Федеральное агентство связи
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ

Российская академия наук
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА СО РАН

И.А. Блатов, Н.В. Добробог, А.И. Задорин

МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Самара
ПГУТИ
2019

УДК 519.6

Методы сплайн-функций для задач с пограничным слоем. / И.А. Блатов, Н.В. Добробог, А.И. Задорин — Самара: ПГУТИ, 2019 — 258 с.

ISBN 978-5-90429-92-0

В монографии излагаются разделы теории сплайнов, необходимые для численного решения задач с пограничным слоем, адаптационные алгоритмы численного решения сингулярно возмущенных краевых задач, в которые расчетная сетка подстраивается под пограничный слой, приводится обоснование сходимости адаптационных процессов.

Издание предназначено для студентов, магистров и аспирантов, изучающих сплайны и их приложения, а также для инженеров, научных работников и специалистов, занимающихся разработкой программного обеспечения численного решения краевых задач.

Библиогр. 74 назв.

©Поволжский государственный университет телекоммуникации и информатики

©Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

ISBN 978-5-90429-92-0

Оглавление

Некоторые обозначения и сокращения, используемые в работе:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел

$\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел

$supp$ – носитель финитной функции

ε – малый положительный параметр

C, C_1, C_2, ... – положительные постоянные, не зависящие от ε и расчетной сетки

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений

л.н.п. – линейное нормированное пространство

м.к.э. – метод конечных элементов

м.ш.э. – метод шарнирных элементов

ПСМ – проекционно-сеточные методы

$S(\Delta, k, m)$ – пространство сплайнов степени k дефекта m, определенных на разбиении Δ расчетной области

$[z]$ – целая часть вещественного числа z

$dim(.)$ – размерность

$mes(.)$ – мера множества

$sign(.)$ – знак

$(\cdots)^T$ – операция транспонирования

$f(x) = O(g(x))$ – означает выполнение условия $|f(x)| \leq C|g(x)|$

$f(x) = O^*(g(x))$ – означает выполнение условия $C_1|f(x)| \leq |g(x)| \leq C_2|f(x)|$

$< u, \phi >$ – обозначает действие линейного функционала ϕ на л.н.п. X: $\phi(u) =< u, \phi >$

$(,)$ – скалярное произведение в $L_2[a, b]$

$C[a, b]$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|\cdot\|_{C[a,b]}$

$C^k[a, b]$ – пространство k раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций

$L_2[a, b]$ – пространства квадратично суммируемых на $[a, b]$ функций

δ_{ij} – символ Кронекера

I – единичная матрица

$\|A\|_2$ – спектральная норма квадратной матрицы А, $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(AA^T)}$

$\|A\|_\infty$ – норма матрицы, согласованная с $\|.\|_\infty$ - нормой вектора $\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^k |a_{ij}|$

$\|A\|_1$ – норма матрицы, согласованная с l_1-нормой вектора $\|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^k |a_{ij}|$

$\|.\|$ – норма в $C[a, b]$

ВВЕДЕНИЕ

Основу данной монографии составили результаты совместных исследований И.А. Блатова[1] с А.И. Задориным[2] в рамках выполнения грантов РФФИ (15-01-06584, 16-01-00727) и с Н.В. Добробог[3]. В некоторой степени книга является продолжением монографии И.А. Блатова, В.В. Стрыгина 1997 года [30]. Книга адресована прежде всего научным работникам, инженерам и специалистам, которые занимаются разработкой программного обеспечения для жестких краевых задач. Она может также служить первоначальным учебным пособием для студентов и аспирантов, изучающих сплайны и их приложения.

Как известно, сплайны обладают большой гибкостью, это позволяет с их помощью приближать даже функции, имеющие большие скачки производных. Поэтому в книге рассматриваются численные методы, в основе которых лежат сплайны.

Затронутые в книге проблемы охватывают широкий круг вопросов — от фундаментальных, связанных с существованием приближений, получением оценок сходимости, разработкой и обоснованием адаптационных алгоритмов решения задач с особенностями, до практических проблем определения границы пограничного слоя, выбора точек коллокаций и др. Предмет рассмотрением в книги являются классические краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Книга состоит из семи глав.

В главе 1 даны основные определения и изучены свойства B-сплайнов. Выведены формулы дифференцирования и реккурентные формулы понижения порядка сплайнов. В завершении главы тщательно излагаются прекрасные результаты Карла де Бора об аппроксимации функций сплайнами.

В главе 2 рассмотрены вопросы построения интерполяционных формул для

[1]Блатов Игорь Анатольевич, заведующий кафедрой Высшей математики, д.ф.-м.н., профессор ФГБОУ ВО ПГУТИ. Р.т. (846) 228-00-71, 443090, Самара, Московское шоссе, 77. E-mail: blatow@mail.ru

[2]Задорин Александр Иванович, ведущий научный сотрудник, зав. лабораторией МММ, д.ф.-м.н., профессор Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Омский филиал. Р.т. (3812) 23-67-39, 644099, Омск, ул. Певцова, 13, Омский филиал ФГБУН ИМ СО РАН. E-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

[3]Добробог Надежда Викторовна, доцент кафедры Высшей математики, к.ф.-м.н. ФГБОУ ВО ПГУТИ. Р.т. (846) 228-00-71, 443090, Самара, Московское шоссе, 77. E-mail: dobrobog-nv@psuti.ru

функций с большими градиентами в пограничном слое. Показано, что применение многочлена Лагранжа на равномерной сетке при малых значениях возмущающего параметра ε приводит к погрешностям порядка $O(1)$. Исследовано два подхода к построению интерполяционных формул, погрешность которых равномерна по малому параметру: построение формул, точных на погранслойной составляющей и применение сетки Шишкина, сгущающейся в пограничном слое. Задачи по этой главе исследованы нами в [18]–[22], [51] –[53].

Глава 3 состоит из двух частей. Здесь будут рассмотрены задачи полиномиальной сплайн-интерполяции функций, имеющих область больших градиентов. Основная часть изложенного материала представляет результаты работы, выполненной при частичной финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 15-01-06584, 16-01-00727) и изложена в [33]-[35].

Параболические и кубические сплайны широко применяются для гладкой интерполяции функций. Такие сплайны исследованы в [2, 66, 41, 50] и во многих других работах. В данной главе освящен вопрос разработки сплайн-интерполяционных формул для функций с большими градиентами. Например, такими функциями моделируются конвективно-диффузионные процессы с преобладающей конвекцией. Наличие больших градиентов существенно сказывается на точности классических разностных схем, т.к. отсутствует сходимость в случае, когда коэффициент диффузии меньше шага сетки. Известны два подхода для построения ε-равномерно сходящихся разностных схем: подгонка схемы к погранслойной составляющей [58] и применение классических разностных схем на сетках, сгущающихся в пограничном слое [25], [70].

При применении разностных схем к решению сингулярно возмущенных задач возникает необходимость восстановления функции для всех значений независимой переменной. Однако, в соответствии с [51, 18, 52] применение полиномиальных сплайн-интерполяционных формул к функциям с большими градиентами в пограничном слое может приводить к погрешностям порядка $O(1)$. В [52] исследован вопрос применения многочленов Лагранжа для интерполяции функций, имеющих большие градиенты в экспоненциальном пограничном слое [70], на сетке Шишкина. Получена оценка погрешности, равномерная по малому параметру ε. Таким образом, можно применять кусочно-полиномиальную интерполяцию на сетке Шишкина. Но такая интерполяция не является гладкой. В [19] построен аналог параболического сплайна дефекта один, точный на погранслойной составляющей интерполируемой функции и доказано, что погрешность интерполяции равномерна по погранслойной составляющей и ее производным.

В первом разделе главы 3 исследуется параболическая сплайн-интерполяция по Субботину [41] на сетке Шишкина. Получены оценки погрешности интерполяции, которые, однако, не являются равномерными по возмущающему ε. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ погрешность интерполяции может неограниченно возрастать, и необходима разработка специальных методов интерполяции для данного класса задач. Как показано в [17], многие важные свойства интерполяционных сплайнов определяются свойствами матриц, элементы которых представляют собой скалярные произведения B-сплайнов. Доказательства основных результатов данного раздела также получены путем детального изучения этих матриц.

Отметим, что расходимость интерполяционных процессов на основе кубических и параболических сплайнов рассматривалась в работах [66, 50, 56, 57] и ряде других, однако рассмотренные там примеры расходимости либо носили очень искусственный характер, либо устанавливались неявным образом с помощью теоремы Банаха-Штейнгауза. Будет показана неравномерность по малому параметру сходимости сплайновой интерполяции на широком классе функций, соответствующих решениям сингулярно возмущенных задач.

В [18] построен неполиномиальный аналог кубического сплайна, точный на погранслойной составляющей. Численные эксперименты показали преимущество в точности построенного сплайна. Однако вид погранслойной составляющей не всегда известен, и в этом случае не видно разумной альтернативы сгущению сетки в погранслое.

