$$R = F \oplus Fm_1 \oplus \ldots \oplus Fm_h.$$

Рассмотрим случай, когда $\mathrm{char} R = p$ и $\dim_F J/J^2 = 3$, $\dim_F J^2/J^3 = 1$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = 0$,

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_3 \oplus Fv \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, u_3, v, w\}$ – базис J над полем F, $u_1, u_2, u_3 \in J \setminus J^2$, $v \in J^2 \setminus J^3$, $w \in J^3$. В работе [**2**] классифицированы с точностью до изоморфизма все кольца R указанного типа. В настоящее время нами построены графы делителей нуля $\Gamma(R/\!\sim)$ всех таких колец. Далее, для примера, рассмотрим одно из колец со следующим умножением базисных элементов: $u_1^2 = v$, $u_2^2 = w$, $u_3^2 = w$, $u_1 v = w$, (см. [**2**], теорема 3, пункт 8).

В этом случае

$$R = [1] \bigcup_{s_i, l_j \in F} [u_1 + s_i u_2 + l_j u_3] \bigcup_{n_i, k_j \in F} [u_2 + n_i u_3 + k_j v] \bigcup_{m_i \in F} [u_3 + m_i v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

где

$$[u_1 + s_i u_2 + l_j u_3] = F^*(u_1 + s_i u_2 + l_j u_3) + Fv + Fw,$$
$$[u_2 + n_i u_3 + k_j v] = F^*(u_2 + n_i u_3 + k_j v) + Fw,$$
$$[u_3 + m_i v] = F^*(u_3 + m_i v) + Fw,$$
$$[v] = F^* v + Fw, \; [w] = F^* w, \; [0] = \{0\}, [1] = R^*,$$

и для любых $s_i, l_j, n_i, k_j, m_i \in F$, $i, j \in \{1, \ldots, p^r\}$ справедливо:

$$\mathrm{Ann}[u_1 + s_i u_2 + l_j u_3] = \bigcup_{n_\alpha \in F} [u_2 + n_\alpha u_3 - (s_i + l_j n_\alpha) v] \cup [u_3 - l_j v] \cup [w] \cup [0],$$

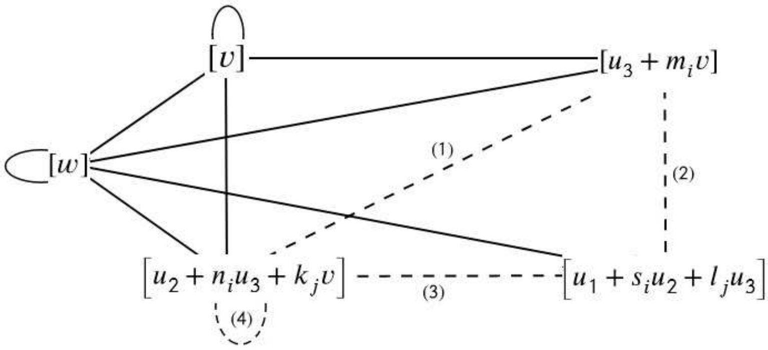
$$\mathrm{Ann}[u_2 + k_j v] = \bigcup_{l_\beta \in F} [u_1 - k_j u_2 + l_\beta u_3] \bigcup_{m_\alpha \in F} [u_3 + m_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$\mathrm{Ann}[u_2 + n_i u_3 + k_j v] = \bigcup_{l_\beta \in F} [u_1 - (k_j + l_\beta n_i) u_2 + l_\beta u_3]$$
$$\bigcup_{k_\alpha \in F} \left[u_2 - \frac{1}{n_i} u_3 + k_\alpha v\right] \cup [v] \cup [w] \cup [0], n_i \neq 0,$$

$$\mathrm{Ann}[u_3 + m_i v] = \bigcup_{s_\alpha \in F} [u_1 + s_\alpha u_2 - m_i u_3] \bigcup_{k_\alpha \in F} [u_2 + k_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$\mathrm{Ann}[v] = \bigcup_{n_\alpha, k_\beta \in F} [u_2 + n_\alpha u_3 + k_\beta v] \bigcup_{m_\alpha \in F} [u_3 + m_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[w] = J.$$

На рисунке представлено геометрическое изображение графа $\Gamma(R/\sim)$, за исключением вершин $[0]$ и $[1]$ ($[0]$ смежна со всеми вершинами, а $[1]$ смежна только $[0]$).



1) если $n_i = 0$;
2) если $m_i + l_j = 0$;
3) если $k_j + s_\alpha + l_\beta n_i = 0$;
4) если $n_i n_j + 1 = 0$.

В данном изображении вершины $[u_1 + s_i u_2 + l_j u_3]$, $[u_2 + n_i u_3 + k_j v]$, $[u_3 + m_i v]$ это группы вершин графа $\Gamma(R/\sim)$, причем пунктирные ребра означают смежность вершин графа при выполнение некоторых условий, указанных внизу рисунка.

Данная работа продолжает исследования по построению графов делителей нуля коммутативных колец порядка p^{6r} (для колец порядка p^{5r} задача решена в [**3**]). Этот результат, как пример, важен для актуальной в настоящее время тематике по классификации конечных колец, удовлетворяющих некоторому условию на их графы делителей нуля.

Список литературы

[1] Raghavendran R., Finite associative rings, Compositio Math., **21** (1969), 195–229.

[2] Zhuravlev E.V., On the classification of finite commutative local rings, Siberian Electronic Mathematical Reports, **3** (2006), 15–29.

[3] Bloomfield N., The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^3, Communication in Algebra, **41** (2013), 765–775.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: evzhuravlev@mail.ru, olya-filina@mail.ru

Дифференцирования в алгебрах, порожденных инверсными полугруппами

М. М. Кантария

В данной работе будут описаны дифференцирования в полугрупповых алгебрах в случае, когда полугруппа S является инверсной и представима в виде дизъюнктного объединения двух групп. Дифференцирования будут описаны в терминах полухарактеров на полукатегории $\mathfrak{K}$, подобно тому, как в работах [**1, 2**] описание даётся в терминах характеров на группоиде присоединенного действия группы.

Структура полукатегории очень похожа на структуру категории за исключением требования существования нейтральных морфизмов.

Определение. *Полухарактером наывается такое отображение на полукатегории $\varrho\chi : Hom(\mathfrak{K}) \to \mathbb{C}$, что для любых двух компонируемых морфизмов $\phi = (h_j, g_1)$ и $\psi = (h_i, g_2)$ выполнено соотношение*

$$\varrho\chi(\psi \circ \phi) = \sum_{\{t_i, t_j | g_2 t_j = t_i g_1\}} \Big(\varrho\chi(t_j, g_1) + \varrho\chi(t_i, g_2)\Big)$$

Полухарактер называется локально финитным, если его значение отлично от нуля только на конечном числе морфизмов. Такие полухарактеры помогают описывать дифференцирования.

Теорема. *Полухарактер задаёт дифференцирование тогда и только тогда, когда он является локально финитным.*

Всё это позволяет построить описание дифференцирований в алгебре с использованием т.н. квазивнутренних дифференцирований, которые образуют идеал.

Теорема. *Пространство квазивнутренних дифференцирований $Der^*_{Inn}(S)$ образует идеал в алгебре дифференцирований $Der(S)$:*

$$d_0 \in Der^*_{Inn}(S), d \in Der(S) \Rightarrow [d_0, d], [d, d_0] \in Der^*_{Inn}$$

Список литературы

[1] Арутюнов А. А., Алгебра дифференцирований в некоммутативных групповых алгебрах. Труды МИАН, (308):28–41, 2020.

[2] Арутюнов А. А., Штерн А. И., Мищенко А. С., Деривации групповых алгебр. Фундамент. и прикл. матем., 21, 2016.

МФТИ, Москва
E-mail: mnk13579@gmail.com

Абсолютные идеалы E-групп

Е. И. Компанцева

Подгруппу A абелевой группы G называют ее абсолютным идеалом, если A является идеалом в любом кольце на G. Если в кольце R, любой идеал является абсолютным идеалом его аддитивной группы, то R называется AI-кольцом. В [**3**, Проблем 93] Л. Фукс оформулировал проблему описания абелевых групп, на которых существует хотя бы одно AI-кольцо; такие группы называются RAI-группами.

Нетрудно видеть, что любая вполне инвариантная подгруппа абелевой группы является ее абсолютным идеалом; однако обратное неверно. В [**1**] Е. Фрид оформулировал проблему описания абелевых групп, в которых любой абсолютный идеал является вполне инвариантной подгруппой; такие группы называют afi-группами.

В [**2**, Проблема 66] Л. Фукс поставил вопрос о существовании абелевых групп, на которых существует кольцо, в котором любой идеал является вполне инвариантной подгруппой. Такие группы мы будем называть F-группами.

В пересечении классов RAI-групп, afi-групп содержится класс E-групп, введенных П. Шульцем в [**4**]. Абелева группа G называется E-группой, если она изоморфна своей группе эндоморфизмов $\mathrm{End}G$ и кольцо эндоморфизмов $E(G)$ коммутативно.

В настоящей работе исследуется связь между RAI-группами, afi-группами, F-группами и E-группами. Обозначим:

$\mathcal{RAI}$ – класс RAI-групп,

$\mathcal{AFI}$ – класс afi-групп,

$\mathcal{E}$ – класс E-групп,

$\mathcal{F}$ – класс F-групп,

Теорема. *Имеют место следующие соотношения*

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{F} = \mathcal{RAI} \cap \mathcal{AFI}.$$

Показано, что в соотношениях $\mathcal{E} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{RAI}$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{AFI}$ все включения являются строгими.

Список литературы

[1] Fried E. On the subgroups of abelian groups that are ideals in every ring // Proc. Colloq. Abelian groups – Budapest – 1964. – P. 51–55.

[2] Fuchs L., Abelian groups, Akademiai Kiado – Budapest – 1966.

[3] Fuchs L., Infinite Abelian groups Vol.2, Academic Press – New York and London – 1973.

[4] Schultz P., Periodic homomorphism sequences of Abelian groups // Arch. Math. –1988. –Vol. 21. –P. 132–135.

Финансовый университет при Правительстве РФ, МПГУ, Москва
E-mail: kompantseva@yandex.ru

О решеточных изоморфизмах полулокальных колец

С. С. Коробков

Рассматриваются ассоциативные кольца. Пусть $M_n(GF(p^k))$ — кольцо всех квадратных матриц порядка n над конечным полем $GF(p^k)$, где n, k — натуральные числа, p — простое число. Следуя [**1**, стр. 82], назовём конечное кольцо R с единицей *полулокальным (примарным)* кольцом, если $R/\operatorname{Rad} R \cong M_n(GF(p^k))$. Полулокальные кольца играют важную роль в теории конечных колец. Согласно [**2**, гл. IV, теорема 3] конечное кольцо R с единицей тогда и только тогда является полулокальным кольцом, когда $R \cong M_n(K)$, а K — конечное локальное кольцо.

Обозначим решётку всех подколец кольца R через $L(R)$. Два кольца R и R' назовём *решточно изоморфными,* если изоморфны их решётки подколец $L(R)$ и $L(R')$. Решёточный изоморфизм $L(R) \cong L(R')$ обозначим буквой φ, а кольцо R' переобозначим как R^φ.

Решёточные изоморфизмы полулокальных колец частично рассматривались в [**3**]. В [**4**] сообщалось о том, что кольцо, решёточно изоморфное полулокальному кольцу, само является полулокальным кольцом. Следующие теоремы дополняют полученные ранее результаты о решёточных изоморфизмах полулокальных колец.

Теорема 1. *Пусть $R = M_n(K)$, где $n > 1$, K — конечное локальное p-кольцо, $e_{11}, \dots, e_{nn}$ — матричные единицы в кольце R. Пусть φ — решёточный изоморфизм кольца R на кольцо R^φ. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $R^\varphi = M_n(K')$, где K' — конечное локальное p-кольцо, решёточно изоморфное кольцу K;

2) $K/\operatorname{Rad} K \cong K'/\operatorname{Rad} K'$;

3) $(\forall i = \overline{1,n})\,(\langle e_{ii}\rangle^\varphi = \langle e'_{ii}\rangle)$, где e'_{ii} — матричные единицы в кольце R^φ;

4) $(\langle e_{11}\rangle \oplus \dots \oplus \langle e_{nn}\rangle)^\varphi = \langle e'_{11}\rangle \oplus \dots \oplus \langle e'_{nn}\rangle$;

5) $(\forall i = \overline{1,n})\,((e_{ii}Re_{ii})^\varphi = e'_{ii}R^\varphi e'_{ii})$.

Теорема 2. *Пусть $R = M_n(K)$, где $n > 1$, $K = GF(p^k) \dot{+} N$ — конечное коммутативное локальное кольцо, $N^2 = \{0\}$. Пусть φ — решёточный изоморфизм кольца R на кольцо R^φ. Тогда $R^\varphi \cong R$.*

Список литературы

[1] McDonald B. R. Finite rings with identity. — New York: Marcel Dekker, 1974. ix+429 pp.

[2] Елизаров В. П. Конечные кольца. Основы теории. — Москва: Гелиос. 2006. 304 с.

[3] Коробков С. С. Решёточная определяемость некоторых матричных колец // Матем. сб., 208:1 (2017). С. 97–110.

[4] Коробков С. С. Проектирования полулокальных колец // Материалы конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения" (г. Казань, 24-28 июня, 2019). – Казань: КФУ, 2019. С. 130–131.

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург
E-mail: ser1948@gmail.com

Теорема о свободе для относительно свободных алгебр Ли с одним определяющим соотношением

А. Ф. Красников

Известная теорема о свободе Ширшова [**1**] показывает, что если F — свободная алгебра Ли с множеством R образующих и одним определяющим соотношением $s = 0$, в левую часть которого входит образующий x, то подалгебра, порожденная в алгебре F множеством $R \setminus x$, свободна.
Теорема о свободе для полинильпотентных алгебр Ли с одним определяющим соотношением доказана Талаповым [**2**].
Справедлива следующая теорема (http://arxiv.org/abs/2101.05648):
Теорема. *Пусть F — свободная алгебра Ли с базой $y_1, \dots, y_n$ $(n > 2)$, H — подалгебра, порожденная в алгебре F элементами $y_1, \dots, y_{n-1}$, N — эндоморфно допустимый идеал алгебры F,*

$$N = N_{11} \geqslant \dots \geqslant N_{1,m_1+1} = N_{21} \geqslant \dots \geqslant N_{s,m_s+1}, \tag{1}$$

где N_{kl} — l-я степень алгебры N_{k1}.
Пусть, далее, $r \in N_{1i} \backslash N_{1,i+1}$ $(i \leqslant m_1)$, $R = \text{ид}_F(r)$.
Если (и только если) $r \notin H + N_{1,i+1}$, то $H \cap (R + N_{kl}) = H \cap N_{kl}$, где N_{kl} — произвольный член ряда (1).
Следствие. [**2**] *Пусть F — свободная алгебра Ли с базой $y_1, \dots, y_n$ $(n > 2)$, H — подалгебра, порожденная в алгебре F элементами $y_1, \dots, y_{n-1}$,*

$$F = F_{11} \geqslant \dots \geqslant F_{1,m_1+1} = F_{21} \geqslant \dots \geqslant F_{s,m_s+1}, \tag{2}$$

где F_{kl} — l-я степень алгебры F_{k1}.
Пусть, далее, $r \in F_{ij} \backslash F_{i,j+1}$ $(j \leqslant m_i)$, $R = \text{ид}_F(r)$.
Если (и только если) $r \notin H + F_{i,j+1}$, то $H \cap (R + F_{kl}) = H \cap F_{kl}$, где F_{kl} — произвольный член ряда (2).

Список литературы

[1] Ширшов А. И., Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли, Сиб. мат. журн., 3, N 2 (1962), 292–296.

[2] Талапов В. В., О полинильпотентных алгебрах Ли, заданных одним определяющим соотношением, Сиб. мат. журн., 23, N 5 (1982), 192–204.

Омский государственный университет, Омск
E-mail: phomsk@mail.ru

Особенности строения 2-порожденной нильпотентной алгебры R над полем с ограничениями на $\dim R^3/R^4$

Е. П. Петров

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] Л.А. Бокутем была предложена задача (1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число). С.А. Пихтильковым в работе [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n \leq 18$, Ю.Н. Мальцевым в статье [3] изучалось многообразие $\mathfrak{M}_n$, порожденное всеми n-мерными нильпотентными алгебрами (такие многообразия там были описаны для $n = \overline{1,6}$), И.Л. Гусевой в статье [4] было доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = [\frac{n}{3}] + 2$. В 1991 г. автором в работе [5] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, и в качестве подтверждения этой гипотезы был приведен пример n-мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра R с условием $\dim R^2/R^3 \leq 2$ удовлетворяет данной гипотезе. В целях дальнейшего подтверждения обозначенной гипотезы автором в работах [6–9] проведены исследования нильпотентной конечномерной алгебры R, удовлетворяющей для некоторого натурального числа $N > 1$ условию $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, с описанием ее строения, определяющих соотношений и тождеств. В частности, доказано, что такая алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $N + 2$.

Из полученных автором результатов ясно, что степень стандартного тождества в алгебре R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, $N > 1$, не зависит от величины индекса нильпотентности алгебры R. В случае, когда $\dim R^2/R^3 = 3$, такой независимости уже нет. В [10] автором замечено, что для любого натурального числа k найдется конечномерная нильпотентная алгебра R над произвольным полем с условием $\dim R^2/R^3 = 3$, не удовлетворяющая никакому полилинейному тождеству степени k.

Заметим, что нильпотентная конечномерная алгебра R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ является в некотором смысле опорной для дальнейшего изучения произвольных нильпотентных конечномерных алгебр, для которых $\dim R^N/R^{N+1} > 2$. При этом для нахождения тождеств, которым удовлетворяют такие алгебры, описание их строения и изучение их определяющих соотношений является весьма важным.

В [10] автором отмечалось, что для конечномерной нильпотентной алгебры R над алгебраически замкнутым полем, которая удовлетворяет условию $\dim R^2/R^3 = 3$ и в которой выполняется одно единственное определяющее соотношение, для любого натурального $k > 2$ имеет место одно из следующих равенств: $\dim R^k/R^{k+1} = k + 1$ или $\dim R^k/R^{k+1} = F_{k+2}$, где F_n – числа Фибоначчи.

Имеют место также следующие результаты (над произвольным полем).

Предложение 1. *В нильпотентной 2-порожденной алгебре R над произвольным полем с условием $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$ для любого $k > 3$ имеют место ограничения $\dim R^k/R^{k+1} \leq 4$.*

Предложение 2. *В нильпотентной 2-порожденной алгебре R над произвольным полем со следующими условиями: $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3, \dim R^4/R^5 \geq 3$, при подходящем выборе порождающих базис R^3/R^4 с точностью до антиизоморфизма имеет один из следующих видов: $\{a^3, a^2b, aba\}, \{a^3, a^2b, ab^2\}, \{a^3, a^2b, ba^2\}$, $\{a^3, a^2b, b^3\}$.*

Предложение 3. *В нильпотентной 2-порожденной алгебре R над произвольным полем со следующими условиями:* $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3, \dim R^4/R^5 \geq 3$, *у которой базис R^3/R^4 может быть представлен только в виде $\{a^3, a^2b, ba^2\}$, выполняются соотношения:* $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$, $aba \equiv bab \equiv 0 \pmod{R^4}$.

Остается пока открытым вопрос: какому минимальному тождеству может удовлетворять нильпотентная 2-порожденная алгебра R над полем с условием $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$.

Список литературы

[1] *The Dniester Notebook (Unsolved problems in the theory of rings and modules)*, V.A. Andrunakievich (ed.), Third edition, Akad. Nauk SSSR, Sib. Otd., Inst. Mat., Novosibirsk, 1982.

[2] Pikhtil'kov S.A., *On varieties generated by n-dimensional algebras*, Tula Polytechnic Inst., Tula, (1980), Manuscript deposited at VINITI, No. 1213-80 Dep.

[3] Mal'tsev Yu.N., *On identities of nilpotent algebras*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., **9** (1986), 68–72.

[4] Guseva I.L., *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, in: Internat. Conf. on Algebra, dedicated in the memory A.I. Mal'tsev, August 1989, Novosibirsk, p. 43.

[5] Petrov E.P., *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, Algebra i Logika, Vol. 30, **5** (1991), 540–556.

[6] Petrov E.P., *Defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition* $dimR^2/R^3 = 2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1052–1066.

[7] Petrov E.P., *Structure, defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition* $dimR^N/R^{N+1} = 2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 1153–1187.

[8] E.P. Petrov, *Defining relations and identities of finite-generated nilpotent algebra R with condition* $dimR^N/R^{N+1} = 2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1048–1064.

[9] Petrov E.P., *Defining relations and identities of finite-generated nilpotent algebra R with condition* $dimR^N/R^{N+1} = 2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1981–2002.

[10] Petrov E.P., *On structure, defining relations and identities of 2-generated nilpotent algebra R with condition* $dimR^2/R^3 = 3$, International Conference MAL'TSEV MEETING, August 19–23, 2019, Collection of Abstracts, Novosibirsk. – P. 169-170.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: pep@email.asu.ru

О неприводимых правосимметрических бимодулях над матричной алгеброй второго порядка

А. П. Пожидаев

Алгебра A называется *правосимметрической*, если ассоциатор на A является правосимметричным: $(x, y, z) = (x, z, y)$ для всех $x, y, z \in A$, где $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$.

Пусть F — поле, W — правосимметрический бимодуль над матричной алгеброй $M_2(F)$, $e_1 := e_{11} \in M_2(F)$. Последовательность $(a) := a_0, a_1, \ldots, a_n$ элементов бимодуля W назовем *sl_2-цепью*, если $sl_2(F)$ действует на ней справа как на неприводимом модуле; sl_2-цепь (a) назовем *бицепью*, если она является бидиагональной, т. е. $e_1 a_i = \delta_i a_i$ для некоторых $\delta_i \in \{0, 1\}$ и для любого $i = 0, \ldots, n$. Бицепь (a) назовем *константной*, если действие L_{e_1} на ней является константным, т. е. для некоторого $\delta \in \{0, 1\}$ справедливо $e_1 a_i = \delta a_i$ для всех $a_i \in (a)$. Бимодуль W называется *бидиагональным*, если оператор L_e диагонализируем на W для некоторого нетривиального идемпотента $e \in M_2(F)$.

Теорема 1. *Пусть W — бидиагональный модуль над $M_2(F)$. Тогда W — прямая сумма бицепей.*

Теорема 2. *Пусть F — поле характеристики 0 и W — конечномерный правосимметрический унитальный диагональный бимодуль над $M_2(F)$ без константных бицепей. Тогда W является прямой суммой двумерных неприводимых правых модулей над $M_2(F)$ и $Aw = wA$ для любых $w \in W$, $A \in M_2(F)$.*

Построены примеры недиагональных (размерности 6) и константных (произвольной четной размерности) неприводимых правосимметрических унитарных бимодулей над $M_2(F)$, где F — поле характеристики не 2.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда 21-11-00286.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: app@math.nsc.ru

Многообразия альтернативных и йордановых алгебр почти полиномиального роста

А. В. Попов

Будем предполагать, что характеристика основного поля $\mathbb{F}$ равна нулю.

Для многообразия алгебр $\mathcal{V}$ рассмотрим подпространства $P_n(\mathcal{V})$ свободной алгебры $\mathbb{F}_{\mathcal{V}}[X]$, образованные всеми полилинейными элементами степени n от образующих $x_1, \ldots, x_n$.

Если последовательность $c_n(\mathcal{V}) = \dim P_n(\mathcal{V})$ растет медленнее некоторого полинома, то говорят, что $\mathcal{V}$ имеет полиномиально ограниченный рост. Отдельный интерес представляют многообразия почти полиномиального роста (a.p.g.-многообразия), т.е. такие многообразия, которые имеют рост больше полиномиального, но всякое их собственное подмногообразие имеет полиномиально ограниченный рост.

Для многообразия $\mathcal{V}$ обозначим через $U(\mathcal{V})$ его унитарное замыкание, т.е. если $\mathcal{V}$ порождается алгеброй A, то $U(\mathcal{V})$ порождается алгеброй $A + \mathbb{F} \cdot 1$.

Как оказывается, унитарные замыкания некоторых почти нильпотентных многообразий являются a.p.g.-многообразиями. Примеры таких многообразий получилось найти среди многообразий йордановых и альтернативных алгебр. А именно, обозначим через $\mathcal{V}_A$ и $\mathcal{V}_J$ — многообразия альтернативных и йордановых алгебр соответственно, определенных дополнительными тождествами $x^3 \equiv 0$ и $(x_1y_1)(x_2y_2) \equiv 0$. Эти многообразия являются почти нильпотентными [**1**].

Теорема 1. *Многообразия $U(\mathcal{V}_A)$ и $U(\mathcal{V}_J)$ являются a.p.g.-многообразиями и их последовательности коразмерностей растут как экспоненты с показателем 2.*

Известно, что имеется ровно два a.p.g-многообразия ассоциативных алгебр [**2**]:
– многообразие $\mathcal{V}_1$, порождаемое алгеброй Грассмана;
– многообразие $\mathcal{V}_2$, порождаемое алгеброй верхнетреугольных матриц UT_2.

Естественным является вопрос, будет ли исчерпываться список альтернативных a.p.g.-многообразий многообразиями $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ и $U(\mathcal{V}_A)$?

В йордановом случае известны два a.p.g-многообразия (помимо $U(\mathcal{V}_J)$):
– многообразие $\mathcal{V}_3$, определенное дополнительным тождеством $(x_1y_1)(x_2y_2) \equiv 0$ [**3, 4**];
– многообразие $\mathcal{V}_4$, порождаемое йордановой алгеброй верхнетреугольных матриц $UT_2^{(+)}$ [**5, 6**].

В настоящий момент известно, что многообразие $\mathcal{V}_4$ единственное a.p.g.-многообразие среди многообразий, порождаемых конечномерными специальными йордановыми алгебрами [**7**].

Кроме того, для многообразия $\mathcal{V}_3$ имеет место

Теорема 2. *Многообразие $\mathcal{V}_3$ единственное a.p.g.-многообразие среди многообразий разрешимых йордановых алгебр.*

Список литературы

[1] *Попов А. В.* Нильпотентность альтернативных и йордановых алгебр // *Сиб. мат. журн.* 2021. Т. 62, N 1. С. 185–197.

[2] *Кемер А. Р.* Многообразия конечного ранга // *Красноярск, 15-ая Всесоюзная алгебраическая конференция* 1979. С. 73.

[3] *Drensky V. S., Rashkova T. G.* Varieties of metabelian Jordan algebras // *Serdica* 1989, Т. 15, N 4. С. 293–301.

[4] *Мищенко С. П., Попов А. В.* Многообразие йордановых алгебр, определяемое тождеством $(xy)(zt) \equiv 0$, имеет почти полиномиальный рост // *Матем. заметки.* 2010. Т. 87, N 6. С. 877–884.

[5] *Попов А. В.* Многообразие йордановых алгебр $\mathrm{var}(UT_2(F)(+))$ имеет почти полиномиальный рост // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 2012, N 5, C.49–52.

[6] *Koshlukov P., Martino F.* Polynomial identities for the Jordan algebra of upper triagular matrices of order two // *J. Pure Appl. Algebra.* 2012, T. 216, N 11, C.2524-2532.

[7] *Martino F.* Varieties of special Jordan algebras of almost polynomial growth // *Journal of Algebra.* 2019, T. 531, C.184-196.

Ульяновск
E-mail: klever176@rambler.ru

Сингулярные супералгебры с 2-мерной четной частью и новые примеры расширенных дублей

С. В. Пчелинцев, О. В. Шашков

Простая правоальтернативная супералгебра называется *сингулярной*, если её четная часть имеет нулевое умножение. Минимальная размерность сингулярной супералгебры равна 5. Первый пример такой алгебры был указан в [**1**]. В [**2**] классифицированы 5-мерные сингулярной супералгебры. В [**3**] доказано, что не существует 6-мерных сингулярных супералгебр.

Пусть $\mathrm{Ann}_l(B) = \{q \mid qB = 0\}$ — левый аннулятор. Супералгебру $B = A + M$ с четной частью A назовем *алгебраически порожденной*, если алгебра B порождается множеством $A \cup \mathrm{Ann}_l(B)$. Алгебраически порожденная супералгебра конечномерна тогда и только тогда, когда ее четная часть конечномерна [4].

Элемент $p \in M \cap \mathrm{Ann}_l(B)$ назовем *переключателем*. Переключатель p назовем *невырожденным*, если

$$ap = 0 \text{ влечет } a = 0 \text{ для любого } a \in A.$$

В [**5**] введено понятие расширенного дубля и доказано, что всякая конечномерная сингулярная алгебраически порожденная супералгебра является расширенным дублем. Там же указан критерий сингулярности расширенного дубля.

Доказаны следующие результаты:

Теорема. *Всякая конечномерная сингулярная алгебраически порожденная супералгебра (над бесконечным полем) содержит невырожденный переключатель.*

Теорема. *Всякая сингулярная супералгебра с 2-мерной четной частью A пятимерна. В частности, не существует бесконечномерных простых сингулярных супералгебр с 2-мерной четной частью.*

Кроме того, доказано, что не существует сингулярных расширенных дублей $B = A \oplus M$ размерности 6, 7, 8 и 11. Для всех остальных значений $d \geq 5$ существуют d-мерные сингулярные расширенные дубли. Построены новые примеры 19-мерного и 31-мерного расширенных дублей.

Список литературы

[1] Silva J.P., Murakami L.S.I., Shestakov I.P., On right alternative syperalgebras, Comm. in Algebra, **44**:1 (2016), 240–252.

[2] Pchelintsev S.V., Shashkov O.V., Simple 5-dimensional right alternftive superalgebras with trivial even part, Sib. Math. J., **58**:6 (2017), 1078–1089.

[3] Pchelintsev S.V., Shashkov O.V., Singular 6-dimensional superalgebras, Siberian Electronic Mathematical Reports 15, 92–105 (2018) (Russian), http://semr.math.nsc.ru.

[4] Pchelintsev S.V., Shashkov O.V., Linearly generated singular superalgebras, J. Algebra, 546 (2020) 580–603.

[5] Pchelintsev S.V., Shashkov O.V., Algebraically generated superalgebras, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, 6 (2021), 67–83.

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва
E-mail: pchelinzev@mail.ru, o.v.shashkov@yandex.ru

Compressed zero-divisor graphs with bridge

A. A. Afanasyev, A. S. Monastyreva

Let R be an associative ring. For any $a \in R$, denote $l(a) = \{x \in R;\ xa = 0\}, r(a) = \{x \in R;\ ax = 0\}$. $D(R)$ denotes the set of all (one-sided and two-sided) zero-divisors of R, $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$. By a *local ring* we mean a finite unital ring R such that the factor-ring $R/J(R)$ is a field where $J(R)$ is the Jacobson radical of R.