Во втором разделе главы 3 исследуется традиционная кубическая сплайн-интерполяция [50] на кусочно-равномерной сетке Шишкина, сгущающейся в пограничном слое. Получены оценки погрешности интерполяции, как и в случае параболических сплайнов, которые не являются равномерными по ε. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ и фиксированном числе узлов N погрешность интерполяции погранслойной составляющей может неограниченно возрастать, и необходима разработка специальных методов интерполяции для данного класса задач, такой метод здесь предложен и исследован. Предложен модифицированный интерполяционный кубический сплайн, для которого получены равномерные по малому параметру оценки погрешности порядка $O((\ln N/N)^4)$.

Изложенные в главе 3 результаты свидетельствуют о необходимости разработки универсальных методов высокого порядка гладкой сплайн-интерполяции функций на сильно неравномерных сетках и проекционно-сеточных методов высокого порядка для сингулярно возмущенных краевых задач, поскольку при применении проекционно-сеточных методов не возникает необходимость в интерполяции сеточного решения. Задачи этой главы исследовались нами в [33]-[35].

В главе 4 будет рассмотрена задача обобщенной сплайн-интерполяции функций, имеющих области больших градиентов, с применением экспоненциальных L-сплайнов, пространство которых содержит функцию, описывающую пограничный слой. L-сплайны — это функции класса C^2, которые на каждом сеточном интервале представляют собой сумму многочлена второй степени и функции типа пограничного слоя.

Отметим, что интерполяционные L-сплайны рассматривались во многих работах, например, в [2, 67], см. также обзор литературы в [67]. Однако важные для сингулярно возмущенных задач вопросы равномерной по параметру сходимости интерполяционных процессов для таких сплайнов ранее не исследовались.

В данной главе доказано существование и единственность интерполяционного L-сплайна и получены асимптотически неулучшаемые оценки погрешности, из которых вытекает равномерная по возмущающему параметру сходимость интерполяционного процесса на функциях, имеющих четыре непрерывных производных. Установлено, что кубический и параболический интерполяционные сплайны являются предельными для решения рассматриваемой задачи. Как следствие основного результата получено, что для параболической сплайн-интерполяции в случае совпадения узлов интерполяции с узлами сплайна на равномерной сетке, несмотря на неограниченность совокупности констант Лебега, на классе четырежды непрерывно дифференцируемых функций имеет место сходимость третьего порядка по шагу сетки, как и в случае традиционной сплайн-интерполяции по Субботину или Марсдену [47]. По исследованию обобщенных сплайнов отметим работы [36], [37].

В главе 5 будут рассмотрены коллокационные схемы для скалярных уравнений второго порядка, при этом целью работы было построение схемы четвертого порядка сходимости, равномерно по ε в C-норме. В основе построения этой схемы лежит два подхода, разработанные для нежестких задач, каждый из которых позволяет получить четвертый порядок сходимости. С их помощью для нежестких задач строятся схемы, решения которых с порядком $O(1/m^4)$ близки к кубическому сплайну, интерполирующему точное решение исходной задачи. При первом подходе [50, гл. 10, §5] используются кубические сплайны минимального дефекта, а близость к интерполяционному сплайну и высокий порядок сходимости достигается за счет специальной коррекции оператора задачи. Здесь существенной является равномерность расчетной сетки. При втором подходе [50, гл. 10, §6] используются эрмитовы сплайны и неравномерная сетка, а повышенная точность достигается за счет специального выбора точек коллокации.

В случае СВЗ мы будем искать решение в виде кубического сплайна дефекта 1 вне зоны пограничного слоя, где сетка равномерна, и виде эрмитова кубического сплайна в зоне погранслоя, где сетка сгущается. При этом в зоне погранслоя схема будет строиться в соответствии со вторым подходом, а вне ее — в соответствии с первым.

Отметим, что коллокационные схемы для СВЗ, сходящиеся со вторым порядком равномерно по ε, строились, например, в [6].

Глава 6 посвящена методу конечных элементов Галеркина для решения линейных и нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач второго порядка на базе сплайнов 1-ой степени. Практическое применение отличается исключительной простотой. Вначале рассматривается линейная задача, коэффициенты которой могут иметь особенности в погранслое. Здесь также используется метод галеркинских проекций. На основе полученных результатов рассмотрена сильно нелинейная краевая задача. Для последней доказано, что при малых ε и $1/m$, где m определяет число узлов расчетной сетки, существуют галеркинские приближения и они сходятся при $m \to \infty$ к точному решению равномерно по ε и m со скоростью $1/m^2$.

В главе 7 затрагиваются вопросы разработки адаптационных алгоритмов и обоснования их сходимости посредством изучения свойств операторов проектирования. Метод галеркинских проекций [11] является универсальным методом доказательства асимптотически неулучшаемых априорных оценок погрешности проекционно-сеточных методов. Метод успешно применялся и для сингулярно возмущенных краевых задач [3]. При применении проекционно-сеточных методов к решению задач с особенностями (в частности, СВКЗ) широко используется метод адаптивных подвижных сеток [9]. Однако, несмотря на обширную литературу (см., например, [48] и библиографию там же), вопросы строгого обоснования сходимости алгоритмов адаптации сеток к некоторому предельному разбиению и получения оценок погрешности приближенного решения на этом предельном разбиении существенно менее изучены.

Процесс адаптации сетки к особенностям состоит в определении подобласти, на которой для уточнения решения требуется переизмельчение сетки. Известны два типа адаптации — априорная и апостериорная. В первом случае параметры сетки выбираются до начала вычислений вне зависимости от получающихся результатов, во втором случае — в процессе решения задачи после анализа вычисленных промежуточных приближенных решений.

Большинство работ по данной тематике принадлежат Г.И. Шишкину и его исследовательской группе (см., например, [70, 71, 72, 73, 74]), однако эти результаты относятся к разностным методам. В работах Г.И. Шишкина рассматриваются разностные схемы решения краевых задач для уравнений в частных производных, старшие производные которых (либо некоторые из них) содержат малый параметр. Предложены разностные схемы на последовательно как априорно [70, 71, 72], так и апостериорно [72, 73, 74], адаптирующихся сетках. Для определения границы подобластей, на которых требуется уточнение решения, используются вспомогательные функционалы-индикаторы. В качестве индикатора может быть выбран градиент решения (например, [73, 74]) или мажоранта сингулярной составляющей решения [74], или мажоранта сеточной границы пограничного слоя [71]. Г.И. Шишкиным отмечено, что в апостериорных процедурах более выигрышной является адаптация на основе градиента решения [74]. В работах исследуется вопрос сходимости разностных схем и повышения точности разностной аппроксимации.

При априорном задании сетки предполагается, что известна первичная информация о структуре пограничного слоя или оценках производных решения. В случае, когда эта информация недоступна или ее получение связано с большими трудностями, предпочтительны апостериорные процедуры.

В последние годы разработкой адаптивных методов решения задач с особенностями активно занимается группа ученых И.А. Блатов, Н.В. Добробог, Е.В. Китаева [40, 33, 39, 27]. Полученные ими результаты изложены в главе 7. В первой её части будет показано, что в основу доказательства сходимости алгоритмов адаптации для задач с симметричным оператором на сетках Шишкина может быть положен метод галеркинских проекций [40]. В следующем разделе главы этот метод переносится на случай СВКЗ с несимметричным оператором на сетках Шишкина [39]. А в третьем разделе метод галеркинских проекций реализуется на несамосопряженных СВКЗ, в которых коэффициенты уравнений могут содержать функции типа пограничного слоя, в случае использования сеток Бахвалова [27].

Численные эксперименты приведены практически в каждой главе, они показывают, что предложенные в этой книге методы в большинстве случаев обладают большей эффективностью, чем метод шарнирных элементов и др. Мы привели здесь наиболее сильные результаты по методу коллокаций и методу Галеркина, а также совершенно новые результаты строгого обоснования сходимости адаптационных алгоритмов решения задач с особенностями. Настоящая книга в определенном смысле подводит итоги развития теории проекционно-сеточных методов для рассматриваемого класса задач за последние годы и намечает перспективные направления исследований в области обобщенной сплайн-интерполяции и методов обоснования сходимости адаптивных подвижных сеток для решения сингулярно возмущенных задач.

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СПЛАЙНОВ

1.1 Определение сплайнов

1.1.1 Разделенные разности

Определение. Пусть на вещественной оси $(-\infty, \infty)$ заданы узлы $x_0, x_1, \cdots, x_n\,(x_i \neq x_j)$, в которых определена функция $f(x)$. Разделенными разностями первого порядка называют числа

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$
$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$
$$\cdots,$$
$$f(x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

По разделенным разностям первого порядка определяются разделенные разности второго порядка

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0},$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}, \cdots$$

Аналогично определяются разделенные разности третьего порядка

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0}$$

и т.д.

В курсе методов вычислений доказывается, что для m раз непрерывно дифференцируемых функций

$$f(x_0,\, x_1,\, \cdots,\, x_m) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!},$$

где ξ — некоторая средняя точка промежутка $[x_0, x_m]$.

Совершенно очевидно, что операция взятия разделенной разности любого порядка линейна, т.е. если $F(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)$, то

$$F(x_k,\, \cdots,\, x_{k+m}) = \alpha\, f(x_k, \cdots, x_{k+m}) + \beta\, g(x_k, \cdots, x_{k+m}).$$

Это простое утверждение имеет полезное обобщение. Пусть $f(x,t)\, g(t)$ непрерывны по $t \in [0,T]$.

Положим

$$F(x) = \int_0^T f(x,t) g(t)\, dt.$$

Тогда

$$F(x_k, \cdots, x_{k+m}) = \int_0^T f(x_k, \cdots, x_{k+m}; t)\, g(t)\, dt.$$

Возьмем в качестве $f(x)$ функцию x^m . Очевидно, что в этом случае

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{x_{i+1}^m - x_i^m}{x_{i+1} - x_i} = x_{i+1}^{m-1} + x_{i+1}^{m-2} x_i + \cdots + x_i^{m-1}.$$

Отсюда видно, что разделенная разность $f(x_i, x_{i+1})$ является многочленом степени $m-1$ аргументов $x_i,\, x_{i+1}$.

Упражнение 1.1.1. Доказать, что разделенная разность порядка m от многочлена степени m является постоянной величиной, а разделенные разности более высокого порядка равны нулю.

Для дальнейшего нам понадобятся различные представления разделенных разностей. Обозначим через $\omega_k(x)$ многочлен

$$(x - x_k)(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_{k+m}).$$

Очевидно, при $j \geq k$

$$\omega_k'(x_j) = (x_j - x_k) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{k+m}).$$

Используя индукцию, легко показать, что справедливо представление

$$f(x_k, \cdots, x_{k+m}) = \sum_{j=k}^{k+m} f(x_j) / \omega_k'(x_j). \tag{1.1.1}$$

Усеченная степенная функция $g_m(x;t)$

Пусть m — произвольное натуральное число. Через ξ_+^m будем обозначать следующую функцию

$$\xi_+^m = \begin{cases} \xi^m, & \xi > 0 \\ 0, & \xi \le 0. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение функцию $g_m(x;t) = (x-t)_+^{m-1}$. Очевидно, что

$$g_m(x;t) = \begin{cases} (x-t)^{m-1}, & x > t \\ 0, & x \le t. \end{cases}$$

Используя эту функцию и формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, можно записать:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} f^{(j)}(a) \frac{(x-a)^j}{j!} + \frac{1}{(m-1)!} \int_a^b g_m(x;t) f^{(m)}(t) dt. \tag{1.1.2}$$

Заметим, что при $m \ge 1$

$$\frac{d}{dt}(x-t)_+^m = -m(x-t)_+^{m-1}.$$

Функция $g_m(x;t)$ бесконечно дифференцируема по t и x при $t \ne x$; в точке $t = x$ она непрерывно дифференцируема $(m-2)$ раз, а ее $(m-1)$-ая производная претерпевает разрыв.

Упражнение 1.2.1. Доказать равенство

$$(x-t)_+^m + (-1)^m (t-x)_+^m \equiv (x-t)^m.$$

Полиномиальные сплайны

Пусть на промежутке $[a,b]$ задана сетка

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b. \tag{1.1.3}$$

Определение. Функцию $S_m = S_{m,k}(x)$ называют полиномиальным сплайном (или просто сплайном) степени m дефекта k $(1 \le k \le m)$ с узлами (1.1.3), если:

1. на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \le i \le n)$ $S_m(x)$ является полиномом степени не выше m;

2. на всем промежутке $[a,b]$ функция $S_m(x)$ $(m-k)$ раз непрерывно дифференцируема.

Другими словами, сплайны склеены из полиномов на элементарных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ так, чтобы в узлах была обеспечена нужная гладкость.

Под $S_{0,-1}(x)$ будем понимать кусочно-постоянные функции с точками разрыва $x_1, \cdots, x_n$, непрерывные справа.

Простейшим примером сплайна, определенного на сетке (1.1.3) является ломаная, узлами которой являются точки x_0, $x_1, \cdots, x_{n+1}$. Степень и дефект этого сплайна равны 1.

Усеченная степенная функция $g_m(x;t)$, введенная чуть ранее, является сплайном степени $m-1$ дефекта 1 относительно t; единственный узел этого сплайна — точка x.

Образуем для функции $g_m(x;t)$ разделенную разность порядка m по узлам $x_k,\ x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}$ $(0 \le k \le k+m \le n)$. Из (1.1.1) имеем

$$g_m(x_k, \cdots, x_{k+m}; t) = \sum_{j=k}^{k+m} \frac{g_m(x_j;t)}{\omega_k'(x_j)}. \tag{1.1.4}$$

Функция $g_m(x_j;t)$ бесконечно дифференцируема по t при $t \neq x_j$ и, конечно, есть сплайн степени $m-1$ дефекта 1 с узлом x_j. Поэтому функция $g(t)$, стоящая в правой части равенства (1.1.4) также есть сплайн степени $m-1$ дефекта 1, для которого уже узлами будут точки $x_k, \cdots, x_{k+m}$.

Вновь вернемся к формуле Тейлора (1.1.2) и от правой и левой части (1.1.2) образуем разделенную разность степени m. Учитывая упражнение 1.1.1, легко получить еще одно весьма полезное представление разделенной разности

$$f(x_k, \cdots, x_{k+m}) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^b g_m(x_k, \cdots, x_{k+m}; t) f^{(m)}(t) dt. \tag{1.1.5}$$

Упражнение 1.3.1. Пусть $C^m[a,b]$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ и $f \in C^m[a,b]$. Обозначим через $L_n(f;x)$ интерполяционный полином Лагранжа степени $(n \ge m+1)$

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\omega_0(x)}{(x-x_k)\omega_0'(x_k)}.$$

Доказать, что для остаточного члена

$$R(f;x) = f(x) - L_n(f;x)$$

интерполяционного полинома Лагранжа справедливо представление

$$R(f;x)=\frac{1}{(m-1)!}\int_a^b[g_m(x;t)-\sum_{k=0}^{n}g_m(x_k;t)e_k(x)]f^{(m)}(t)dt, \tag{1.1.6}$$

где

$$e_k=\frac{\omega_0(x)}{(x-x_k)\omega_0'(x)}$$

— фундаментальные многочлены Лагранжа.

Упражнение 1.3.2. Положим

$$\delta_0(x)=\begin{cases}1/2, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1,\end{cases}$$

$$\delta_m(x)=\int_{2x-1}^{2x+1}\delta_{m-1}(s)ds,\ m=1,\ 2,\cdots.$$

Доказать, что $\delta_m(x)$ на $[-1,1]$ является сплайном степени m дефекта 1. Указать узлы.

Размерность пространства сплайнов

Пусть сетка (1.1.3) задана. Обозначим через $S(\Delta_n,m,k)$ совокупность сплайнов степени m дефекта k, определенных на сетке Δ_n. Очевидно, что это линейное пространство.

Теорема 1 *Размерность пространства $S(\Delta_n,m,k)$ равна $m+1+n\cdot k$.*

Доказательство. Рассмотрим вначале отрезок $[x_0,x_1]$. По определению сплайн $S_{m,k}(x)$ на этом отрезке является полиномом

$$P_m(x)=\sum_{s=0}^{m}a_sx^s.$$

На соседнем отрезке $[x_1,x_2]$ сплайн $S_{m,k}(x)$ совпадает с другим полиномом $Q_m(x)$. Рассмотрим разность Q_m-P_m и представим ее в виде

$$Q_m(x)-P_m(x)=\sum_{s=0}^{m}b_s(x-x_1)^s. \tag{1.1.7}$$

Из условий гладкости сплайна $S_{m,k}(x)$ в узле x_1 мы имеем

$$Q_m^{(j)}(x_1)=P_m^{(j)}(x_1)\ (j=0,1,\cdots,m-k).$$

Отсюда и из представления (1.1.7) немедленно вытекает, что $b_s = 0\,(s = 0, 1, \cdots, m - k)$.

Совершенно аналогично на отрезке $[x_2, x_3]$ сплайн $S_{m,k}(x)$ совпадает с полиномом $T_m(x)$. Поэтому

$$T_m(x) - Q_m(x) = \sum_{s=0}^{m} c_s (x - x_2)^s,\ c_s = 0\,,\ (s = 0, \cdots, m - k).$$

На $[x_0, x_3]$

$$S_{m,k}(x) = \sum_{s=0}^{m} a_s x^s + \sum_{s=m-k+1}^{m} b_s (x - x_1)_+^s + \sum_{s=m-k+1}^{m} c_s (x - x_2)_+^s.$$

Удобно ввести новые обозначения $b_s = \alpha_{1,s}$, $c_s = \alpha_{2,s}$, $\cdots$.