For $x, y \in D(R)$, we say that $x \sim y$ if and only if $r(x) \cup l(x) = r(y) \cup l(y)$. It is clear that $\sim$ is an equivalence relation. We denote by $[x]$ the equivalence class of an element $x \in D(R)$.

The compressed zero-divisor graph $\Gamma_\sim(R)$ of a ring R is the looped graph whose vertices are all classes $[x]$ where $x \in D(R)^*$, and two vertices $[x]$ and $[y]$ are joined by an edge iff $xy = 0$ or $yx = 0$ [**1**].

Let R be a finite ring. Assume that $\Gamma_\sim(R)$ has a bridge $[a] - [b]$ and the vertices $[a]$ and $[b]$ are not dangling. We prove that $\Gamma_\sim(R)$ is a chain $[c] - [a] - [b] - [d]$ such that the vertex $[b]$ has a loop but $[a], [c], [d]$ are without any loop. Moreover, the ring R is isomorphic to a direct sum (as rings) of a finite field F and a local ring S with $J(S)^2 = 0$ and $J(S) \neq (0)$.

Besides, we prove some properties of a finite ring R such that $\Gamma_\sim(R)$ has only two vertices $[x]$ and $[y]$ without any loop and any other vertex is adjacent to $[x]$ or $[y]$. Also, we study structure of a finite ring with such equivalence class $[a]$ that the vertex $[a]$ is without any loop and any other vertex of $\Gamma_\sim(R)$ is adjacent to $[a]$.

References

[1] Zhuravlev E. V., Monastyreva A. S., Compressed Zero-Divisor Graphs of Finite Associative Rings, Sib. Math. J., 61(1) (2020) 76–84.

Altai State University, Barnaul
E-mail: alaid2018@yandex.ru, akuzmina1@yandex.ru

On (σ, τ)-derivations of group algebra as category characters

A. V. Alekseev

Let G be a contable discrete group and let $\mathcal{A}$ be an associative algebra over a field $\mathcal{K}$ and (σ, τ) is a pair of $\mathcal{K}$-linear endomorphisms of $\mathcal{A}$. A (σ, τ)-*derivation* $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is an $\mathcal{K}$-linear map such that the following twisted by (σ, τ) generalized Leibniz identity

$$D(ab) = D(a)\tau(b) + \sigma(a)D(b) \tag{1}$$

is satisfied for all $a, b \in \mathcal{A}$.

For the space of (σ, τ)-derivations of the group algebra $\mathbb{C}[G]$, the decomposition theorem, generalising the corresponding theorem on ordinary derivations on group algebras, is established in an algebraic context using groupoids and characters. Several corollaries and examples describing when all (σ, τ)-derivations are inner are obtained. Considered in details cases on $(\sigma, \tau)-$nilpotent groups and (σ, τ)-FC groups.

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow
E-mail: aleksandr.alekseev@frtk.ru

Universal enveloping of a pair of compatible Lie brackets

V. Yu. Gubarev

In the theory of integrable systems from mathematical physics Hamiltonian pairs play an important role [**3**]. Such structures correspond to pairs of compatible Poisson brackets defined on the same manifold. In the operadic language, the latters form so called bi-Hamiltonian operad [**1, 2**].

In the case of linear Poisson brackets, all such structures arise from a pair of compatible Lie brackets. An algebra $\langle L, [\cdot,\cdot]_1, [\cdot,\cdot]_2, +\rangle$ belongs to a variety Lie_2 of pairs of compatible Lie brackets if $\alpha[\cdot,\cdot] + \beta[\cdot,\cdot]_2$ is a Lie bracket for all $\alpha, \beta \in F$. Here F denotes the ground field.

In [**5**], the operadic universal enveloping associative algebra of a given algebra $\mathfrak{g} \in \mathrm{Lie}_2$ in the sense [**4**] was shown to equal

$$U_{\mathrm{Lie}_2}(\mathfrak{g}) = \mathrm{As}\langle X \cup X' \mid xy - yx - [x,y]_1,\, x'y' - y'x' - [x,y]_2,\, xy - xy' - x'y + x'y'\rangle,$$

where X is a linear basis of $\mathfrak{g}$, X' is a set such that $X \cap X' = \emptyset$ and the map $'\colon X \to X'$, $x \to x'$ is a bijection.

In [**5**], the PBW property of $U_{\mathrm{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ was proved, it implies that there exists a filtration on $U_{\mathrm{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ such that $\mathrm{gr}\, U_{\mathrm{Lie}_2}(\mathfrak{g}) \cong U_{\mathrm{Lie}_2}(\mathfrak{g}_0)$, where $\mathfrak{g}_0$ is a vector space $\mathfrak{g}$ with trivial products $[\cdot,\cdot]_1$ and $[\cdot,\cdot]_2$.

We find the Gröbner—Shirshov basis of the universal enveloping algebra $U_{\mathrm{Lie}_2}(\mathfrak{g}_0)$. Hence, due to the PBW property, we get the linear basis of $U_{\mathrm{Lie}_2}(\mathfrak{g})$.

The author is supported by the grant of the President of the Russian Federation for young scientists (MK-1241.2021.1.1).

References

[1] Bershtein M., Dotsenko V., Khoroshkin A., Quadratic algebras related to the bihamiltonian operad, Int. Math. Res. Notices **24** (2007), 1–30.

[2] Dotsenko V., Khoroshkin A., Character formulas for the operad of two compatible brackets and for the bi-Hamiltonian operad, Funktsional. Anal. i Prilozhen. (1) **41** (2007), 1–22.

[3] Gel'fand I.M., Dorfman I.Ya., Hamiltonian operators and algebraic structures related to them, Funktsional. Anal. i Prilozhen. (4) **13** (1979), 13–30.

[4] Ginzburg V., Kapranov M., Koszul duality for operads, Duke Math. J. (1) **76** (1994), 203–272.

[5] Khoroshkin A., PBW Property for Associative Universal Enveloping Algebras Over an Operad, Int. Math. Res. Notices (accepted), https://doi.org/10.1093/imrn/rnaa215.

Sobolev Institute of mathematics, Novosibirsk
E-mail: wsewolod89@gmail.com

On closure of configurations in freely generated projective planes

N. T. Kogabaev

In [**1**], it was proved that if a subplane $\mathcal{P}$ of a free projective plane is generated by a finite configuration $\mathcal{B}$, then $\mathcal{P}$ is also free. The proof of this statement is, in particular, based on the following reasoning. If we represent the process of generating of a projective plane $\mathcal{P}$ in the form of a sequence of configurations

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{B}_n \subseteq \ldots,$$

where each $\mathcal{B}_{n+1}$ is a full one-step extension of $\mathcal{B}_n$, then for every $n \in \omega$ the rank of the configuration $\mathcal{B}_{n+1}$ cannot exceed the rank of configuration $\mathcal{B}_n$, which means that as n increases, the rank of $\mathcal{B}_n$ gets stabilized, therefore, there exists m such that $\mathcal{B}_m$ freely generates $\mathcal{P}$. If we refuse the condition of finiteness of the configuration $\mathcal{B}$, then the mentioned reasoning on ranks becomes incorrect, and there arises a necessity to develop other methods for finding or describing the configuration $\mathcal{B}'$, which freely generates $\mathcal{P}$.

In [**2, 3**], a construction of a free closure of a configuration, which is usually referred to as *Shirshov's construction*, is proposed. In this construction, every element of the free closure has its unique notation in the form of an irreducible nonassociative word over the initial configuration.

In the present paper, using Shirshov's construction, we introduce the notion of a *reduced* configuration in an arbitrary freely generated projective plane $\mathcal{F}$ and propose a method for transforming an arbitrary configuration into a reduced one. We prove that for every configuration $\mathcal{B}$, generating a subplane $\mathcal{P}$ in the projective plane $\mathcal{F}$, there exists a reduced configuration $\mathcal{B}'$, which freely generates $\mathcal{P}$. In the case of finitely generated planes, the proposed method for transforming the configuration $\mathcal{B}$ into the reduced configuration $\mathcal{B}'$ turns out to be effective, which allows us to state the solvability of the problem of inclusion into the subplane $\mathcal{P}$.

This work was carried out within the framework of the state contract for Sobolev Institute of Mathematics (project 0314-2019-0002) and with partial support of Russian Foundation for Basic Research (project 20-01-00300).

References

[1] Hall M.J., Projective planes, Trans. Am. Math. Soc., 54, 1943, 229–277.
[2] Shirshov A.I., Nikitin A.A., Theory of projective planes, Algebra and Logic, 20, 1981, 220–239.
[3] Nikitin A.A., On freely generated projective planes, Algebra and Logic, 22, 1983, 45–57.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: kogabaev@math.nsc.ru

An example of a non-locally finite Novikov coalgebra

D. Kh. Kozybaev, U. U. Umirbaev, V. N. Zhelyabin

A coalgebra is a vector space C equipped with a linear map $\Delta : C \mapsto C \otimes C$. The map Δ is called the comultiplication or the coproduct of C. We shall use the Sweedler notation $\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$. A subspace D of a coalgebra C with the coproduct Δ is a subcoalgebra if $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$. If S is a subset of C, then the subcoalgebra of C generated by S is the smallest subcoalgebra of C which contains S.

A coalgebra C is called locally finite if every finitely generated subcoalgebra of C is finite dimensional.

It is well known that if C is a coalgebra then the dual space C^* is an algebra with the product $m : C^* \times C^* \mapsto C^*$ given by

$$\langle m(\alpha, \beta), c\rangle = \sum_{(c)]} \langle \alpha, c_{(1)}\rangle \langle \beta, c_{(2)}\rangle,$$

where $\alpha, \beta \in C^*$ and $c \in C$.

A coalgebra C is called a Novikov coalgebra, if its dual algebra is a Novikov algebra, i.e., it satisfies the identities

$$(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz)\,, (xy)z = (xz)y.$$

Let C be a vector space with a countable linear basis $a_1, a_2, \ldots$. Define on C the comultiplication $\Delta : C \mapsto C \otimes C$, by setting

$$\Delta(a_1) = a_1 \otimes a_1,\ \Delta(a_i) = a_i \otimes a_1 + a_1 \otimes a_i,\ i > 1.$$

Then (C, Δ) is an associative and commutative coalgebra, i.e., the dual agebra of C is an associative and commutative algebra. Define the linear map $d : C \mapsto C$, by setting

$$d(a_1) = 0,\ d(a_i) = a_{i+i},\ i > 1.$$

Then d is a coderivation of the coalgebra (C, Δ).

Define a new comultiplication $\Delta_N = (id \otimes d)\Delta$ on the vector space C.

Theorem. *The coalgebra (C, Δ_N) is a Novikov coalgebra and (C, Δ_N) is not locally finite.*

It is known that associative, alternative and Jordan coalgebras are locally finite. Lie, right-symmetric, and right-alternative coalgebras are not locally finite.

This research is supported by Russian Science Foundation (project 21-11-00286).

Department of Mathematics, Eurasian National University, Nur-Sultan, (Kazakhstan)
E-mail: kozybayev@gmail.com
Department of Mathematics, Wayne State University, Detroit, (USA); Department of Mathematics, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, (Kazakhstan)
E-mail: umirbaev@wayne.edu
Institute of Mathematics of the SB of RAS, Novosibirsk
E-mail: vicnic@math.nsc.ru

Zero-divisor graphs of a finite nilpotent ring

A. S. Monastyreva

Let R be an associative ring. For any $a \in R$, denote $l(a) = \{x \in R;\ xa = 0\}, r(a) = \{x \in R;\ ax = 0\}$. $D(R)$ denotes the set of all (one-sided and two-sided) zero-divisors of R. Also, $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$ and $Ann(R) = \{a \in R;\ aR = Ra = (0)\}$.

For $x, y \in D(R)$, we say that $x \sim y$ if and only if $r(x) \cup l(x) = r(y) \cup l(y)$. It is clear that $\sim$ is an equivalence relation. We denote by $[x]$ the equivalence class of an element $x \in D(R)$.

The compressed zero-divisor graph $\Gamma_{\sim}(R)$ of a ring R is the looped graph whose vertices are all classes $[x]$ where $x \in D(R)^*$, and two vertices $[x]$ and $[y]$ are joined by an edge iff $xy = 0$ or $yx = 0$ [**1**].

In [**2**], we described such finite non-nilpotent rings that their compressed zero-divisor graphs are complete with loops. In this work, all finite nilpotent rings with complete compressed zero-divisor graphs (with loops) are found.

Moreover, we introduce the notion of the partially compressed zero-divisor graph for a finite nilpotent ring.

The partially compressed zero-divisor graph $\overline{\Gamma}(R)$ of a finite nilpotent ring R is the graph whose vertices are all elements of the factor-ring $R/Ann(R)$, and two vertices $\overline{r}_1$ and $\overline{r}_2$ are joined by an edge if and only if $r_1 r_2 = 0$ or $r_2 r_1 = 0$.

We study some properties of these graphs. In particular, we describe structure of a finite nilpotent ring R such that the graph $\overline{\Gamma}(R)$ consists of no more than three vertices.

References

[1] Zhuravlev E. V., Monastyreva A.S., Compressed Zero-Divisor Graphs of Finite Associative Rings, Sib. Math. J., **61(1)** (2020), 76–84.

[2] Monastyreva A.S., Finite Non-Nilpotent Rings with Complete Compressed Zero-Divisor Graphs, Lobachevskii J. Math. **41**(9) (2020), 1666–1671.

Altai State University, Barnaul
E-mail: akuzmina1@yandex.ru

Nilpotency of graded bicommutative and Zinbiel algebras

U. U. Umirbaev, V. N. Zhelyabin, K. M. Tulenbaev

The solvability of graded Novikov algebras were studied by V.N. Zhelyabin and U.U. Umirbaev [**1**]. It was shown in [**2**] for every n of the form $n = 2^k 3^l$ that a Z_n- graded Novikov algebra

$$N = N_0 \oplus \ldots \oplus N_{n-1}$$

over a field of characteristic not equal to $2, 3$ is solvable if N_0 is solvable.

A non-associative algebra N over a field F is called a bicommutative algebra if it satisfies the following identities: $x(yz) = y(xz)$ and $(xy)z = (xz)y$. Bicommutative algebras were introduced by A.S. Dzhumadil'daev and K.M. Tulenbaev [**4**]. Zinbiel algebras are given by the identity $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c + c \circ b)$. Zinbiel algebras were introduced by J.-L. Loday [**3**] as a dual to Leibniz algebras. A.S. Dzhumadil'daev and K.M. Tulenbaev [**5**] proved that any finite-dimensional Zinbiel algebra over algebraically closed field is nilpotent. This paper is dedicated to study of the nilpotency of graded Bicommutative and Zinbiel algebras. Let G be an abelian and finite group. An algebra A is called G-graded algebra iff $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ and $A_g \circ A_h \subset A_{g+h}$.

Theorem 1. *Let A be a G-graded Bicommutative algebra with nilpotent part A_0. Then the algebra A is nilpotent.*

Theorem 2. *Let A be a G-graded Zinbiel algebra with nilpotent part A_0 over field of F of characteristic* 0.*Then the algebra A is nilpotent.*

Theorem 2 makes sense when A is an infinite-dimensional algebra. Second part of the paper is devoted to a new approach to definition of bicommutative algebras and gives new proofs of classical results on bicommutative algebras.