Продолжая наши рассуждения, получаем, что на всем промежутке $[a, b]$ $S_{m,k}(x)$ представляется в виде

$$S_{m,k}(x) = \sum_{s=0}^{m} a_s x^s + \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=m-k+1}^{m} \alpha_{j,s} (x - x_j)_+^s. \tag{1.1.8}$$

Таким образом, сплайн $S_{m,k}(x)$ является линейной комбинацией функций

$$\begin{gathered} 1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^m, \\ (x - x_1)_+^{m-k+1},\ \cdots,\ (x - x_1)_+^m,\ \cdots, \\ (x - x_n)_+^{m-k+1},\ \cdots,\ (x - x_n)_+^m. \end{gathered} \tag{1.1.9}$$

Осталось лишь показать, что эти функции линейно независимы на отрезке $[a, b]$. Если это было бы не так, то для некоторого набора констант a_s, $\alpha_{j,s}$ линейная комбинация (1.1.8) стала бы тождественным нулем на отрезке $[a, b]$. Тогда, рассматривая правую часть (1.1.8) на отрезке $[x_0, x_1]$, мы бы получили

$$\sum_{s=0}^{m} a_s x^s \equiv 0\ (x \in [x_0, x_1]).$$

Следовательно, $a_s = 0$ при $s = 0,\ 1,\ \cdots,\ m$

Учитывая последнее, рассмотрим теперь правую часть (1.1.8) на отрезке $[x_1, x_2]$. Легко видеть, что это приводит к тождеству

$$\sum_{s=m-k+1}^{m} \alpha_{1,s} (x - x_1)^s \equiv 0\,(x \in [x_1, x_2]).$$

Следовательно, $\alpha_{1,s} = 0$ при $s = m-k+1, \cdots, m$ и т.д. Отсюда и вытекает линейная независимость функций (1.1.9). Теорема доказана.

Кстати, заметим, что функции (1.1.9) образуют базис в пространстве сплайнов $S_{m,k}(\Delta_n, m, k)$.

Упражнение 1.4.1. Какова размернсть пространства ломаных с вершинами в узлах сетки (1.1.3)? Как вычислить значения $y(x)$ в точке, отличной от узловой, если значения в узлах $y_0, y_1, \cdots, y_{n+1}$ заданы?

1.1.2 B-сплайны

1.1.3 Основные свойства B-сплайнов

Понятие B-сплайна было введено И. Шенбергом [12]. Эти функции нашли широкие применения в численных методах благодаря значительным упрощениям, связанными с финитностью носителей B-сплайнов.

Пусть $x_k < x_{k+1} < \cdots < x_k + m$ $(m \geq 1)$.

Определение. Функция

$$B_{m-1}(t) = B_{m-1}(x_k, \cdots, x_{k+m}; t) = mg_m(x_k, \cdots, x_{k+m}; t), \tag{1.1.10}$$

где $g_m(x_k, \cdots, x_{k+m}; t)$ — разделенная разность m-го порядка функции $g_m(x; t)$, называется B-сплайном степени $(m-1)$ дефекта 1 относительно узлов $x_k, \cdots, x_{k+m}$.

Рассмотрим пример. Допустим, что узлы x_i — равноотстоящие: $x_{k+1} = x_k + h$, $x_{k+2} = x_k + 2h \cdots$ Подсчитаем $B_1(t)$, используя формулу (1.1.4). Имеем

$$\omega_k(x) = (x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2}),$$
$$\omega_k'(x) = (x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) +$$
$$+ (x - x_k)(x - x_{k+2}) + (x - x_k)(x - x_{k+1}).$$

Поэтому

$$\omega_k'(x_k) = 2h^2,$$
$$\omega_k'(x_{k+1}) = -h^2,$$
$$\omega_k'(x_{k+2}) = 2h^2.$$

Далее, из формулы (1.1.1)

$$B_1(t) = 2\left\{\frac{(x_k - t)_+}{2h^2} + \frac{(x_{k+1} - t)_+}{-h^2} + \frac{(x_{k+2} - t)_+}{2h^2}\right\}.$$

Очевидно, $B_1(t) \equiv 0$ при $t \geq x_{k+2}$. Далее

$$B_1(t) = \begin{cases} \dfrac{x_{k+2} - t}{h^2}, & t \in [x_{k+1}, x_{k+2}] \\ \\ 2\left[\dfrac{x_{k+1} - t}{-h^2} + \dfrac{x_{k+2} - t}{2h^2}\right] = \dfrac{t - x_k}{h^2}, & t \in [x_k, x_{k+1}]. \end{cases}$$

Наконец, $B_1(t) \equiv 0$ при $t \leq x_k$.

Упражнение 2.1.2. Построить график функции

$$B_2(t) = B_2(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}; t).$$

Перейдем к изучению основных свойств B-сплайнов.

Свойство 1.

$$B_{m-1} \equiv 0 \ t \notin [x_k, x_{k+m}]. \tag{1.1.11}$$

Доказательство. Равенство (1.1.11) при $t \geq x_{k+m}$ вытекает из определения функций $(x - t)_+^{m-1}$. Пусть теперь $t \leq x_k$. Тогда

$$g_m(x_s; t) \equiv (x_s - t)^{m-1} \quad (s = k, k+1, \cdots, k+m)$$

и

$$B_{m-1}(t) = m \sum_{s=k}^{k+m} \frac{(x_s - t)^{m-1}}{\omega_k'(x_s)} \ \ (t \leq x_k).$$

Выражение, стоящее справа, не отличается от разделенной разности m-го порядка для многочлена $(x - t)^{m-1}$, и, следовательно, равно нулю.

Свойство 2.

$$\int_a^b B_{m-1}(t)\, dt = \int_{x_k}^{x_{k+m}} B_{m-1}(t)\, dt = 1. \tag{1.1.12}$$

Действительно, для разделенной разности $f(x_k, \cdots, x_{k+m})$ представление (1.1.5) можно представить в виде

$$f(x_k, \cdots, x_{k+m}) = \frac{1}{m!} \int_a^b B_{m-1}(t) f^{(m)}(t) dt. \tag{1.1.13}$$

В (1.1.13) положим $f \equiv x^m$. Тогда получим

$$f(x_k, \cdots, x_{k+m}) = \int_a^b B_{m-1}(t) dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} B_{m-1}(t) dt.$$

С другой стороны, как хорошо известно,

$$f(x_k, \cdots, x_{k+m}) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi) \ (\xi \in (x_k, x_{k+m})),$$

и в рассматриваемом случае $f^{(m)}(x) \equiv m!$. Отсюда и следует, что

$$f(x_k, \cdots, x_{k+m}) \equiv 1.$$

Свойство 3.

$$B_{m-1}(t) > 0 \ \ x_k < t < x_{k+m}. \tag{1.1.14}$$

Доказательство. При $m = 2$ неравенство очевидно. Пусть теперь $m > 2$. Так как B_{m-1} на любом отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ есть многочлен степени $m-1$, то либо он имеет здесь конечное число нулей, либо он тождественно равен нулю на $[x_j, x_{j+1}]$. Из (1.1.12) вытекает, что B_{m-1} не является нулевой функцией. Значит существует такой отрезок $[x_{k\prime}, x_{l\prime}]$, содержащийся в $[x_k, x_{k+m}]$, на котором B_{m-1} имеет лишь конечное число нулей, а на примыкающих отрезках $[x_{k'-1}, x_{k'}]$, $[x_{l'}, x_{l'+1}]$ тождественно равен нулю. Здесь возможны два случая:

1. $[x_{k'}, x_{l'}] = [x_k, x_{k+m}]$;
2. $[x_{k'}, x_{l'}] \subset [x_k, x_{k+m}]$.

Начнем с рассмотрения первого случая. Для доказательства неравенства (1.1.14) допустим противное: существует точка t^*, в которой $B_{m-1}(t^*) = 0$. Так как $B_{m-1}(t)$ обращается в нуль на концах отрезка $[x_k, x_{k+m}]$, то $B'_{m-1}(t)$ на (x_k, x_{k+m}) имеет не менее двух перемен знака. Рассуждая аналогично, получаем, что $B''_{m-1}(t)$ имеет на (x_k, x_{k+m}) не менее трех перемен знака и т.д. Наконец, производная $B^{(m-2)}_{m-1}(t)$ порядка $m-2$ имеет на (x_k, x_{k+m}) не менее $m-1$ перемен знака.

С другой стороны, на отрезке $[x_k, x_{k+m}]$ функция $B^{(m-2)}_{m-1}$ кусочно-линейная; графиком ее является m-звенная ломаная с вершинами в точках x_s $(s = k, \cdots, k+m)$. Поскольку $B^{(m-2)}_{m-1}(x_k) = B^{(m-2)}_{m-1}(x_{k+m}) = 0$, то $B^{(m-2)}_{m-1}$ очевидно не может на (x_k, x_{k+m}) менять знак $(m-1)$ раз. Мы пришли к противоречию.

Перейдем теперь ко второму случаю. Предположим, что имеем строгое включение $[x_{k'}, x_{l'}] \subset [x_k, x_{k+m}]$ (т.е. $k' > k$, или $l' < k+m$). Можно утверждать, что B'_{m-1} имеет не менее одной перемены знака на $[x_{k'},\, x_{l'}]$, $\cdots$ производная $B^{(m-1)}_{m-1}$ — не менее $m-2$ перемен знака. Но на $[x_{k'}, x_{l'}]$ $B^{(m-2)}_{m-1}$ является $(l'-k')$-звенной ломаной, которая на концах отрезка принимает нулевые значения. При этом $l'-k' <$

m. Следовательно, эта ломаная не может менять знак $(m-2)$ раз. Получили противоречие и во втором случае.

Следует отметить, что B_{m-1} имеет лишь одну точку экстремума на (x_k, x_{k+m}). Действительно, допустим противное. Нетрудно показать, что B'_{m-1} имеет по крайней мере на (x_k, x_{k+m}) две перемены знака. Тогда, повторив рассуждения первого пункта, доказанного выше утверждения, приходим к противоречию.

Базис в пространстве полиномиальных сплайнов дефекта 1

Определение. Если функция $f(x)$ отлична от нуля лишь на некотором компактном множестве, то она является финитной, а само это множество называется носителем функции f и обозначается $supp\, f$.

Из (1.1.14) вытекает равенство

$$supp\, B_{m-1}(x_k, \cdots, x_{k+m}; t) = (x_k, x_{k+m}).$$

Лемма 1 *Пусть* $f_i(t)$ $(-\infty < t < \infty,\ i = 1, \cdots, p)$ *– финитные функции, причем*

$$supp\, f_i = (\alpha_i, \beta_i)\ \ (i = 1, \cdots, p).$$

Если $\alpha_i < \alpha_{i+1}\,(i = 1, \cdots, p)$, *то система* $f_1(t), \cdots, f_p(t)$ *линейно независима.*

Доказательство. Допустим противное. Существует такой нетривиальный набор констант $c_1, \cdots, c_p$, что

$$c_1 f_1(t) + \cdots + c_p f_p(t) \equiv 0. \tag{1.1.15}$$

Выберем теперь $x_1^* \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Очевидно, что

$$f_1(x_1^*) \neq 0,\ f_j(x_1^*) = 0\,(j = 2, 3, \cdots, p).$$

Подставляя x_1^* в (1.1.15), легко вывести, что $c_1 = 0$.. Далее, выберем точку $x_2^* \in (\alpha_2, \alpha_3)$. Используя ее, легко получить $c_2 = 0$, и т.д. Лемма доказана.

Для дальнейшего нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2 *Носитель любого ненулевого сплайна* S *степени* $m-1$ *дефекта 1 содержит не менее* m *смежных интервалов разбиения* Δ_n.

Доказательство. Допустим противное. Пусть ненулевой сплайн $S(t)$ имеет носителем интервал (x_k, x_l), где $l < k + m$ и тождественно равен нулю на примыкающих отрезках.

На отрезке $[x_k, x_l]$ разложим этот сплайн по базису

$$1,\ t,\ \cdots, t^{m-1},\ (t-x_{k+1})_+^{m-1},\ \cdots, (t-x_{l-1})_+^{m-1}.$$

Получим

$$S(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{m-1} t^{m-1} +$$

$$+\alpha_{k+1}(t-x_{k+1})^{m-1} + \cdots + \alpha_{l-1}(t-x_{l-1})_+^{m-1}.$$

Так как в точке $t = x_k$

$$S(x_k) = S'(x_k) = \cdots = S^{m-2}(x_k) = 0,$$

то полином

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_{m-1} t^{m-1}$$

можно представить в виде $\alpha_k(t-x_k)_+^{m-1}$. Поэтому имеем

$$S(t) = \sum_{j=k}^{l-1} \alpha_j (t-x_j)_+^{m-1} \ (t \in [x_k, x_l]).$$

Далее в точке $t = x_l$ имеем

$$S(x_l) = S'(x_l) = \cdots = S^{m-2}(x_l) = 0.$$

Последнее соотношение можно более подробно записать в эквивалентной форме

$$\alpha_k(x_l-x_k)^{m-1} + \alpha_{k+1}(x_l-x_{k+1})^{m-1} + \cdots + \alpha_{l-1}(x_l-x_{l-1})^{m-1} = 0,$$

$$\alpha_k(x_l-x_k)^{m-2} + \alpha_{k+1}(x_l-x_{k+1})^{m-2} + \cdots + \alpha_{l-1}(x_l-x_{l-1})^{m-2} = 0,$$

$$\cdots,$$

$$\alpha_k(x_l-x_k) + \alpha_{k+1}(x_l-x_{k+1}) + \cdots + \alpha_{l-1}(x_l-x_{l-1}) = 0.$$

При $l = k+m-1$ для отыскания m чисел $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_{k+m-1}$ мы получаем линейную однородную систему с ненулевым определителем Вандермонда. Следовательно, все $\alpha_i = 0$ и $S \equiv 0$.

Аналогичный вывод получается и при других $l < k+m$. Наше утверждение доказано.

Пусть теперь на числовой прямой задана строго возрастающая последовательность узлов, обозначим её π

$$\pi = \{x_k\},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Через $B_{m-1,k}(t)$ будем обозначать сплайн $B_{m-1}(x_k, \cdots, x_{k+m}, t)$ с носителем $(x_k,\, x_{k+m})$.

Пусть концы отрезка $[a, b]$ совпадают с узлами x_p и x_q. Всюду ниже через $\overline{B}_{m-1,k}$ будем обозначать "усеченный" B-сплайн

$$\overline{B}_{m-1,k}(t) = \begin{cases} B_{m-1,k}(t), & a \le t \le b \\ 0, & t \notin [a, b]. \end{cases}$$

Рассмотрим множество σ "усеченных" B-сплайнов $\overline{B}_{m-1,k}$ отличных от нуля на интервале (a, b).

$$\overline{B}_{m-1,p-m+1},\, \overline{B}_{m-1,p-m+2}, \cdots, \overline{B}_{m-1,q-1}.$$

Теорема 2 *Совокупность σ всех "усеченных" B-сплайнов линейно независима.*

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно. Тогда найдется такой нетривиальный набор констант $\alpha_{p-m+1}, \cdots, \alpha_{q-1}$, что

$$\overline{S}(t) = \sum_{j=p-m+1}^{q-1} \alpha_j \overline{B}_{m-1,j}(t) \equiv 0 \ t \in [a, b]. \tag{1.1.16}$$

Рассмотрим сплайн

$$S(t) = \sum_{j=p-m+1}^{q-1} \alpha_j \, B_{m-1,j}(t) \ (-\infty < t < \infty).$$

Легко заметить, что $S(t)$ может быть отличен от нуля лишь при $t \le a$ и $t \ge b$, т.е. на интервалах

$$\Gamma_1 = (x_{p-m+1},\, x_p), \ \ \Gamma_2 = (x_q,\, x_{q+m-1}).$$

Отметим, что каждый из интервалов Γ_1 и Γ_2 содержит лишь $m-1$ элементарных отрезков и поэтому (см. лемму 2) сплайн $S(t)$ тождественно равен нулю на Γ_1 и Γ_2. Следовательно, $S(t) \equiv 0$ на всей числовой прямой также. В силу леммы 1 числа $\alpha_j = 0$ $(j = p-m+1, \cdots, q-1)$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Производная B-сплайна

Установим весьма полезную формулу

$$\frac{d}{dt} B_{m-1,k} = \frac{m}{x_{k+m} - x_k} (B_{m-2,k} - B_{m-2,k+1}). \tag{1.1.17}$$

где

$$B_{m-1,k} = B_{m-1,k}(x_k, \cdots, x_{k+m}; t),$$

$$B_{m-2,k} = B_{m-2,k}(x_k, \cdots, x_{k+m-1}; t),$$

$$B_{m-2,k+1} = B_{m-2,k+1}(x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}; t).$$

Сначала вычислим $B_{m-2,k} - B_{m-2,k+1}$ в точке $t \in I_j = [x_j, x_{j+1}]\,(k \le j \le k+m-1)$. По определению B-сплайна и свойств разделенной разности имеем

$$B_{m-2,k} = (m-1)g_{m-1}(x_k, \cdots, x_{k+m-1}; t) = (m-1)\sum_{s=k}^{k+m-1} \frac{(x_s - t)_+^{m-2}}{\omega_k'(x_s)}.$$

При $s \le j$ слагаемые $(x_s - t)_+^{m-2}$ на I_j обращаются в нуль. Опуская их, имеем

$$B_{m-2,k} = (m-1)\sum_{s=j+1}^{k+m-1} \frac{(x_s - t)^{m-2}}{(x_s - x_k)\cdots(x_s - x_{k+m-1})}.$$

Домножим числитель и знаменатель правой части на $(x_s - x_{k+m})$. Тогда окончательно получим для $t \in I_j$

$$B_{m-2,k} = (m-1)\sum_{s=j+1}^{k+m-1} \frac{(x_s - t)^{m-2}(x_s - x_{k+m})}{\omega_k'(x_s)}.$$

Аналогичным образом выводим

$$B_{m-2,k+1} = (m-1)\sum_{s=j+1}^{k+m} \frac{(x_s - t)^{m-2}(x_s - x_k)}{\omega_k'(x_s)}.$$

Поэтому для разности получаем при $t \in I_j$

$$\begin{aligned} &B_{m-2,k+1} - B_{m-2,k} = \\ &= (m-1)\left\{\sum_{s=j+1}^{k+m-1} \frac{(x_s - t)^{m-2}(x_{k+m} - x_k)}{\omega_k'(x_s)} + \right. \\ &\left. + \frac{(x_{k+m} - t)^{m-2}(x_{k+m} - x_k)}{\omega_k'(x_{k+m})}\right\} = \\ &= (m-1)(x_{k+m} - x_k)\sum_{s=j+1}^{k+m} \frac{(x_s - t)^{m-2}}{\omega_k'(x_s)}. \end{aligned} \tag{1.1.18}$$

Далее, по определению $B_{m-1,k}$

$$B_{m-1,k} = m\sum_{s=k}^{k+m} \frac{(x_s - t)_+^{m-1}}{\omega_k'(x_s)},$$

и поэтому

$$\frac{d}{dt}B_{m-1,k} = -m(m-1)\sum_{s=k}^{k+m}\frac{(x_s-t)_+^{m-2}}{\omega_k'(x_s)}.$$

Опуская в последнем равенстве слагаемые $(x_s-t)_+^{m-2}$ при $s \le j$, обращающиеся в нуль на промежутке I_j, без труда получаем

$$\frac{d}{dt}B_{m-1,k} = -m(m-1)\sum_{s=j+1}^{k+m}\frac{(x_s-t)^{m-2}}{\omega_k'(x_s)} \quad (t \in I_j).$$

Отсюда и из (1.1.18) вытекает (1.1.17).