References

[1] Umirbaev U., Zhelyabin V., On the Solvability of graded Novikov Algebras, International Journal of algebra and computation to appear.

[2] Zhelyabin V., Umirbaev U., On the Solvability of $\mathbb{Z}_3$-Graded Novikov Algebras. Symmetry 312(2) (2021), 13.

[3] Loday J.-L., Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras. *Math. Scand.* **77** (1995), No. 2, P. 189–196.

[4] Dzhumadil'daev A.S., Tulenbaev K.M., Bi-commutative algebras, Uspechi Math. Nauk., 2003, No.6, 149–150 engl.transl. Russian Math. Surv., P.1196-1197.

[5] Dzhumadil'daev A.S., Tulenbaev K.M., Nilpotency of Zinbiel algebras. J. of Dyn. Control Syst., 11, no. 2, (2005) p. 195-213

Department of Mathematics, Wayne State University, Detroit (USA)
E-mail: umirbaev@wayne.edu
Institute of Mathematics of the SB of RAS, Novosibirsk
E-mail: vicnic@math.nsc.ru
Department of Mathematics, Suleyman Demirel University, Kaskelen city, Abylaikan1/1, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: kaisar.tulenbayev@sdu.edu.kz

VIII. Секция «Теория моделей и универсальная алгебра»

О проблеме полноты рациональных функций с рациональными коэффициентами

Н. Ф. Алексиадис

Цель настоящей работы — найти в функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами критерий, т.е. необходимое и достаточное условие полноты систем функций на языке предполных классов и число предполных классов, т.е. мощность критериальной системы.

Мы используем стандартные обозначения и общеизвестные понятия теории функциональных систем (см. [**1**] – [**3**]), но, с целью корректного понимания изложенного, все-таки следует уточнить некоторые "моменты".

Функциональная система (ф.с.) $\mathbf{F}$ — это универсальная алгебра вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F — множество функций, а O множество операций над функциями из F, при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F.

В нашем случае O состоит только из операций суперпозиций. Следует формализовать понятие суперпозиции. Из известных формализации (следуя Мальцеву) мы выбираем итеративные алгебры Поста (см. [**2**]).

Обозначим через F_{RQ} множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами, аргументы которых (как и сами функции) принимают рациональные значения.

Ф.с. рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции.

Как известно, изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем: 2-значная логика (Пост), 3-значная логика (Яблонский), 4-значная логика (Мальцев), k-значная логика (Розенберг). В этих ф.с. решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов (максимальных подалгебр). Метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал после этого одним из основных.

Автором настоящего доклада были получены следующие результаты.

Теорема 1. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ множество всех предполных классов является (приведенной) критериальной системой, т.е. произвольная система функций является полной тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном предполном классе.*

Теорема 2. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ мощность критериальной системы равна континууму.*

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. М.: Изд-во МГУ, 1982. 157 с.
[2] Мальцев А. И. Избранные труды. Т. II. М.: Изд-во Наука, 1976. 388 с.
[3] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Изд-во Наука, 1986. 384 с.

Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва
E-mail: aleksiadis@yandex.ru

О критерии почти бинарности слабо циклически минимальных теорий

А. Б. Алтаева, Б. Ш. Кулпешов

Настоящий доклад продолжает исследование понятия *слабой циклической минимальности*, первоначального изученного в [**1**]. *Циклический порядок* описывается тернарным отношением K, удовлетворяющим следующим условиям:

(co1) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \to K(y, z, x))$;

(co2) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \land K(y, x, z) \Leftrightarrow x = y \lor y = z \lor z = x)$;

(co3) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \to \forall t [K(x, y, t) \lor K(t, y, z)])$;

(co4) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \lor K(y, x, z))$.

Слабо циклически минимальная структура есть циклически упорядоченная структура $M = \langle M, K, \dots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Заметим что поскольку циклический порядок определяется тернарным отношением, не существует бинарной слабо циклически минимальной структуры. Мы говорим, что слабо циклически минимальная теория T является *почти бинарной*, если любая формула эквивалентна булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных и формулы $K(x, y, z)$ (выражающей отношение циклического порядка).

В работе [**2**] были полностью описаны счетно категоричные m-выпуклые слабо циклически минимальные теории ранга выпуклости 1, являющиеся почти бинарными ($m > 1$), а в работе [**3**] установлена почти бинарность счетно категоричных не 1-транзитивных слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1. Здесь мы представляем следующую теорему:

Теорема. *Пусть T — счетно категоричная не 1-транзитивная слабо циклически минимальная теория. Тогда T почти бинарная $\Leftrightarrow$ T имеет конечный ранг выпуклости.*

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант AP08855544).

Список литературы

[1] Kulpeshov B. Sh., Macpherson H. D. Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly. 2005, Vol. 51. P. 377–399.

[2] Кулпешов Б. Ш., Алтаева А. Б. Бинарные формулы в счетно категоричных слабо циклически минимальных структурах // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, 3. С. 341–365.

[3] Kulpeshov B. Sh. On almost binarity in weakly circularly minimal structures // Eurasian Mathematical Journal. 2016. Vol. 7, No. 2. P. 38–49.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Институт математики и математического моделирования, Казахстанско-Британский технический университет, Алма-Ата (Казахстан)

E-mail: vip.altayeva@mail.ru, b.kulpeshov@kbtu.kz

Описание q_ω- и u_ω-компактных графов

И. М. Бучинский

Важным свойством алгебраических систем, с точки зрения универсальной алгебраической геометрии, является свойство *нтеровости по уравнениям.* Обобщениями нётеровости являются свойства q_ω*-компактности* и u_ω*-компактности.* В [**1**] представлены так называемые объединяющие теоремы, которые описывают свойства алгебраических множеств q_ω и u_ω компактных систем.

В докладе будут представлены критерии q_ω-компактности и u_ω-компактности в категории простых графов. Важную роль в этом описании играет следующая лемма, которая представляет из себя критерии нётеровости по уравнениям, q_ω-компактности и u_ω-компактности для произвольной алгебраической системы:

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}\rangle$ — некоторая алгебраическая система. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\mathcal{A}$ не является нётеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда найдутся последовательность элементов $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $A_i \in A^n$, и последовательность уравнений $(s_i(X))_{i\in\mathbb{N}}$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ языка $\mathcal{L}$ такие, что $\mathcal{A} \not\models s_i(A_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{A} \models s_j(A_i)$ для всех $j < i$;*

(2) *$\mathcal{A}$ не является q_ω-компактной тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ не является нётеровой по уравнениям и, в обозначениях пункта 1, найдется такое уравнение $f(X)$ языка $\mathcal{L}$, что $\mathcal{A} \not\models f(A_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и для всех таких $a \in A^n$, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ $\mathcal{A} \models s_i(a)$, верно, что $\mathcal{A} \models f(a)$;*

(3) *$\mathcal{A}$ не является u_ω-компактной тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ не является нётеровой по уравнениям и, в обозначениях пункта 1, найдется такой конечный набор уравнений $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_k(X)\}$ языка $\mathcal{L}$, что $\mathcal{A} \not\models f(A_i)$ для всех $f \in F$ и $i \in \mathbb{N}$ и для всех таких $a \in A^n$, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ $\mathcal{A} \models s_i(a)$, обязательно найдется такое уравнение $f \in F$, что $\mathcal{A} \models f(a)$.*

Пункт 1 леммы 1 был получен М. В. Котовым в [**2**]. С его помощью ранее были описаны нётеровы по уравнениям графы (автор с А. В. Трейером). Опираясь на это описание, а также на пункты 2 и 3 леммы 1, автором были получены критерии q_ω-компактности и u_ω-компактности для простых графов на языке запрещенных подграфов. Аналогичные результаты были получены для графов с петлями.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект номер 19-11-00209.

Список литературы

[1] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2016. 243 с.

[2] Котов М. В. Несколько замечаний о нётеровости по уравнениям // Вестн. Ом. ун-та. 2013, 2. С. 24–28.

ОмГУ им. Ф. М. Достоевского, ОФИМ СО РАН, Омск
E-mail: buchvan@mail.ru

О сильно минимальном сплавлении систем Штейнера с элиминацией воображаемых элементов

В. В. Вербовский

Как известно, система Штейнера с параметрами t, k и n (символьно записывается $S(t,k,n)$) — это состоящее из n элементов множество S вместе с набором k-элементных подмножеств множества S (называемых блоками) с таким свойством, что каждое t-элементное подмножество множества S содержится ровно в одном блоке. Понятно, что если $t = 2$, то $S(2, q+1, q^2+q+1)$ образует конечную проективную плоскость порядка q — любые две точки определяют единственную прямую, каждая прямая состоит из $q+1$ точки.

В работе [**1**] были построены примеры бесконечных сильно минимальных систем Штейнера для $t = 2$. В работе [**2**] эти примеры были исследованы на предмет существования формульных функций от нескольких переменных, в частности, было доказано, что при определенных ограничениях на функцию μ для любого независимого множества I имеет место:

$$\mathrm{dcl}(I) = \bigcup_{a\in I} \mathrm{dcl}(a)$$

Здесь доказана следующая теорема.

Теорема. *Существует континуум сильно минимальных плоских теорий сигнатуры $\Sigma = \{R_n^{n+3} \mid n < \omega\}$, так что при любом $m < \omega$ сужение моделей до $\{R_m^{m+3}\}$ этих теории образует бесконечную систему Штейнера $S(m+2, m+3, \lambda)$, где λ — мощность рассматриваемой модели, причем каждая из этих теорий допускает сокращение воображаемых элементов.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК по проекту AP09259295 “Об алгебраическом и определимом замыканиях в новых сильно минимальных теориях” на 2021 – 2023 годы.

Список литературы

[1] Baldwin J. T., Paolini G. Strongly Minimal Steiner Systems I // Journal of Symbolic Logic. 2020, P. 1?15. Published online oct 22, 2020 arXiv:1903.03541.

[2] Baldwin J. T., Verbovskiy V. Towards a Finer Classification of Strongly Minimal Sets // arXiv:2106.15567, 2021. P. 1–58.

Казахский национальный исследовательский технический университет имени К. Сатпаева, Алма-Ата (Казахстан)
E-mail: viktor.verbovskiy@gmail.com

О порождающих множествах l-арной группы

А. М. Гальмак

В [**1**] установлено, что *если группа A порождается множеством M, σ — цикл длины k из* S_k, *k делит $l-1$, то для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< A^k, [\,]_{l,\sigma,k} >$ порождается множеством $\mathrm{U}_j(M) \bigcup \{\mathrm{e}\}$, где $e = (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})$, ε — единица группы A,*

$$\mathrm{U}_j(M) = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, a, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}) | a \in M\}.$$

Следующая теорема показывает, что в некоторых случаях элемент **e** может быть исключён из порождающего множества l-арной группы $< A^k, [\,]_{l,\sigma,k} >$.

Теорема. *Пусть группа A порождается множеством M, σ — цикл длины k из* $\mathrm{S}_k, r \geq 2, d$ *делит $r + 1$, c делит r, существуют элементы $u, v \in M$ такие, что $u^d = v^c = 1$. Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< A^k, [\,]_{l,\sigma,k} >$, где $l = rk + 1$, порождается множеством $\mathrm{U}_j(M)$.*

Следствие 1. *Пусть группа A порождается множеством M, σ — цикл длины k из $\mathrm{S}_k, r \geq 2$, существуют элементы $u, v \in M$ такие, что $u^{r+1} = v^r = 1$. Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< A^k, [\,]_{l,\sigma,k} >$, где $l = rk + 1$, порождается множеством $\mathrm{U}_j(M)$.*

Так как $(1\ 2\ \ldots\ n)^n = (1\ 2)^{n-1} = (1\ 2)^{n+1} = \varepsilon$ для нечётного n, то, из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Полиадические группы $< \mathrm{S}_n^k, [\,]_{(n-1)k+1,\sigma,k} >$, $< \mathrm{S}_n^k, [\,]_{nk+1,\sigma,k} >$, где $n \geq 3$ — нечётное, σ — цикл длины k из S_k , порождаются множеством*

$$\mathrm{U}_j(M) = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Так как $(2\ 3\ \ldots\ n)^{n-1} = (1\ 2)^n = \varepsilon$ для чётного n, то, из следствия 1 вытекает

Следствие 3. *Полиадическая группа $< \mathrm{S}_n^k, [\,]_{(n-1)k+1,\sigma,k} >$, где $n \geq 4$ — чётное, σ — цикл длины k из S_k , порождается множеством*

$$\mathrm{U}_j(M) = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (2\ 3\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Список литературы

[1] Гальмак А. М. О порождающих множествах l-арной группы $< A^k, [\,]_{l,\sigma,k} >$ // Проблемы физики, математики и техники. 2021. 2. С. 54–59.

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв (Белоруссия)
E-mail: halm54@mail.ru

Идемпотенты и делители нуля в полиадических полугруппах специального вида

А. М. Гальмак, И. В. Юрченко

Полиадические группоиды специального вида были определены в [**1**]. Два частных случая l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ изучал Э. Пост [**2**]. Одну из них он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую — на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

В [**1**] доказано, что, тождественность подстановки σ^{l-1} влечёт за собой перенос ассоциативности с n-арной операции η на l-арную операцию $\eta_{s,\sigma,k}$.

Согласно следующей теореме, если в n-арной полугруппе имеется нуль, то в l-арная полугруппа $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ также обладает нулем, а все её элементы являются делителями этого нуля.

Теорема 1. *Пусть n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает нулем 0, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:*

1) элемент $\mathbf{0}$ является нулём l-арной полугруппы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} = \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}$;

2) если $l \geq 3$, то в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ все элементы являются делителями нуля.

Идемпотенты l-арной полугруппы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ и её элементы, у которых, по крайней мере, одна компонента является нулевой описывает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает нулем 0, σ — цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, k делит $l-1$. Тогда:*

1) если σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, то у любого идемпотента из $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ все компоненты либо совпадают с 0, либо отличны от 0;

2) для любого элемента $\mathbf{a} \in A^k$, у которого, по крайней мере, одна компонента является нулевой, имеет место равенство $\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{a}}_{l}) = \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}$.

Если в теоремах 1 и 2 положить $n = 2$, $k = 2$, $s = 2$, а в качестве n-арной полугруппы $< A, \eta >$ взять полугруппу $\mathbf{N}$ натуральных чисел с операцией взятия наибольшего общего делителя: $\eta(mn) = \mathbf{НОД}(m, n)$, то получим тернарную полугруппу $< \mathbf{N}^2, \eta_{2,(12),2} >$ с нулём $(1, 1)$. В этой тернарной полугруппе все элементы являются делителями нуля, а множество всех её идемпотентов исчерпывается элементами вида (n, n).

Список литературы

[1] Гальмак А. М., Русаков А. Д. О полиадических операциях на декартовых степенях // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2014. 3. С. 35–40.

[2] Post E. L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. No. 2. P. 208–350.

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв (Белоруссия)
E-mail: halm54@mail.ru

Конечность 3-порождённой решётки, близкой к дистрибутивной

А. Г. Гейн, И. Д. Маслинцын, К. Э. Рабой, К. В. Селиванов

В [**1, 2**] рассматривается класс решёток, названных близкими к дистрибутивным.

Определение. *Решётка называется близкой к дистрибутивной, если для любых элементов x, y и z интервалы*

$$[(x \wedge z) \vee (y \wedge z); (x \vee y) \wedge z] \text{ и } [(x \wedge y) \vee z; (x \vee z) \wedge (y \vee z)]$$

имеют длину, не большую 1.