Нормированные B-сплайны

Пусть снова на числовой прямой задана строго возрастающая последовательность узлов $\pi = \{x_k\}\,(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$. Во многих случаях вместо $B_{m-1,k}$ удобнее работать с так называемыми нормированными B-сплайнами

$$N_{m-1,k}(t) = \frac{x_{k+m}-x_k}{m}B_{m-1,k}(t). \tag{1.1.19}$$

Теорема 3 *Нормированные B-сплайны образуют разложение единицы, т.е.*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_{m-1,k}(t) \equiv 1. \tag{1.1.20}$$

Доказательство. Из определения $B_{m-1,k}(t)$ и (1.1.19) вытекает, что

$$N_{m-1,k}(t) = (x_{k+m}-x_k)g(x_k, \cdots, x_{k+m}; t).$$

С другой стороны, по определению разделенной разности,

$$g(x_k, \cdots, x_{k+m}; t) = \frac{g_m(x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}; t) - g_m(x_k, \cdots, x_{k+m-1}; t)}{x_{k+m}-x_k}.$$

Поэтому для нормированного B-сплайна имеет место весьма полезное представление

$$N_{m-1,k}(t) = g_m(x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}; t) - g_m(x_k, \cdots, x_{k+m-1}; t). \tag{1.1.21}$$

Зафиксируем отрезок $I_j = [x_j, x_{j+1}]\,(j = 0, 1, \cdots, n)$. На этом отрезке отличны от нуля лишь сплайны

$$N_{m-1,j-m+1},\ N_{m-1,j-m+2}, \cdots, N_{m-1,j}.$$

Поэтому при $t \in I_j$ имеет место соотношение

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_{m-1,k}(t) = \sum_{k=j-m+1}^{j} N_{m-1,j}.$$

Отсюда и из нового представления (1.1.21) получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_{m-1,k}(t) =$$

$$= \sum_{k=j-m+1}^{j} [g_m(x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}; t) - g_m(x_k, \cdots, x_{k+m-1}; t)] =$$

$$= g_m(x_{j+1}, \cdots, x_{j+m}; t) - g_m(x_{j-m+1}, \cdots, x_j; t). \qquad (1.1.22)$$

Так как

$$g_m(x_{j-m+1}, \cdots, x_j; t) = \sum_{s=j-m+1}^{j} \frac{(x_s - t)_+^{m-1}}{\omega'_{j-m+1}(x_s)},$$

то вычитаемое в правой части (1.1.22) равно нулю. Наконец, разделенная разность $g_m(x_{j+1}, \cdots, x_{j+m}; t)$ (см. упражнение 1.1.1) выражается через производную $(m-1)$-го порядка

$$g_m(x_{j+1}, \cdots, x_{j+m}; t) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \, g_m(x; t)\Big|_{x=\xi}.$$

Отсюда и из (1.1.22) вытекает утверждение теоремы.

Из свойств B-сплайнов и теоремы 3 вытекает, что для любого целого $m \geq 0$

$$0 \leq N_{m-1,k}(t) \leq 1, \ -\infty < t < \infty,$$

$$suppN_{m-1,k} = (x_k, x_{k+m}). \qquad (1.1.23)$$

При практической работе со сплайнами очень важными являются реккурентные соотношения

$$N_{m-1,k}(t) = \frac{t - x_k}{x_{k+m-1} - x_k} N_{m-2,k}(t) + \frac{x_{k+m} - t}{x_{k+m} - x_{k+1}} N_{m-2,k+1}(t), \qquad (1.1.24)$$

позволяющие свести вычисление $N_{m-1,k}$ к нормированным сплайнам $N_{m-2,k}$ более низких степеней. Для доказательства формулы (1.1.24) рассмотрим отрезок $I_j = [x_j, x_{j+1}]$. Из определения $N_{m-2,p}$ и $B_{m-2,p}$ при $t \in I_j$, учитывая формулы (1.1.17) и (1.1.18) имеем

$$\frac{1}{x_{k+m} - x_{k+1}} N_{m-2,k+1}(t) = \sum_{s=j+1}^{k+m} \frac{(x_s - t)^{m-2}(x_s - x_k)}{\omega'_k(x_s)}, \qquad (1.1.25)$$

$$\frac{1}{x_{k+m}-x_k}N_{m-2,k}(t)=\sum_{s=j+1}^{k+m-1}\frac{(x_s-t)^{m-2}(x_s-x_{k+m})}{\omega_k'(x_s)}. \tag{1.1.26}$$

Умножим (1.1.25) на $(x_{k+m}-t)$, а (1.1.26) — на (x_k-t). Учитывая равенство

$$(x_s-x_k)(x_{k+m}-t)-(x_s-x_{k+m})(x_k-t)=(x_s-t)(x_{k+m}-x_k),$$

получаем

$$\frac{(x_{k+m}-t)}{x_{k+m}-x_{k+1}}N_{m-2,k+1}(t)-\frac{(x_k-t)}{x_{k+m-1}-x_k}N_{m-2,k}(t)=$$

$$(x_{k+m}-x_k)\sum_{s=j+1}^{k+m-1}\frac{(x_s-t)^{m-1}}{\omega_k'(x_s)}+\frac{(x_{k+m}-t)^{m-1}(x_{k+m}-x_k)}{\omega_k'(x_{k+m})}=$$

$$(x_{k+m}-x_k)\sum_{s=j+1}^{k+m}\frac{(x_s-t)^{m-1}}{\omega_k'(x_s)}=N_{m-1,k}(t).$$

Из произвольности j вытекает формула (1.1.24). Отметим, что из формулы (1.1.20) вытекает представление

$$N_{0,k}(t)=\begin{cases}1, & t\in(x_k,x_{k+1}]\\ 0, & t\notin(x_k,x_{k+1}].\end{cases}$$

Упражнение 2.4.1. Пусть сетка π имеет равноотстоящие узлы $x_{j+1}=x_j+h$ для любого j. Используя реккурентное соотношение (1.1.24), вычислить $N_{1,k}$, $N_{2,k}$, $N_{3,k}$ в узлах сетки.

Упражнение 2.4.2. Доказать, что для сетки π с равноотстоящими узлами кривая $N_{3,k}(t)$ симметрична относительно прямой $t=x_{k+2}$

$$N_{3,k}(x_{k+2}-\tau)=N_{3,k}(x_{k+2}+\tau)\ (0<\tau<2h).$$

Упражнение 2.4.3. Написать реккурентное соотношение для сплайнов $B_{m-1,k}(t)$.

В заключении отметим, что из (1.1.17) для нормированных сплайнов имеет место формула дифференцирования

$$\frac{d}{dt}N_{m-1,k}(t)=\frac{m-1}{x_{k+m-1}-x_k}N_{m-2,k}(t)-\frac{m-1}{x_{k+m}-x_{k+1}}N_{m-2,k+1}(t). \tag{1.1.27}$$

Нормированные B-сплайны удобно использовать при вычислениях.

Вычисление значений полиномиального сплайна дефекта 1

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана сетка

$$\Delta_n : \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b. \tag{1.1.28}$$

Рассмотрим пространство $S(\Delta_n, m-1, 1)$ полиномиальных сплайнов степени $m-1$ дефекта 1 на сетке Δ_n. Известно, что размерность этого пространства равна $m+n$.

Дополним сетку Δ_n узлами

$$x_{1-m} < x_{2-m} < \cdots < a, \ \ b < x_{n+2} < \cdots < x_{n+m-1}.$$

Расширенную сетку обозначим через $\overline{\Delta}_n$.

Нормированные B-сплайны

$$N_{m-1,1-m}(t), \ N_{m-1,2-m}(t), \cdots, N_{m-1,n}(t) \ \ (-\infty < t < \infty)$$

образуют базис в пространстве $S(\overline{\Delta}_n, m-1, 1)$. Поэтому любой элемент $S \in S(\overline{\Delta}_n, m-1, 1)$ представим в виде

$$S = \sum_{k=1}^{m+n-1} c_k N_{m-1,k-m}(t).$$

Рассмотрим вопрос о вычислении $S(t)$. Зафиксируем $j \in (0, 1, \cdots, n)$. При фиксированном $t \in I_j = (x_j, x_{j+1}]$ для всех целых $i \leq j-n$ и $i \geq j+1$

$$N_{m-1,i}(t) = 0.$$

Поэтому при $t \in (x_j, x_{j+1}]$ из (1.1.26) имеем

$$S(t) = \sum_{k=j+1}^{j+m} c_k N_{m-1,k-m}(t).$$

С другой стороны, если дополнить сетку Δ_n до бесконечной сетки (см. (1.1.11)), то с учетом финитности $N_{m-1,i}$ можно записать

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k N_{m-1,k-m} \ \ (t \in I_j). \tag{1.1.29}$$

Здесь $c_k = 0$ при $k < j+1$ и $k > j+m$.