Там же отмечено, что этот класс содержит в себе многообразие модулярных решёток. Как известно, свободная модулярная решётка ранга 3 конечна. Поэтому естествен вопрос о конечности 3-порождённой решётки, близкой к дистрибутивной. Ответ на этот вопрос положителен.

Теорема 1. *3-порождённая решётка, близкая к дистрибутивной, содержит не более 31 элемента.*

Это оценка является точной.

Теорема 2. *Существует и притом единственная близкая к дистрибутивной 3-порождённая решётка, содержащая 31 элемент.*

Список литературы

[1] Гейн А.Г., Маслинцын И.Д., Рабой К.Э. О решётках, близких к дистрибутивным // Международная алгебраическая конференция «Мальцевские чтения»: Тезисы докл. Новосибирск, 19–23 августа 2019 г. Новосибирск, ИМ СО РАН, 2019. С. 186.

[2] Гейн А.Г., Маслинцын И.Д., Рабой К.Э. Определяющие соотношения в 3-порожденной решетке, близкой к дистрибутивной // Международная алгебраическая конференция «Мальцевские чтения»: Тезисы докл. Новосибирск, 16–20 ноября 2020 г. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2020. С. 220.

Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург
E-mail: a.g.geyn@urfu.ru, maslintsyn@gmail.com, raboyk@mail.ru, ckirill2000@mail.ru

Алгебры бинарных изолирующих формул для лексикографических произведений графов

Д. Ю. Емельянов

В работе продолжается изучение алгебр распределений бинарных изолирующих формул [**1**] и описываются такие алгебры для теорий лексикографических произведений графов.

Определение [**2**]. *Лексикографическое произведение* $G \cdot H$ *графов* G *и* H *— это граф, такой, что:*

- *множество вершин графа* $G \cdot H$ *есть* $V(G) \times V(H)$*, то есть прямое произведение множеств вершин графов* G *и* H*;*
- *любые две вершины* (u, v) *и* (x, y) *смежны в* $G \cdot H$ *тогда и только тогда, когда либо* u *смежна* x *в* G*, либо* $u = x$ *и* v *смежна* y *в* H*.*

Алгебра $\mathfrak{L}_\mathfrak{n}$ для лексикографического произведения двух графов $G \cdot H$, с диаметром графа n, задаётся следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\ldots$	n
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{n\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\ldots$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6\}$	$\ldots$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$
3	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$	$\ldots$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$
4	$\{4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$	$\ldots$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	$\{n\}$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$	$\ldots$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$

Теорема. *Алгебры для теорий лексикографических произведений графов поглощаются алгебрами для симплексов* [**3**].

Автор был поддержан грантом РФФИ No 20-31-90004 и грантом Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан No AP08855544.

Список литературы

[1] Sudoplatov S. V. Classification of countable models of complete theories. Part 1. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2018. 376 p.

[2] Hausdorff F. Grundzuge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.

[3] Емельянов Д. Ю. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для теорий симплексов // Algebra and Model Theory 11: Collection of papers. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2017. P. 66–74.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: dima-pavlyk@mail.ru

О характеризации решеток с дополнениями квазимногообразий унаров

В. К. Карташов, А. В. Карташова

Как известно, проблема Биркгофа-Мальцева заключается в описании класса всех решеток, каждая из которых изоморфна решетке вида $L_q(\mathcal{K})$ всех подквазимногообразий некоторого квазимногообразия $\mathcal{K}$. Такие решетки содержат значительную информацию о базисах квазитождеств квазимногообразия $\mathcal{K}$.

В настоящем сообщении приведено описание класса всех решеток с дополнениями, каждая из которых изоморфна решетке $L_q(\mathcal{K})$ для некоторого квазимногообразия $\mathcal{K}$ унаров.

Пусть $\mathbf{N}$ – множество всех целых положительных чисел и $\mathfrak{A} = \langle\{0, 1, 2\}, \leq\rangle$ — трехэлементная цепь. Для любого $n \in \mathbf{N}$ через $L_c(n)$ обозначим подмножество декартовой степени $\mathfrak{A}^n$, состоящее из упорядоченных наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, удовлетворяющих следующим двум условиям:
1) $a_1 \in \{1, 2\}$;
2) $\forall i, k \in \{1, 2, \ldots, n\}(i > k \ \&\ a_k = 2 \Rightarrow a_i \neq 1)$.

Очевидно, что $\langle L_c(n), \leq\rangle$ — решетка.

Теорема 1. *Конечная решетка L с дополнениями, имеющая n атомов, изоморфна решетке $L_q(\mathcal{K})$ для некоторого квазимногообразия $\mathcal{K}$ унаров тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из следующих условий:*
1) L — булева решетка;
2) $L \cong L_c(n)$;
3) $L \cong L_c(n-1) \times \widetilde{\mathbf{2}}$, где $n \geq 2$ и $\widetilde{\mathbf{2}}$ — двухэлементная решетка.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — некоторое квазимногообразие унаров и $L_q(\mathcal{K})$ — конечная решетка с дополнениями, имеющая n атомов. Тогда мощность этой решетки равна либо 2^n, либо $2^{n-2}(n+3)$, либо $2^{n-2}(n+2)$.*

Пусть $\mathbf{N}_0^\infty$ — множество целых неотрицательных чисел с присоединенным внешним образом наибольшим элементом ∞. Для любого целого $n \geq 2$ обозначим через $L_c(n, \infty)$ множество всех наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathfrak{A}^{n-1} \times \mathbf{N}_0^\infty$, удовлетворяющих следующим двум условиям: 1) $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \in L_c(n-1)$
2)$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}(a_i = 2 \Rightarrow a_n \in \{0, \infty\})$.

Теорема 3. *Бесконечная решетка L с дополнениями изоморфна решетке $L_q(\mathcal{K})$ для некоторого квазимногообразия $\mathcal{K}$ унаров тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из следующих условий:*
1) $L \cong L_c(n, \infty)$, где $n \geq 2$ — число атомов решетки L;
2) $L \cong L_c(n-1, \infty) \times \widetilde{\mathbf{2}}$, где $n \geq 3$ — число атомов решетки L.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград
E-mail: kartashovvk@yandex.ru

О наследственно вербально чистых полугруппах с центральным идемпотентом

О. В. Князев

В [**1**] ставится проблема 3.17: *описать наследственно чистые алгебры данного многообразия алгебр.* Мы изучаем наследственно вербально чистые полугруппы в классе полугрупп с выделенным центральным идемпотентом.

Напомним некоторые определения. Полугруппы с центральным идемпотентом рассматриваются здесь как алгебры с бинарной ассоциативной операцией — умножением и нульарной операцией — выделением идемпотента, коммутирующего со всеми элементами алгебры.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех полугрупп с центральным идемпотентом; $\boldsymbol{L}(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in \boldsymbol{L}(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$. В дальнейшем под словом "полугруппа" понимается алгебра из многообразия $\mathbf{V}$. Единственным классом $\mathbf{X}$-вербальной конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, A)$ на полугруппе A ($\rho(\mathbf{X}, A)$ — наименьшая из конгруэнций на A, фактор-полугруппы по которым принадлежат $\mathbf{X}$), являющимся подполугруппой полугруппы A, будет класс, содержащий выделенный идемпотент. Обозначают его через $\mathbf{X}(A)$ и называют $\mathbf{X}$-*вербалом* полугруппы A. Если для любого многообразия $\mathbf{X}$ из решетки $\boldsymbol{L}(\mathbf{V})$ выполняется равенство $\mathbf{X}(B) = \mathbf{X}(A) \cap B$, то подполугруппу B полугруппы A называют *вербально чистой* в A. Если все подполугруппы полугруппы A являются вербально чистыми, то A говорят, что A *наследственно вербально чистая полугруппа.*

Вполне регулярной полугруппой мы называем объединение групп, а комбинаторный моноидом — моноид у которого нет нетривиальных групп в качестве подмоноидов. Пусть полугруппа M есть расширение комбинаторного периодического моноида при помощи прямого произведения циклических групп различных простых порядков и полугруппа N есть идеальное расширение периодической вполне регулярной полугруппы с нулем при помощи полугруппы с нулевым умножением.

Теорема. *Всякая наследственно вербально чистая полугруппа из* $\mathbf{V}$ *является идеальным расширением полугруппы* M *при помощи полугруппы* N*.*

Список литературы

[1] Мартынов Л. М. Полнота, рецуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 181–241.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: knyazev50@rambler.ru

О критерии тотальной трансцендентности для семейств упорядоченных теорий

Б. Ш. Кулпешов, И. И. Павлюк, С. В. Судоплатов

В настоящем докладе мы исследуем свойства рангов для семейств упорядоченных теорий. Получены критерии e-тотальной трансцендентности для семейств плотно упорядоченных теорий, семейств o-минимальных плотно упорядоченных теорий и семейств слабо o-минимальных плотно упорядоченных теорий в терминах описания символов сигнатуры.

Пусть $\mathcal{T}$ — семейство полных теорий фиксированной сигнатуры Σ, ϕ — произвольное Σ-предложение. Тогда множество $\mathcal{T}_\phi := \{T \in \mathcal{T} \mid T \models \phi\}$ называется *ϕ-окрестностью* семейства $\mathcal{T}$, или *s-определимым* подсемейством семейства $\mathcal{T}$, задаваемым предложением ϕ.

Определение. [**1**] Пусть $\mathcal{T}$ — семейство полных теорий фиксированной сигнатуры Σ. Определим *ранг* $\mathrm{RS}(\mathcal{T})$ для семейства $\mathcal{T}$ следующим образом:

(1) $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = -1$, если $\mathcal{T} = \emptyset$.

(2) $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = 0$, если $\mathcal{T}$ — конечное непустое семейство.

(3) $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq 1$, если $\mathcal{T}$ бесконечно.

(4) $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha+1$, если существуют попарно несовместные Σ-предложения $\phi_n, n \in \omega$, такие что $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\phi_n}) \geq \alpha$.

(5) Если δ — предельный ординал, то $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \delta$, если $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \beta$ для любого $\beta < \delta$.

Мы полагаем $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$, если $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha$ и $\neg[\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha + 1]$.

Если $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha$ для любого ординала α, то мы полагаем $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \infty$.

Семейство $\mathcal{T}$ называется *e-тотально трансцендентным* или *тотально трансцендентным*, если $\mathrm{RS}(\mathcal{T})$ является ординалом.

Следующая теорема является критерием e-тотальной трансцендентности семейства $\mathcal{T}_\Sigma^{\mathrm{dense}}$ всех плотно упорядоченных теорий произвольной сигнатуры Σ:

Теорема. *Семейство $\mathcal{T}_\Sigma^{\mathrm{dense}}$ e-тотально трансцендентно $\Leftrightarrow$ сигнатура Σ помимо бинарного предикатного символа, выражающего отношение линейного порядка, содержит лишь конечное число нульместных предикатных и функциональных символов.*

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант AP08855544).

Список литературы

[1] Sudoplatov S. V. Ranks for families of theories and their spectra // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, No. 12 (to appear). arXiv:1901.08464v1 [math.LO], 2019, 17 p.

Казахстанско-Британский технический университет, Алма-Ата (Казахстан); Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск; Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz, inessa7772@mail.ru, sudoplat@math.nsc.ru

О предгеометриях кубических теорий

С. Б. Малышев

Приводится описание видов предгеометрий [**1**] для кубических теорий [**2, 3**].

Напомним некоторые основные виды предгеометрий.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ называется *тривиальной* или *вырожденной*, если для любого $X \subseteq S$, $\mathrm{acl}(X) = \cup\{\mathrm{acl}(\{a\}) \mid a \in X\}$.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ называется *модулярной*, если для любых замкнутых множеств $X, Y \subseteq S$, X независимо от Y относительно $X \cap Y$, т.е. для любых конечномерных замкнутых множеств X, Y верно $\dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y) = \dim(X \cup Y)$.

Имеет место следующая теорема о дихотомии:

Теорема. *Пусть T — кубическая теория. Тогда для некоторой модели $\mathcal{M} = \langle S, R\rangle$ теории T выполняется одно из следующих двух условий:*

1) *все компоненты связности модели $\mathcal{M}$ конечны и имеют ограниченную мощность, а предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ вырожденная;*

2) *модель $\mathcal{M}$ имеет бесконечную компоненту связности, которая является λ-кубом для некоторого кардинала λ, а предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ модулярная.*

Список литературы

[1] Pillay A. Geometric Stability Theory. Oxford: Clarendon Press, 1996. 361 p.

[2] Судоплатов С. В. Полигонометрии групп: Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013. 302 с.

[3] Sudoplatov S. V. Models of cubic theories // Bulletin of the Section of Logic. 2014. Vol. 43, No. 1-2. P. 19–34.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: sergei2-mal1@yandex.ru

Абстрактная эквивалентность функциональных клонов

А. Г. Пинус

Через F_A обозначим совокупность всех функциональных клонов на множестве A. Для любого $F \in F_A$ через $\mathfrak{a}_F$ обозначим универсальную алгебру $\langle A; F\rangle$, сигнатура которой состоит из всех функций, входящих в F.

Под «абстрактной эквивалентностью» $\sim$ клонов F_1 и F_2 из F_A будем понимать рациональную эквивалентность алгебр $\mathfrak{a}_{F_1}$ и $\mathfrak{a}_{F_2}$, т. е. $F_1 \sim F_2$ тогда и только тогда, когда существует перестановка π на A, сопрягающая совокупности функций, входящих в F_1 и F_2 соответственно. На F_A определим так же отношение $\leqslant$, являющееся производным от отношения между универсальными алгебрами, когда одна алгебра есть «обогащение» другой. Для $F_1, F_2 \in F_A$ положим $F_1 \leqslant F_2$ тогда и только тогда, когда существует перестановка π на A, такая, что $\pi(F_1)\pi^{-1} \subseteq F_2$. Очевидно, что отношение $\leqslant$ является отношением квазипорядка на F_A, и через $\approx$ обозначим отношение эквивалентности на F_A, порожденное этим квазипорядком. Так же очевидно, что эквивалентность $\approx$ больше, чем эквивалентность $\sim$.

Имеет место

Теорема 1. *Отношения $\sim$ и $\approx$ на F_A совпадают тогда и только тогда, когда множество A конечно.*

Отметим одно из следствий доказательства этой теоремы.

Следствие. *Для бесконечных A существуют клоны F на A такие, что класс $F/\approx$ содержит как минимум континуум попарно не $\sim$-эквивалентных клонов на A.*

Отметим еще один результат, связанный с отношением $\sim$ на F_A.

Теорема 2. *Конъюнкции отношений $F_1 \subseteq F_2$ и $F_1 \sim F_2$ для клонов F_1, F_2 из F_A влекут равенство этих клонов тогда и только тогда, когда множество A конечно.*

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: ag.pinus@gmail.com

Об обобщенной стабильности класса инъективных полигонов

А. А. Степанова

Понятие P-стабильности является частным случаем обобщенной стабильности полных теорий [**1**]. Абелевы группы с P-стабильной теорией описаны в [**2**]. В [**3**] даётся полное описание $(P,1)$-стабильных теорий в терминах определимой интерпретируемости в теории языка одноместных предикатов. В [**4**] рассмотрены S-полигоны с $(P,1)$-стабильной теорией; кроме того, доказано, что (P,s)-,(P,a)-, (P,e)-стабильность класса всех S-полигонов над моноидом S эквивалентна тому, что S –? группа. В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с P-стабильностью некоторых классов S-полигонов.