Используя рекуррентную формулу (1.1.24), имеем

$$S(t) = \sum_k c_k \left[\frac{t - x_{k-m}}{x_{k-1} - x_{k-m}} N_{m-2,k-m}(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{x_k - t}{x_k - x_{k-m+1}} N_{m-2,k-m+1}(t) \right] \ (t \in I_j).$$

Производя теперь в последней сумме перегрупировку слагаемых, нетрудно получить

$$S(t) = \sum_k c_k^{[1]} N_{m-2,k-m}(t),$$

где

$$c_k^{[1]} = \frac{t - x_{k-m}}{x_{k-1} - x_{k-m}} c_k + \frac{x_{k-1} - t}{x_{k-1} - x_{k-m}} c_{k-1}.$$

Продолжая эту процедуру, приходим к представлению

$$S(t) = \sum_k c_k^{[p]}(t) N_{m-1-p,k-m}(t), \tag{1.1.30}$$

где

$$c_k^{[p]}(t) = \begin{cases} c_k, & p = 0 \\ \dfrac{t - x_{k-m}}{x_{k-p} - x_{k-m}} c_k^{[p-1]} + \dfrac{x_{k-p} - t}{x_{k-p} - x_{k-m}} c_{k-1}^{[p-1]}, & p > 0. \end{cases} \tag{1.1.31}$$

Легко видеть, что $c_k^{[p]}(t)$ является полиномом степени p относительно t. При $p = m-1$ из (1.1.30) имеем

$$S(t) = \sum_k c_k^{[m-1]}(t) N_{0,k-m}(t), \tag{1.1.32}$$

где при $t \in (x_j, x_{j+1}]$

$$N_{0,k-m}(t) = \begin{cases} 1, & k - m = j \\ 0, & k - m \neq j. \end{cases}$$

Таким образом, из суммы (1.1.32) остается одно слагаемое, и мы получаем

$$S(t) = c_{j+m}^{[m-1]}(t), \ t \in (x_j, x_{j+1}]. \tag{1.1.33}$$

Очевидно, что при $1 \leq p \leq m-1$ $c_k^{[p]}(t)$ является выпуклой линейной комбинацией $c_k^{[p-1]}$ и $c_{k-1}^{[p-1]}$, т.е. коэффициенты при этих величинах в (1.1.32) неотрицательны и их сумма равна 1. Значит, если при определении $c_k^{[p-1]}$ и $c_{k-1}^{[p-1]}$ допущена ошибка, не превосходящая по абсолютной величине некоторого $\epsilon > 0$, то величина $c_k^{[p]}$ будет вычислена с ошибкой, также не превосходящей по модулю ϵ.

Величины $c_k^{[p]}$, определяемые соотношением (1.1.31), удобно расположить в виде таблицы (треугольной)

$$\begin{array}{lllll}
c_{j+1}^{[0]}(t) & & & & \\
 & & & & \\
c_{j+2}^{[0]}(t) & c_{j+2}^{[1]}(t) & & & \\
\vdots & \vdots & & & \\
 & & & & \\
c_{j+m-2}^{[0]}(t) & c_{j+m-2}^{[1]}(t) & \cdots & & \\
 & & & & \\
c_{j+m-1}^{[0]}(t) & c_{j+m-1}^{[1]}(t) & \cdots & c_{j+m-1}^{[m-2]}(t) & \\
 & & & & \\
c_{j+m}^{[0]}(t) & c_{j+m}^{[1]}(t) & \cdots & c_{j+m}^{[m-2]}(t) & c_{j+m}^{[m-1]}(t)
\end{array}$$

которая при вычислениях заполняется по столбцам слева направо.

Единственный элемент, стоящий в последнем столбце, и есть искомое значение $S(t)$. Поскольку нет необходимости хранить $c_k^{[p-1]}(t)$ после того, как вычислены $c_k^{[p]}(t)$, то можно записать эти величины на место $c_k^{[p-1]}(t)$.

Таким образом, для вычисления $S(t)$ по формуле (1.1.33) можно применить следующий алгоритм:

Шаг 0. Определить такое j, что $x_j < t \leq x_{j+1}$.

Шаг 1. Положить $d_k = c_k$ $(k = j+1, j+2, \cdots, j+m)$.

Шаг 2. Для $p = 1,\ 2, \cdots, m-1$ выполнить шаг 3.

Шаг 3. Для $k = j+p+1, \cdots, j+m-1$ заменить d_k на

$$\frac{t - x_{k-m}}{x_{k-p} - x_{k-m}} d_k + \frac{x_{k-p} - t}{x_{k-p} - x_{k-m}} d_{k-1}$$

Шаг 4. Положить $S(t) = d_{j+m}$.

Упражнение 2.5.1. Предположим, что коэффициенты c_k известны. Вычислить интеграл

$$\int_a^b S(t)dt.$$

Одновременное вычисление значений сплайнов и его производных

Пусть $S(t)$ задан в виде (1.1.29) и в точке t требуется вычислить

$$S(t),\, S'(t),\, S''(t), \cdots, S^{(p)}(t).$$

Продифференцируем (1.1.29), учитывая формулу дифференцирования нормированных сплайнов (1.1.28):

$$S'(t) = \sum_k c_k N'_{m-1,k+m}(t) =$$

$$= (m-1)\sum_k c_k \left[\frac{N_{m-2,k-m}}{x_{k-1}-x_{k-m}} - \frac{N_{m-2,k-m+1}}{x_k - x_{k-m+1}}\right].$$

Перегруппируем члены, собирая слагаемые, содержащие $N_{m-2,i}$. Получим

$$S'(t) = (m-1)\sum_k \left[\frac{c_k}{x_{k-1}-x_{k-m}} - \frac{c_{k-1}}{x_{k-1}-x_{k-m}}\right] N_{m-2,k-m}(t) =$$

$$= (m-1)\sum_k \overline{c}_k^{[1]} N_{m-2,k-m}(t),$$

где

$$\overline{c}_k^{[1]} = \frac{c_k - ck - 1}{x_{k-1}-x_{k-m}}.$$

Совершенно аналогично получаем

$$S^{(p)}(t) = (m-1)\cdots(m-p)\sum_k \overline{c}_k^{[p]} N_{m-p-1,k-m}(t), \tag{1.1.34}$$

где $\overline{c_k}^{[p]}$ вычисляются из реккурентных соотношений

$$\overline{c}_k^{[p]} = \begin{cases} c_k, \quad p = 0 \\ \dfrac{\overline{c}_k^{[p-1]} - \overline{c}_{k-1}^{[p-1]}}{x_{k-p}-x_{k-m}}, \quad m > p > 0. \end{cases} \tag{1.1.35}$$

Легко написать алгоритм отыскания $\overline{c}_k^{[p]}$. Для одновременного вычисления

$S(t)$, $S'(t), \cdots, S^{(p)}(t)$ удобно ввести в рассмотрение верхнетреугольную матрицу

$$\begin{array}{cccccc}
N_{0,j}(t) & N_{1,j-1}(t) & N_{2,j-2}(t) & \cdots & N_{m-2,j-m+2}(t) & N_{m-1,j-m+1}(t) \\
 & N_{1,j}(t) & N_{2,j-1}(t) & \cdots & N_{m-2,j-m+3}(t) & N_{m-1,j-m+2}(t) \\
 & & N_{2,j}(t) & \cdots & N_{m-2,j-m+4}(t) & N_{m-1,j-m+3}(t) \\
 & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & N_{m-2,j}(t) & N_{m-1,j-1}(t) \\
 & & & & & N_{m-1,j}(t).
\end{array} \tag{1.1.36}$$

Для вычисления производной $S^{(p)}(t)$ используются лишь элементы $(m-p-1)$ столбца этой матрицы и числа $\overline{c}_k^{[p]}$. Выписанную матрицу при фиксированном j можно интерпретировать как двумерный массив $N(r,q)$, где

$$N(r,q) = N_{r-1,j-r+q}(t),\ r = 1, \cdots, m;\ q = 1, \cdots, r, \tag{1.1.37}$$

$$N(r,q) = 0,\ r < q < 1. \tag{1.1.38}$$

Очевидно, имеем (полагая $m = r+1$, $k = j + q - (r+1)$)

$$t - x_k = t - x_{j+1} - (r-q+2) = B(r-q+2),$$

$$x_{k+m} - t = x_{j+q} - t = A(q),$$

$$x_{k+m-1} - x_k = x_{j+q-1} - x_{j-(r+1)-q} = A(q-1) + B(r-q+2),$$

$$x_{k+m} - x_{k+1} = x_{j+q} - x_{j-r+q} = A(q) + B(r-q+1).$$

Поэтому реккурентное соотношение (1.1.24) можно переписать как

$$N(r+1,q) = B(r-q+2)\,\frac{N(r,q-1)}{A(q-1)+B(r-q+2)} +$$

$$+A(q)\,\frac{N(r,q)}{A(q)+B(r-q+1)}, \tag{1.1.39}$$

т.е. $N(r+1,q)$ вычисляется через $N(r,q-1)$, $N(r,q)$. Поэтому таблицу удобно заполнять последовательно по столбцам, следуя алгоритму:

Шаг 1. Определить j так, чтобы $x_j < t \le x_{j+1}$.