Напомним некоторые определения. Пусть S — моноид, 1 — единица S. Под *левым S-полигоном* $_SA$ (или просто *S-полигоном*) понимается алгебраическая система $\langle A; L_S\rangle$ языка $L_s = \{f_s^{(1)} | s \in S\}$ такая, что $f_s(f_t(a)) = f_{st}(a)$ и $f_1(a) = a$ для любых $a \in A$, $s,t \in S$. ***Инъективным полигоном*** называется полигон $_SQ$ такой, что для любых полигонов $_SA$, $_SB$, для любого мономорфизма $\imath : {_SA} \to {_SB}$ и для любого гомоморфизма $\varphi : {_SA} \to {_SQ}$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : {_SB} \to {_SQ}$ такой, что $\bar{\varphi}\imath = \varphi$. Через S-**Inj** обозначим класс всех инъективных полигонов над S.

Теорема 1. *Если класс S-**Inj** инъективных полигонов $(P,1)$-стабилен, то S — одноэлементный моноид.*

Теорема 2. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

*1) класс S-**Inj** инъективных полигонов (P,s)-стабилен;*

*2) класс S-**Inj** инъективных полигонов (P,a)-стабилен;*

*3) класс S-**Inj** инъективных полигонов (P,e)-стабилен;*

4) S — группа.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, дополнительное соглашение от 01.06.2021 075-02-2021-1395.

Список литературы

[1] Палютин Е. А. E^*-стабильные теории // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, N 2. С. 194–210.

[2] Палютин Е. А. P-стабильные абелевы группы // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, N 5. С. 606–631.

[3] Русалеев М. А. Характеризация $(P,1)$-стабильных теорий // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, N 2. С. 346–359.

[4] Птахов Д. О. Полигоны с $(P,1)$-стабильной теорией // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, N 6. С. 712–720.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: stepltd@mail.ru

О конгруэнц-перестановочных полигонах

А. А. Степанова, С. Г. Чеканов

В работе изучается строение конгруэнц-перестановочных полигонов над коммутативными моноидами и над группами, т.е. полигонов, любые две конгруэнции которых перестановочны относительно композиции. Известно, что из конгруэнц-перестановочности алгебры следует модулярность решетки конгруэнций этой алгебры. В этом смысле, данная работа продолжает исследования, начатые в [**1**]–[**3**], где дана характеризация полигонов над полугруппами правых и левых нулей, имеющих модулярные решетки конгруэнций [**1**]; описаны полигоны над вполне упорядоченным моноидом с модулярной решеткой конгруэнций [**2**]; изучено строение сильно точных полигонов над коммутативными моноидами и над группами, решетки конгруэнций которых модулярны [**3**].

Напомним некоторые определения (см.[**4**]). Пусть S — моноид. Левым *S-полигоном* (или просто *полигоном*) ${}_SA$ называется непустое множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно. Элемент a полигона ${}_SA$ называется *нулем полигона* ${}_SA$, если $sa = a$ для всех $s \in S$. Элементы $a, b \in A$ называются *связанными* в полигоне ${}_SA$, если существуют $n \in \omega, c_i \in A$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и $s_j, t_j \in S$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ такие, что $a = c_0$, $b = c_n$ и $s_i c_{i-1} = t_i c_i$ для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Полигон ${}_SA$ называется *связным*, если любые два элемента в нем связаны. *Копроизведением* $\bigsqcup_{i\in I} A_i$ полигонов ${}_SA_i$ $(i \in I)$ называется их дизъюнктное объединение.

Теорема 1. *Пусть S — коммутативный моноид. Полигон ${}_SA$ конгруэнц-перестановочен тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) если ${}_SA$ — связный полигон, то в ${}_SA$ не более одного нуля и $A = Sa$ для любого $a \in A$, не являющегося нулем полигона ${}_SA$;

2) если ${}_SA$ — несвязный полигон, то ${}_SA = {}_SA_0 \coprod {}_SA_1$, причем

a) если в ${}_SA_i$ есть ноль, то $|A_i| = 1$ и ${}_SA_{1-i} = {}_SSa$ для любого $a \in A_{1-i}$, где $i \in \{0, 1\}$;

b) если в ${}_SA$ нет нулей, то ${}_SA_i = {}_SSa$ для любых $a \in A_i$, $i \in \{0, 1\}$ и для любых $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$ конгруэнция, порожденная парой $\langle a_0, a_1\rangle$, является единичной конгруэнцией полигона ${}_SA$.

Пусть G — группа, H — подгруппа группы G. Введем обозначение: $G/H = \{gH \mid g \in G\}$. Ясно, что множество G/H является полигоном относительно операции $g' \cdot gH = (g'g)H$ для любых $g', g \in G$.

Теорема 2. *Пусть G — группа. Полигон ${}_GA$ конгруэнц-перестановочен тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) если ${}_GA$ — связный полигон, то ${}_GA = {}_GG/H$ для некоторой H подгруппы группы G и $K_1K_2 = K_2K_1$ для любых подгрупп K_1, K_2 группы G, содержащих группу H;

2) если ${}_GA$ — несвязный полигон, то

a) ${}_GA = {}_GG/H_1 \coprod_G G/H_2$ для некоторых H_1, H_2 подгрупп группы G;

b) $K_1K_2 = K_2K_1$ для любых подгрупп K_1, K_2 группы G, содержащих группу H_i, $i \in \{1, 2\}$;

c) для любого $g \in G$, любых подгрупп H_1' и H_2', сопряженных с подгруппами H_1 и H_2 соответственно, существует $k \geq 1$ такой, что $g \in (H_1'H_2')^k$.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, дополнительное соглашение от 01.06.2021 075-02-2021-1395.

Список литературы

[1] Халиуллина А. Р. Конгруэнции полигонов над группами // Материалы 20-ой Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика — 2013». Москва, 2013. С. 148.

[2] Stepanova, A. A. S-acts over a well-ordered monoid with modular congruence lattice // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2021. Т. 35. С. 87–102. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.35.

[3] Степанова, А. А. Трикашная Н. В. Сильно точные полигоны над коммутативными моноидами и группами с модулярными решетками когруэнций // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 1067–1077.

[4] Kilp M. Monoids, acts and categories with applications to wreath products and graphs: a handbook for students and researchers / M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev. Berlin, New York.: de Gruyter, 2000. 546 p.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: stepltd@mail.ru, chekanov.sg@dvfu.ru

Компаньоны и экзистенциально замкнутые компаньоны поля рациональных чисел

З. Г. Хисамиев

В данной работе компаньон-поле или просто компаньон поля рациональных чисел это поле каждая конечная частичная подструктура которой изоморфна некоторой конечной частичной подструктуре поля рациональных чисел. Общая теория классов компаньонов, теорий этих классов, описание экзистенциально замкнутых компаньонов созданы в работах Нуртазина А.Т., основные определения, задачи и многие важные результаты изложены в [1]. Задача об исследовании компаньон-полей поля рациональных чисел предложена им же.

Теорема. *Число неизоморфных экзистенциально замкнутых компаньон-расширений поля рациональных чисел одной и той же конечной ненулевой степени трансцендентности континуально.*

Список литературы

[1] Нуртазин А. Т. Введение в теорию моделей, элиминация кванторов и экзистенциальная замкнутость. Алматы: НЦ ГНТЭ, 2017. 187 с.

Институт информационных и вычислительных технологий, Алма-Ата (Казахстан)
E-mail: khisamievZ@mail.ru

Identities and quasi-identities of pointed algebras

A. O. Basheyeva, M. Mustafa, A. M. Nurakunov

A *pointed enrichment* of algebra may be regarded as the same algebra with an extra finite set of constant operations. An algebra is called a *pointed algebra* if it is a pointed enrichment of some algebra. We show that if a finite algebra belongs to finitely axiomatizable residually very finite variety then every its pointed enrichment has a finite basis of identities. Also we show that if a finite algebra belongs to directly representable quasivariety then every its pointed enrichment has a finite basis of quasi-identities. Some corollaries and examples are provided.

Gumilev's Eurasian National University, Nur-Sultan (Kazakhstan)
Nazarbaev University, Nur-Sultan (Kazakhstan)
Institute of Mathematics NAS KR, Bishkek (Kyrgyzstan)
E-mail: a.nurakunov@gmail.com

On the properties of formula-definable semigroups of complete theories

M. I. Bekenov, A. M. Kasatova, S. M. Lutsak

In [1] a binary operation $\{\cdot\}$ was defined on the set $Th(\sigma)$ of all (complete) first-order theories of the language σ, with respect to which $Th(\sigma)$ forms a commutative semigroup, which we call the semigroup of (complete) theories. In [2] the highest complexity of the structure of the lattice of subsemigroups of a semigroup of theories was shown.

In this work we consider the formula-definable subsemigroups and idempotently formula-definable subsemigroups of the semigroup of complete theories on the semigroup of complete theories of a first-order countable language with respect to the product of complete theories. We prove some properties that they satisfy. We show that the idempotent elements of idempotently formula-definable subsemigroups form a complete lattice.

A set of theories H is called a formula-definable set of theories if there exists a theory T such that, for any theory T_1, $T_1 \in H$ holds if and only if $T_1 \cdot T = T$. The theory T in this case is called the determinant of the set H, and if the determinant of the set H is an idempotent theory then H is called an idempotently formula-definable set of theories. Respectively, if the determinant of a formula-definable semigroup of theories is an idempotent then such a semigroup is called an idempotently formula-definable semigroup of theories.

Here are some of the results obtained.

Theorem 1. *The formula-definable set of theories is closed with respect to ultraproducts of theories, finite products of theories, that is, it is an axiomatizable set of theories and a commutative semigroup with unity.*

Theorem 2. *A formula-definable semigroup of theories is closed with respect to infinite products.*

Theorem 3. *A formula-definable semigroup of theories is an idempotently formula-definable semigroup of theories whose idempotent determinant is the only one.*

Note that the authors have obtained many other results.

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (the first author by Grant No. AP092592952, the third author by Grant No. AP09058390).

References

[1] Bekenov M. I., Nurakunov A. M. A semigroup of theories and its lattice of idempotent elements // Algebra and Logic. 2021. Vol. 60, No. 1. P. 1–14.

[2] Schwidefsky M. V. On a class of subsemigroup lattices // Siberian Mathematical Journal. 2020. Vol. 61, No. 5. P. 941–952.

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan (Kazakhstan); M. Kozybayev North Kazakhstan University, Petropavlovsk (Kazakhstan)

E-mail: bekenov50@mail.ru, kasatova_aida@mail.ru, sveta_lutsak@mail.ru

Semigroup of theories and its lattice of idempotent elements

M. I. Bekenov, A. M. Nurakunov

On the set of all first-order theories $T(\sigma)$ of a language σ we define a binary operation $\{\cdot\}$ by the rule: $T \cdot S = \mathrm{Th}\,(\{A \times B \mid A \models T \text{ and } B \models S\})$ for any theories $T, S \in T(\sigma)$. The structure $\langle T(\sigma); \cdot\rangle$ forms a commutative semigroup which is called a *semigroup of theories*. We show that the semigroup of theories is an ideal extension of some semigroup S_T^* by semigroup S_T. We prove that the set of all idempotent elements of semigroup of theories forms a complete lattice with respect to the partial order $\leq$ defined as $T \leq S$ iff $T \cdot S = S$, for all $T, S \in T(\sigma)$. Also we show that the set of all idempotent complete theories forms a complete lattice with respect to the partial order $\leq$ which is not necessary a sublattice of the lattice of idempotent theories.

The first author was supported by MES RK (Grant No. AP05132688) and the second author was supported by MES RK (Grant No. AP05132349 “Computability, interpretability and algebraic structures”).

Eurasian National University, Nur-Sultan (Kazakhstan); Institute of Mathematics, NAS KR, Bishkek (Kyrgyzstan)
E-mail: bekenov50@mail.ru, a.nurakunov@gmail.com

On expansions of theories with three countable models

A. B. Dauletiyarova

We continue to study expansions of dense orders and characterize properties of Ehrenfeuchtness and the maximality for numbers of countable models [**1**]. For this, we consider a theory with three non-isomorphic countable models [**2**] in which definable closures of the empty set are infinite, and has a structure of dense linear order or a structure of dense branching tree $\mathcal{T}$ forming a lower semilattice. This theory interprets a variant of Ehrenfeucht's [**3**] or Peretyat'kin's example [**4**].

We set $T^1 \rightleftharpoons \mathrm{Th}((\mathcal{T}; <, c_n)_{n\in\omega})$ and $T^2 \rightleftharpoons \mathrm{Th}((\mathcal{T}; <, c_n, c'_n)_{n\in\omega})$, where $<$ is an ordinary strict order on the set $\mathcal{T}$ of infinite dense branching tree forming a lower semilattice, constants c_n form a strictly increasing sequence, and constants c'_n form a strictly decreasing sequence, $c_n < c'_n, n \in \omega$. The theory T^1 is similar the Ehrenfeucht's example with $I(T^1, \omega) = 3$, and the theory T^2 has six pairwise nonisomorphic countable models.

In the monograph [**5**] it is shown that additional expansions T^3 by strictly decreasing sequences of constants preserve the Ehrenfeuchtness of theory, namely having three sequences $(c_n)_{n\in\omega}$, $(c'_n)_{n\in\omega}$, $(c''_n)_{n\in\omega}$ of constants, where the first one strictly increases, and two others strictly decrease with respect to $<$ on the tree $\mathcal{T}$, $c_n < c'_n$, $c_n < c''_n$, $n \in \omega$, c'_i and c''_j are incomparable, $i, j \in \omega$. We get 7 prime models over tuples and 27 limit models, that is, $I(T^3, \omega)$=34.

The following theorem shows that constant expansions T of the theory of dense branching tree with independent constant expansions of the form T^1, T^2, T^3 are exhausted by combinations of these numbers for the theories T^1, T^2 and T^3 and extends possibilities for characteristic representations of Ehrenfeucht theories observed for o-minimal Ehrenfeucht theories.

Theorem. *The theory T is characteristically equivalent to some finite disjoint union of theories of form T^1, T^2, T^3 ($T \sim_{ch} \coprod_{i=1}^{k} T_i^1 \sqcup \coprod_{j=1}^{l} T_j^2 \sqcup \coprod_{m=1}^{s} T_m^3$, where T_i^1 are similar to T^1, T_j^2 are similar to T^2 and T_m^3 are similar to T^3) and has $3^k \cdot 6^l \cdot 34^m$ pairwise nonisomorphic countable models.*

This research was supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544).

References

[1] Sudoplatov S. V., Dauletiyarova A. B. On some expansions of dense orders // Annual International April Mathematical Conference, Almaty, 2021. P. 131–132.

[2] Tanović P. Theories with constants and three countable models // Arch. Math. Logic. 2007. Vol. 46, No. 5-6. P. 517–527.

[3] Vaught R. Denumerable models of complete theories // Infinistic Methods. London: Pergamon, 1961. P. 303–321.

[4] Peretyat'kin M. G. On complete theories with a finite number of denumerable models / M. G. Peretyat'kin // Algebra and Logic. 1973. Vol. 12, No. 5. P. 310–326.

[5] Sudoplatov S. V. Classification of Countable Models of Complete Theories. Novosibirsk: NSTU, 2018.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia); Kazakh British Technical University, Almaty (Kazakhstan)

E-mail: d_aigera95@mail.ru

Axiomatizability of the class of subdirectly irreducible acts over a commutative monoid

E. L. Efremov, A. A. Stepanova

Let S be a monoid with identity 1, $L_S = \{s^{(1)} \mid s \in S\}$. An L_S-structure ${}_SA = \langle A; L_S\rangle$ is called *a (left) act over* S if $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ and $1a = a$ for all $a \in A$, $s_1, s_2 \in S$. An element $a \in A$ is called *a zero of* ${}_SA$ if $sa = a$ for any $s \in S$. We say that an element $a \in A$ *is contained in a s-cycle* ($s \in S$) if there exists $n \in \omega$, $n \neq 0$, such that $s^na = a$ and $s^ka \notin \left\{s^la \mid l < k\right\}$ for all $k < n$, $k \neq 0$.

An act ${}_SA$ is called *subdirectly irreducible* if

$$\bigcap\{\rho_i \mid \rho_i \neq \Delta, i \in I\} \neq \Delta$$

for every family of congruences ρ_i on ${}_SA$ ($i \in I$) where Δ is zero congruence on ${}_SA$. The interest in the study of such acts is caused by Birkhoff's theorem, according to which any algebra is isomorphic to a subdirect product of subdirectly irreducible algebras [1]. Denote by $\mathcal{SI}r(S)$ the class of subdirectly irreducible acts over a monoid S.

A class of L-structures $\mathcal{K}$ for a first order language L is *axiomatizable* if there exists a set of sentences Π in L such that an L-structure $\mathfrak{A}$ lies in $\mathcal{K}$ if and only if every sentence in Π is true in $\mathfrak{A}$. The question of axiomatizability of the class of subdirectly irreducible acts over an Abelian group was studied by Stepanova A.A. and Ptakhov D.O. [2]. We describe commutative monoids, the class of subdirectly irreducible acts over which is axiomatizable.

We say that the congruence θ of the monoid S satisfies the condition $(*)$ if

- S/θ contains zero $\Longrightarrow |S/\theta| > 2$,
- S/θ does not contain zero $\Longrightarrow |S/\theta| > 1$.

Theorem 1. *Let S be a commutative monoid. Then $\mathcal{SI}r(S)$ is axiomatizable class iff there exist $k \in \omega$ and a finite set $T \subseteq S$ such that for any subdirectly irreducible monoid S/θ, where θ is a congruence of monoid S satisfying the condition $(*)$, there exist $t \in T$ and $p^m \leqslant k$, where p is a prime, $m \in \omega$, $m \neq 0$, such that*

- *$s/\theta \in S/\theta$ is contained in some t-cycle of length p^m for any nonzero $s/\theta \in S/\theta$,*
- *if S/θ has no zero then $|S/\theta| = p^m$;*
- *if S/θ has a zero then one of two conditions is satisfied:*
  (1) $|S/\theta| = p^m + 1$;
  (2) *there exist $r \in T$ such that*
    - *$\langle r^2s, r^3s\rangle \in \theta$ for any $s \in S$,*
    - *$\langle rs_0, s_0\rangle \notin \theta$ for some $s_0 \in S$*
    - *if $\langle r^2s, rs\rangle \notin \theta$ then rs/θ is contained in some t-cycle of length p^m for any $s \in S$.*

Theorem 2. *Let S be a finite commutative monoid. Then the class $\mathcal{SI}r(S)$ is axiomatizable.*

Supported by RF Ministry of Education and Science (Suppl. Agreement No. 075-02-2021-1395 of 01.06.2021).

References

[1] Birkhoff G. Subdirect unions in universal algebra // Bulletin of the American Mathematical Society. 1944. Vol. 50. P. 764–768.

[2] Stepanova A. A., Ptakhov D. O. Axiomatizability of the class of subdirectly irreducible acts over an Abelian group // Algebra and Logic. 2020. Vol. 59, No. 5. P. 395–403.

Far Eastern Federal University, Vladivostok
E-mail: efremov-el@mail.ru, stepltd@mail.ru

On function spaces

Yu. L. Ershov, M. V. Schwidefsky

For certain properties $\mathfrak{P}$ of topological T_0-spaces, we prove that a T_0-space $\mathbb{Y}$ has property $\mathfrak{P}$ if and only if the function space $\mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ endowed with a certain topology $\mathcal{T}$ possesses $\mathfrak{P}$ for some space $\mathbb{X}$.

Both authors were supported by the fundamental research program of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences I.1.1, project 0314-2019-0003.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk
E-mail: ershov@math.nsc.ru, semenova@math.nsc.ru

Cross varieties of aperiodic monoids with commuting idempotents

S. V. Gusev

A variety of algebras is called *finitely based* if it has a finite basis of its identities. A variety is called *finitely generated* if it is generated by a finite algebra. A variety is *small* if it has finitely many subvarieties. A finitely generated, finitely based, small variety of algebras is called *Cross*.

Finite members from several classical classes of algebras such as groups [**4**] and associative rings [**1, 3**] generate Cross varieties. But this result does not hold in general. For example, there are a lot of finite semigroups or monoids that generate non-Cross varieties.

For any class of algebras in which finitely generated varieties and Cross varieties do not coincide, one method of describing Cross varieties in this class is to identify its minimal non-Cross varieties, or *almost Cross* varieties. In view of Zorn's lemma, every non-Cross variety contains some almost Cross subvariety. Therefore, classifying almost Cross varieties in a certain sense reduces to classifying Cross varieties.

A monoid is *aperiodic* if it has trivial subgroups only. In 2013, Lee [**2**] completely classified almost Cross varieties within the class $\mathbf{A}_{\mathsf{cen}}$ of aperiodic monoids with central idempotents showing that $\mathbf{A}_{\mathsf{cen}}$ contains precisely three almost Cross subvarieties. In this work, we generalize this result by Lee to the class $\mathbf{A}_{\mathsf{com}}$ of aperiodic monoids with commuting idempotents. We show that a subvariety of $\mathbf{A}_{\mathsf{com}}$ is Cross if and only if it excludes nine almost Cross subvarieties of $\mathbf{A}_{\mathsf{com}}$.

The work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FEUZ-2020-0016).

References

[1] Kruse R. L. Identities satisfied by a finite ring // J. Algebra. 1973, Vol. 26. P. 298–318.

[2] Lee E. W. H. Almost Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents // Beitr. Algebra Geom. 2013. Vol. 54. P. 121–129.

[3] L'vov I. V. Varieties of associative rings. I // Algebra i Logika, 1973. Vol. 12. P. 269–297. [Russian; Engl. translation: Algebra and Logic. 1973. Vol. 12. P. 150–167]

[4] Oates S., Powell M. B. Identical relations in finite groups // J. Algebra. 1964. Vol. 1. P. 11–39.

Ural Federal University, Ekaterinburg
E-mail: sergey.gusb@gmail.com

Companions of hybrids of fragments of theoretical subsets

M. T. Kassymetova, N. M. Mussina, S. M. Amanbekov

The symbol T always will denote some fixing Jonsson theory, perhaps with additional properties. C is the semantical model of the theory T. All sets and models considered in this abstract are correspondingly subsets and existentially closed submodels of considered model C. $X_i \subseteq C$, $i = 1, 2$.

Definition 1. [1] Let $Fr(X_1), Fr(X_2)$ be the fragments. A hybrid $H(Fr(X_1), Fr(X_2))$ of fragments $Fr(X_1)$, $Fr(X_2)$ is called the theory $Th_{\forall\exists}(C_1 \times C_2)$, if it is Jonsson theory, where C_i are the semantic models of $Fr(X_i), i = 1, 2$.

Fact. *For the theory $H(Fr(X_1), Fr(X_2))$ to be a Jonsson theory enough to $(C_1 \times C_2) \in E_T$.*

Definition 2. A set X is called a Jonsson set, if the following conditions hold:

1) X is a definable set by some existential formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \exists\bar{y}\psi(\bar{x}, \bar{y})$;

2) $cl(X) = M$, $M \in E_T$.

Definition 3. [2] A set X is called a theoretical set, if X is Jonsson set, $\varphi(C) = X$ and the sentence $\forall\bar{x}\exists\bar{y}\psi(\bar{x}, \bar{y})$ defines some Jonsson theory.

Definition 4. [2] The theory T will be called $\varphi(x)$-convex if it is strong convex in the classical sense and for any existentially closed model N_i of this theory, there is a some theoretical set A_{N_i}, such that $cl(A_{N_i}) = N_i$, $\varphi(N_i) = A_{N_i}$ and $\bigcap_i N_i = M \in E_T$.

In the following obtained results we propose that $cl = dcl = acl$, where cl is the closure operator of some pregeometry defined on all subsets of semantic model of considered Jonsson theory.

Theorem 1. *Let $Fr(X)$ be a perfect $\varphi(x)$-convex existentially prime complete for $\exists$-sentences a Jonsson theory, X_1, X_2 be the $\varphi(x)$-theoretical sets of the theory $Th_{\forall\exists}(C)$, where $M_i = dcl(X_i) \in E_{Fr(Th_{\forall\exists}(C))}$, $Fr(X_i) = Th_{\forall\exists}(M_i)$ are also perfect $\varphi(x)$-convex existentially prime complete for $\exists$-sentences a fragments. Then, if their hybrid $H(Fr(X_1), Fr(X_2))$ is a model consistent with $Fr(X_i)$, then $H(Fr(X_1), Fr(X_2))$ is a perfect Jonsson theories for $i = 1, 2$.*

Theorem 2. *Let $Fr(X), Fr(X_1), Fr(X_2)$ satisfy the conditions of Theorem 1 and $Fr(X_1)$, $Fr(X_2)$ be ω-categorical fragments. Then their hybrid $H(Fr(X_1), Fr(X_2))$ is also a ω-categorical Jonsson theory.*

All the concepts that are undefined here can be extracted from [1,2].

References

[1] Yeshkeyev A. R., Mussina N. M. Properties of hybrids of Jonsson theories // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. 2018. Vol. 92, No. 4. P. 99–104.

[2] Yeshkeyev A. R. Method of the rheostat for studying properties of fragments of theoretical sets // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. 2020. Vol. 100, No. 4. P. 152–159.

Karaganda Buketov University, Karaganda (Kazakhstan)
E-mail: nazerke170493@mail.ru

On complexity of quasivariety lattices of Lukasiewicz algebras

S. M. Lutsak, O. A. Voronina

In this work we study Birkhoff-Maltsev problem for Lukasiewicz algebras.

For every integer $n \geq 1$, a Lukasiewicz algebra $\mathcal{L}_n = \langle\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}; \rightarrow, \neg\rangle$ is an algebra with one binary operation $\rightarrow$ and one unary operation $\neg$ defined as follows: $x \rightarrow y = \min\{1, 1 - x + y\}$ and $\neg x = 1 - x$, for all $x, y \in L_n$.

We consider three measures of the highest complexity of the structure of quasivariety lattices: Q-universality, the property (N) or non-computability of the set of finite sublattices, and existence of continuum of quasivarieties without covers in a given quasivariety lattice. These measures were introduced in [1–3], respectively.

In [3] was provided a sufficient condition for a quasivariety $\mathbf{R}$ to be Q-universal, to have continuum many subclasses with the property (N), continuum many Q-universal subquasivarieties and continuum many subquasivarieties with no upper covers in the lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{R})$. In [4] was established a sufficient condition for a class $\mathbf{K}$ to have continuum many subclasses with the property (N) but which are not Q-universal.

We show the highest complexity of the quasivariety lattice of the variety generated by the set of all finite Lukasiewicz algebras. The main result of this work is as follows.

Theorem. *Let* $\mathbf{L}$ *be the variety generated by the set of all finite Lukasiewicz algebras. Then* $\mathbf{L}$ *is* Q*-universal and contains continuum many*

1. *Q-universal quasivarieties;*
2. *quasivarieties having no covers in the quasivariety lattice* $\mathrm{Lq}(\mathbf{L})$*;*
3. *subclasses* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L}$ *having the property (N);*
4. *subclasses* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L}$ *having the property (N) but which are not Q-universal.*

Note that in [5] it was proved that the considered quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{L})$ does not satisfy to any non-trivial lattice's identity.

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058390).

References

[1] Sapir M. V. The lattice of quasivarieties of semigroups // Algebra Universalis. 1985. Vol. 21, No. 2/3. P. 172–180.

[2] Nurakunov A. M. Unreasonable lattices of quasivarieties // International Journal of Algebra and Computation. 2012. Vol. 22, No. 3. 17 p.

[3] Kravchenko A. V., Nurakunov A. M., Schwidefsky M. V. Structure of quasivariety lattices. I. Independent axiomatizability // Algebra and Logic. 2019. Vol. 57, No. 6. P. 445–462.

[4] Lutsak S .M. On the complexity of quasivariety lattices // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. Vol. 14. P. 92–97.

[5] Dziobiak W. On subquasivarlety lattices of semi-primal varieties // Algebra Universalis. 1985. Vol. 20. P. 127–129.

M. Kozybayev North Kazakhstan University, Petropavlovsk (Kazakhstan)
E-mail: sveta_lutsak@mail.ru, oavyu@mail.ru

On approximations of unars

N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov

On a base of classification of unar theories [**1, 2**], a characterization of pseudofiniteness of unar theories is found, as well as some necessary and sufficient conditions of pseudofiniteness.

Let $f^0(x) = x$ and $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ for $n \in \omega \setminus \{0\}$. A unar theory T of a unar language $\langle f \rangle$ is said to be *limited* if there exists a natural number N such that the following formula is true in T: $(\forall x)[\bigvee_{n,m=1}^{N}(f^n(x) = f^{n+m}(x))]$. Models of unar theories are called *unar*, too.

Definition. [**3**] An infinite L-structure M is *pseudofinite* if for all L-sentences φ, $M \models \varphi$ implies that there is a finite M_0 such that $M_0 \models \varphi$. The theory $T = \mathrm{Th}(M)$ of the pseudofinite structure M is called *pseudofinite*.

Proposition. *A theory T of an infinite unar is pseudofinite if and only if any sentence $\varphi \in T$ is consistent with a theory of limited unar.*

Corollary 1. *Any theory T of a limited infinite unar is pseudofinite.*

Corollary 2. *Any surjective infinite unar is pseudofinite if and only if it is bijective.*

Corollary 3. *Any injective non-surjective infinite unar is not pseudofinite.*

Notice that the direction right to left of Corollary 2 is shown in [**4**].

There are:

1) surjective pseudofinite and non-pseudofinite infinite unars, e.g., an infinite permutation and, respectively, a function with at least two preimages for every element, or a cycle with its preimages out of this cycle;

2) injective non-surjective non-pseudofinite unars, e.g., a Peano successor function;

3) non-injective non-surjective pseudofinite and non-pseudofinite unars, e.g., a unar consisting of an element and its infinitely many preimages, and, respectively, this unar united with a connected component forming a Peano successor function.

The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855497), Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 20-31-90003), and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

References

[1] Shishmarev Yu. E. Categorical theories of a function // Math. Notes. 1972. Vol.11, No. 1. P. 58–63.

[2] Ryaskin A. N. The number of models of complete theories of unars // Amer. Math. Soc. Transl. 1999. Vol. 195, No. 2. P. 285–307.

[3] Ax J. The elementary theory of finite fields // Ann. Math. 1968. Vol. 88. P. 239–271.

[4] Markhabatov N. D. Ranks for families of permutation theories // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2019. Vol. 28. P. 85–94.

Novosibirsk State Technical University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk

E-mail: nur_24.08.93@mail.ru, sudoplat@math.nsc.ru

On pseudofinite formulas

N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov

In this paper, $\forall$-formulas, $\exists$-formulas, $\exists\forall$-formulas, and $\forall\exists$-formulas are considered. The concept of a *pseudofinite formula* is introduced.

Definition. [1] A formula Φ is called a $\forall$-*formula* (resp., $\exists$-*formula,* $\forall\exists$-*formula*, or $\exists\forall$-*formula*) if $\Phi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \Psi$ (resp., $\Phi = \exists x_1 \ldots \exists x_k \Psi$, $\Phi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y_1 \ldots \exists y_n \Psi$, or $\Phi = \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_n \Psi$), where Ψ is a quantifier-free formula. A class K of Σ-structures is called $\forall$-*axiomatizable* ($\exists$-*axiomatizable,* $\forall\exists$-*axiomatizable,* $\exists\forall$-*axiomatizable*) if $K = K_\Sigma(Z)$, where Z is the set of $\forall$-sentences ($\exists$-sentences, $\forall\exists$-sentences, $\exists\forall$-sentences) of language Σ, $K_\Sigma(Z)$ is the class of all Σ-structures satisfying Z.

Definition. [2] An infinite Σ-structure M is *pseudofinite* if for all Σ-sentences φ, $M \models \varphi$ implies that there is a finite M_0 such that $M_0 \models \varphi$. The theory $T = \mathrm{Th}(M)$ of the pseudofinite structure M is called *pseudofinite*.

Definition. A formula φ true in an infinite model is called *pseudofinite* if it is true in a finite model.

By the definition a theory T of an infinite structure is pseudofinite if and only if each sentence $\varphi \in T$ is pseudofinite. Therefore the pseudofinite theory property is closed under subtheories and the non-pseudofinite theory property is closed under super-theories.

Proposition. *A* $\forall$-formula ($\exists$-formula) *with an infinite model is pseudofinite.*

Corollary. *Any* $\forall$-axiomatizable ($\exists$-axiomatizable) *theory* T *with infinite models is pseudofinite.*

Pseudofiniteness for $\forall\exists$-formulas, $\exists\forall$-formulas and more complicated formulas can be either preserved or violated. For example, the $\exists\forall$-formula $\exists y \forall x, x_1, x_2(\neg f(x) = y \wedge (\neg x_1 = x_2 \to \neg f(x_1) = f(x_2)))$ describing the injectivity and non-surjectivity is not pseudofinite, the $\forall\exists$-formula $\forall y \exists^{\geq 2} x (f(x) = y)$ is not pseudofinite, too, and a formula $\forall y \exists^{=n} x (f(x) = y)$ is pseudofinite if and only if $n = 1$.

The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544), Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 20-31-90003), and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

References

[1] Ershov Yu. L., Palyutin E. A. Mathematical Logic, 6th ed. Moscow : Fizmatlit, 2011. (In Russian)
[2] Ax J. The elementary theory of finite fields // Ann. Math. 1968. Vol. 88. P. 239–271.

Novosibirsk State Technical University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: nur_24.08.93@mail.ru, sudoplat@math.nsc.ru

On arities and aritizabilities of group and monoid theories

In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov

We study applications of a general approach of arities and aritizabilities of theories [1] for group theories [**2**].

Theorem. *Let G be a $\emptyset$-definable subgroup in a structure M. Then the following conditions are equivalent:*

(1) *all formulae of* $\mathrm{Th}(M)$ *defining subsets of finite Cartesian powers of* G *are* n*-aritizable for some fixed natural* n*, and produce* n*-aritizable* $\mathrm{Th}(G)$*;*

(2) *all formulae of* $\mathrm{Th}(M)$ *defining subsets of finite Cartesian powers of* G *are binarizable, and produce binarizable* $\mathrm{Th}(G)$*;*

(3) G *is a finite group.*

Corollary. *For any group* G *the following conditions are equivalent:*
(1) $\mathrm{Th}(G)$ *is aritizable,*
(2) $\mathrm{Th}(G)$ *is binarizable,*
(3) G *is a finite group.*

The following example shows that Corollary does not hold for monoids.

Example. Let M be an infinite monoid with the unit e and the rule

$$\forall x, y(x \neq e \wedge y \neq e \to x \cdot y = e).$$

The formula $\varphi(x, y, z) := (x \cdot y = z)$, defining the multiplication, is $\mathrm{Th}(M)$-equivalent to the following Boolean combination of binary formulae:

$$(x = e \wedge y = z) \vee (y = e \wedge x = z) \vee (x \neq e \wedge y \neq e \wedge z = e),$$

witnessing that $\mathrm{Th}(M)$ is binary and implying that $\mathrm{Th}(M)$ is binarizable.

Similarly Corollary fails for monoids with finitely many possibilities for values $x \cdot y$, where $x \neq e$ and $y \neq e$, and for related semigroups.

The research is partially supported by the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002 and by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544).

References

[1] Sudoplatov S. V. On arities and aritizabilities of first-order theories // International Conference "MalTtsev Meeting", September 20 – 24, 2021, Collection of Abstracts. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, 2021.

[2] Poizat B. Groupes Stables. Villeurbanne: Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1987.

Novosibirsk State Technical University
E-mail: pavlyuk@corp.nstu.ru
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

On arities and aritizabilities of first-order theories

S. V. Sudoplatov

Definition. (cf. [**1**]) For a natural number $n \geq 2$, a first-order theory T is called *n-ary*, or an *n-theory*, if any T-formula $\varphi(\overline{x})$ is T-equivalent to a Boolean combination of T-formulas with n free variables.

A T-formula $\varphi(\overline{x})$ is called *n-expansible*, or *n-arizable*, or *n-aritizable*, if T has an expansion T' such that $\varphi(\overline{x})$ is T'-equivalent to a Boolean combination of T'-formulas with n free variables.

A theory T is called *n-expansible*, or *n-arizable*, or *n-aritizable*, if there is an n-ary expansion T' of T. A theory is called *aritizable* if it is n-aritizable for some natural n. A 2-aritizable theory is called *binarizable*.

By the definition any n-theory is n-expansible, by itself. Clearly each formula of an n-expansible theory is n-expansible, too, but not vice versa: if each formula of a theory T is n-expansible, it can not guarantee that a resulting expansion T', witnessing that n-expansibility, is n-ary, moreover, that T' is n-expansible. Besides, if T is n-expansible then T is m-expansible for each $m > n$.

Notice that for each $n \geq 2$ there is a $(n+1)$-theory which is not an n-theory.

Proposition. *Any theory of a finite, n-element structure is both n-ary and binarizable.*

Using a nice basedness of E-definable compositions $T_1[T_2]$ (see [**2**]) we have the following:

Theorem. 1. *For any theories T_1 and T_2 and their E-definable composition $T_1[T_2]$, T_1 and T_2 are n-theories iff $T_1[T_2]$ is an n-theory.*

2. *For any theories T_1 and T_2 and their E-definable composition $T_1[T_2]$, T_1 and T_2 are n-aritizable iff $T_1[T_2]$ is n-aritizable.*

Corollary. *If each of theories T_1 and T_2 is a theory of a finite structure, or of an infinite structure and n-arizable, then their E-definable composition $T_1[T_2]$ is n-aritizable.*

The research is partially supported by the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002 and by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544).

References

[1] Sudoplatov S. V. On a certain complexity estimate in graph theory // Siberian Math. J. 1996. Vol. 37, No. 3. P. 614–671.

[2] Emelyanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh, Sudoplatov S. V. Algebras of binary formulas for compositions of theories // Algebra and Logic. 2020. Vol. 59, No. 4. P. 295–312.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk

E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Equationally noetherian graphs and hypergraphs

A. V. Treyer

An algebraic structure is called equationally noetherian if any system of equations over finite number of variables is equivalent to its finite subsystem. It was known about noethericity of simple graphs that all locally finite graphs are equationally noetherian, an infinite clique isn't noetherian (see [**1**]) and some others particular results.

It isn't hard to check that a simple graph is equationally noetherian if and only if it is equationally noetherian in one variable equations. Based on this property we give a general description of all equationally noetherian graphs with help of a language of forbidden subgraphs (joint work with Ivan Buchinsky).

Also several examples of hypergraphs will be presented that are not equationally noetherian but equationally noetherian in one variable equations.

References

[1] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over algebraic structures. Novosibirsk: Publishing of SB RAS, 2016. 243 p.

Sobolev Institute of Mathematics, Omsk
E-mail: alexander.treyer@gmail.com

The atomicity and algebraically primeness of theoretical subsets of semantic model

A. R. Yeshkeyev, A. K. Issayeva, N. K. Shamatayeva

The symbol T always will denote some fixing Jonsson theory, perhaps with additional properties. C is the semantical model of the theory T. All sets and models considered in this abstract are correspondingly subsets and existentially closed submodels of considered model C.

Let cl be the closure operator of some pregeometry defined on all subsets of semantic model of considered Jonsson theory, $(\Gamma_1, \Gamma_2) \subseteq L$.

Definition 1. A set A_1 is called a fine almost weakly (Γ_1, Γ_2)-cl-atomic in the theory T, if the following conditions hold:

1) every ω sequence of elements A_1 satisfied Γ_1-principle type for Γ_2-ω-type;

2) $cl(A_1) = M_1, M_1 \in E_T$, where E_T is a class of all existentially closed models of the theory T; and obtained model M_1 is said to be fine almost weakly (Γ_1, Γ_2)-cl atomic model of the theory T.

Definition 2. A set A_2 is called a fine almost weakly (Γ_1, Γ_2)-cl-algebraically prime in the theory T, if the following conditions hold:

1) A_2 is a fine almost weakly (Γ_1, Γ_2)-cl-atomic set of theory T;

2) $cl(A_2) = M_2, M_2 \in E_T \cap AP_T$, where AP_T is a class of algebraically prime models of the theory T; and obtained model M_2 is called a fine almost weakly (Γ_1, Γ_2)-cl-algebraically prime model of the theory T.

Definition 3. A set X is called a Jonsson set, if the following conditions hold:

1) X is a definable set by some existential formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$;

2) $cl(X) = M$, $M \in E_T$.

Definition 4. A set X is called a theoretical set, if X is Jonsson set, $\varphi(C) = X$ and the sentence $\forall \bar{x} \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ defines some Jonsson theory.

Definition 5. The theory T will be called $\varphi(x)$-convex if it is strong convex in the classical sense [1] and for any existentially closed model N_i of this theory, there is a some theoretical set A_{N_i}, such that $cl(A_{N_i}) = N_i$, $\varphi(N_i) = A_{N_i}$ and $\bigcap_i N_i = M \in E_T$.

Theorem. *Let T be complete for $\exists$-sentences $\varphi(x)$-convex Jonsson theory, then if T has a fine almost weakly (Σ_1, Σ_1)-cl-atomic set A_1 and has a fine almost weakly (Σ_1, Σ_1)-cl algebraically prime set A_2, then $cl(A_1)$ is isomorphic to $cl(A_2)$, where $cl(A_1)$, $cl(A_2) \in E_T$.*

All the concepts that are undefined here can be extracted from [1-3].

References

[1] Yeshkeev A. R., Kassymetova M. T. Jonsson theories and their classes of models. Monograph. Karaganda: KarGU, 2016. 370 p.

[2] Baldwin J. T., Kueker D. W. Algebraically prime models // Annals of Mathematical Logic. 1981. No. 20. P. 289–330.

[3] Yeshkeyev A. R., Issayeva A. K., Mussina N. M. The atomic definable subsets of semantic model // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. 2019. Vol. 94, No. 2. P.84–91.

Karaganda Buketov University, Karaganda (Kazakhstan)
E-mail: aibat.kz@gmail.com

On the class of existentially closed models of an arbitrary signature and their saturated semantic models

A. R. Yeshkeyev, O. I. Ulbrikht, M. T. Omarova

We are considering some expansion of signature σ with the help of the unary predicate P and one constant c. Let T be some Jonsson theory of the signature σ, C_T be the semantic model of the theory T, $A \subseteq C_T$, A be the Jonsson set. Let cl be the closure operator of some pregeometry defined on all subsets of semantic model of considered Jonsson theory.

Definition 1. Let M be an arbitrary model of the signature σ, $\overline{\sigma} = \sigma \cup \{P\} \cup \{c\}$. Then $\overline{M}$ is the enrichment of the model M of the signature σ. $JSp(M) = \{T |\ T$ is a Jonsson theory in the language σ and $M \in ModT\}$. $JSp(\overline{M}) = \{\overline{T} |\ \overline{T}$ is a Jonsson theory in the language $\overline{\sigma}$, $\overline{M} \models \overline{T}\}$. $JSp(\overline{M}) = \{\overline{T} |\ T \in JSp(M)\}$. We will denote by $Num(Fr(A), C_T)$ the number of fragments of all subsets A from the model C_T. Let B be an arbitrary model of the signature σ and $JSp(B) \neq \varnothing$. $E_B = \{D \in E_\sigma : B$ is isomorphically embedded in $D\}$. We will denote: $T^0(K) = Th_{\forall\exists}(K)$.

Definition 2. A set X is called a Jonsson set, if the following conditions hold:

1) X is a definable set by some existential formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$;

2) $cl(X) = M$, $M \in E_T$.

Definition 3. The Jonsson theory T with $AP_T \neq \varnothing$ will be called J-$\varphi(\bar{x})$-convex, if it is convex in the classical sense [1] and for any existentially closed model N_i of this theory, there is the Jonsson set A_{N_i}, such that $cl(A_{N_i}) = N_i$, $\varphi(N_i) = A_{N_i}$ and $\bigcap\limits_i N_i = M$, $M \in E_T \cap AP_T$, $N_i \prec_{\Sigma_1} C_T$, where AP_T is the set of all algebraically prime models of the theory T.

Consider the case when $cl = acl = dcl$. We will denote the perfect Jonsson spectrum of the model $\overline{M}$ by the following set:

$$PJSp(\overline{M}) = \{\overline{T} | \overline{T} \text{ is the perfect Jonsson theory in language } \overline{\sigma} \text{ and } \overline{M} \models \overline{T}\}.$$

Theorem. *Let B be an arbitrary model of the signature σ, such that $JSp(B) \neq \varnothing$. Let the class $K \subseteq E_B$, $[T^0(K)] \in PJSp(K)/_{\bowtie}$ be hereditary, J-$\varphi(x)$-convex, complete for $\exists$-sentences class with the essential base of central types in their fragments $Fr(A) = Th_{\forall\exists}(M)$, wherein A is the APA-subset of $C_{[T^0(K)]}$, which defined by the J-strongly minimal formula $\varphi(x)$, $cl(A) = M \in E_{[T^0(K)]}$, $C_{[T^0(K)]}$ is the semantic model of the class $[T^0(K)]$. Then $Num(Fr(A), C_{[T^0(K)]}) = H(\alpha, [T^0(\overline{K})])$, where $H(\alpha, [T^0(\overline{K})])$ is the number of homogeneous models of the power $\aleph_\alpha$ of the class $[T^0(\overline{K})] \in PJSp(\overline{K})/_{\bowtie}$ in the language of the signature $\overline{\sigma} = \sigma \cup \{P\} \cup \{c\}$, $\overline{K}$ is the class of enriched models from K in the signature $\overline{\sigma}$.*

All the concepts that are undefined here can be extracted from [1], [2].

References

[1] Yeshkeev A. R., Kassymetova M. T. Jonsson theories and their classes of models. Monograph. Karaganda: KarGU, 2016. 370 p.

[2] Yeshkeyev A. R., Omarova M. T., Zhumabekova G. E. The J-minimal sets in the hereditary theories // Bulletin of the KU, Math. ser. 2019. Vol. 94, No. 2. P. 92–98.

Karaganda Buketov University, Karaganda (Kazakhstan)
E-mail: aibat.kz@gmail.com

IX. Авторский указатель