Шаг 2. Положить $N(1,1) = 1$.

Шаг 3. Для $r = 1, \cdots, m-1$ выполнить шаги 3 - 8.

Шаг 4. Положить $A(r) = x_{j-r} - t$, $B(r) = t - x_{j+1-r}$..

Шаг 5. Положить $N(r,q) = 0$ для $q > r$.

Шаг 6. Для $q = 1, \cdots, r$ выполнить шаги 7 - 9.

Шаг 7. Положить

$$M = \frac{N(r,q)}{A(q) - B(r+1-q)}.$$

Шаг 8. Положить $N(r+1,q) = N(r+1,q) + A(q)M$.

Шаг 9. Положить $N(r+1,q+1) = B(r+1-q)M$.

1.2 Эквивалентные нормы в пространствах сплайнов

Пространство сплайнов конечномерно и, следовательно, в нем все нормы эквивалентны. В ряде задач бывает важно установить оценки, которые связывают различные нормы.

Здесь мы установим соотношения эквивалентности между нормами шкал $L_p[a,b]$ и $W_p^s[a,b]$ в пространствах сплайнов на равномерных сетках.

Пусть Δ_n — равномерное разбиение отрезка $[a,b]$ с шагом $h = (b-a)/n$.

Лемма 3 *Найдется такая константа $C = C(m)$, что для любого разбиения Δ_n и любой функции $u \in S(\Delta_n, m-1, 1)$*

$$\|u\|_{L_\infty[a,b]} \le Ch^{-1/2} \|u\|_{L_2[a,b]}. \tag{1.2.1}$$

Доказательство. Пусть $u \in S(\Delta_n, m-1, 1)$, а $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ — произвольный отрезок разбиения Δ_n. На I_i функция u — полином степени не выше $m-1$. Отображение $g(\tau) = x_i + \tau h$ переводит отрезок $[0,1]$ в I_i. Поэтому

$$\|u\|_{L_\infty(I_i)} = \|u(x_i + \tau h)\|_{L_\infty[0,1]} \tag{1.2.2}$$

Функция $u(x_i+\tau h)$ — полином степени не выше $m-1$ по аргументу $\tau\in[0,1]$. В пространстве полиномов степени, не превосходящей $m-1$, все нормы эквивалентны. Поэтому существует такое $C>0$, что

$$\|u(x_i+\tau h)\|_{L_\infty[0,1]} \le C\left[\int_0^1 |u(x_i+\tau h)|^2\,d\tau\right]^{1/2} = \tag{1.2.3}$$

$$= Ch^{-1/2}\left[\int_{x_i}^{x_i+1} |u(t)|^2 dt\right]^{1/2} \le$$

$$\le Ch^{-1/2}\,\|u\|_{L_2(I_i)} \le Ch^{-1/2}\,\|u\|_{L_2[a,b]}.$$

Из (1.2.3) и (1.2.2) вытекает утверждение леммы 3.

Лемма 4 *Существует такая константа $C_1=C_1(m)$, что для любого Δ_n и любой функции $u\in S(\Delta_n,m-1,k)\,(k<m-1)$*

$$\|u^{(j+1)}\|_{L_2[a,b]} \le C_1h^{-1}\|u^{(j)}\|_{L_2[a,b]}\,(j=0,1,\cdots,m-1). \tag{1.2.4}$$

Здесь $u^{(s)}$ — производная функции u порядка s.

Доказательство. Вновь воспользуемся сжатием q отрезка $[0,1]$. Имеем

$$\|u^{(j+1)}\|_{L_2(I_i)} = \left\|\frac{d}{dt}u^{(j)}\right\|_{L_2(I_i)} =$$

$$\left(h\int_0^1 \left|\frac{d}{dt}u^{(j)}(x_i+\tau h)\right|^2 d\tau\right)^{1/2} =$$

$$= \left(h\int_0^1 1/h^2\left|\frac{d}{d\tau}u^{(j)}(x_i+\tau h)\right|^2 d\tau\right)^{1/2}. \tag{1.2.5}$$

Линейный оператор $\frac{d}{d\tau}$ в пространстве полиномов степени не выше $m-1$ ограничен. Поэтому

$$\left(\int_0^1 \left|\frac{d}{d\tau}u^{(j)}(x_i+\tau h)\right|^2 d\tau\right)^{1/2} \le$$

$$\le C\left(\int_0^1 \left|u^{(j)}(x_i+\tau h)\right|^2 d\tau\right)^{1/2} =$$

$$= Ch^{-1/2}\left[\int_{x_i}^{x_i+1} \left|u^{(j)}(t)\right|^2 dt\right]^{1/2}. \tag{1.2.6}$$

Отсюда и из (1.2.5) получаем, что для функции u и на любом отрезке I_i справедливо неравенство

$$\|u^{(j+1)}\|_{L_2(I_i)} \leq \frac{C}{h}\|u^{(j)}\|_{L_2(I_i)}. \tag{1.2.7}$$

Из последнего неравенства и вытекает утверждение леммы 4.

Будем считать теперь, что разбиение Δ_n произвольно.

Лемма 5 *Для любого частичного промежутка I_i произвольного разбиения Δ_n и любого полинома u степени $m-1$ справедлива оценка*

$$\|u^{(j+1)}\|_{L_\infty(I_i)} \leq \frac{C_2}{h_i}\left\|u^{(j)}\right\|_{L_\infty(I_i)} (j=0,\,1,\cdots,m-1), \tag{1.2.8}$$

где C_2 зависит лишь от m.

Доказательство легко получить по схеме предыдущей леммы.

Из леммы 5 без труда вытекают следующие соотношения эквивалентности норм для функций $u \in S(\Delta_n, m-1, 1)$

$$C_1\|u\|_{L_2[a,b]} \leq \|u\|_{L_\infty[a,b]} \leq C_2 h^{-1/2}\|u\|_{L_2[a,b]} \tag{1.2.9}$$

$$C_1\|u\|_{W_2^p[a,b]} \leq \|u\|_{W_2^{p+1}[a,b]} \leq C_2 h^{-1}\|u\|_{W_2^p[a,b]}, \tag{1.2.10}$$

где $h = \min h_i$.

Если $u \in S(\Delta_n, m-1, k)$, то справедливы неравенства

$$C_1\|u\|_{L_p[a,b]} \leq \|u\|_{L_p[a,b]} \leq C_2 h^{(1/p-1/q)}\|u\|_{L_p[a,b]} \tag{1.2.11}$$

$$C_1\|u\|_{W_q^s[a,b]} \leq \|u\|_{W_q^{s+l}[a,b]} \leq C_2 h^{-l}\,\|u\|_{W_q^s[a,b]} \tag{1.2.12}$$

Здесь $1 \leq p \leq q \leq \infty,\ l \geq 1,\ l, s$ — целые, $h = \min h_i$.

1.3 О биортогональных базисах в пространствах $S(\Delta_n, m-1, 1)$ и $[S(\Delta_n, m-1, 1)]^*$

Пусть X — конечномерное линейное нормированное пространство размерности m и X^* — его сопряженное пространство. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ и $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m$ — базисы в X и X^* соответственно.

Определение. Будем говорить, что базисы $\{\varphi_i\}$ и $\{\chi_i\}$ — биортогональны, если

$$\langle \chi_i, \varphi_i \rangle = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

Пусть задана сетка $\Delta_n : x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b$, а $\overline{\Delta}_n$ — некоторое ее расширение:

$$x_{-m+1} < \cdots < x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b < \cdots < x_{n+m}.$$

Обозначим через $[a',\, b']$ некоторый промежуток, содержащий сетку $\overline{\Delta}_n$.

Рассмотрим пространство $S(\overline{\Delta}_n, m-1, 1)$ и в качестве базиса возьмем множество нормированных B-сплайнов, отличных от нуля на $[a, b]$. Элементы сопряженного базиса будем искать в виде

$$\langle \mu_i,\, f\rangle = \int_{x_i}^{x_{i+m}} \lambda_i(t) f(t)\, dt.$$

Функции λ_i достаточно определить так, чтобы

$$\int_{x_i}^{x_{i+m}} \lambda_i(t) N_{m-1,j}(t) dt = \delta_{ij}. \tag{1.3.1}$$

Введем обозначения

$$\psi_i(t) = (t - x_{i+1}) \cdots (t - x_{i+m-1})/(m-1)!,$$

$$\psi_i^+(t) = (t - x_{i+1})_+ \cdots (t - x_{i+m-1})_+/(m-1)! \tag{1.3.2}$$

Заметим, что ψ_i^+ обращается в нуль во всех узлах $x_s\, (s < i + m)$ разбиения. Отсюда следует одно интересное свойство разделенных разностей функций ψ_i^+.

Лемма 6 *Имеет место равенство*

$$\psi_i^+(x_j, xj+1, \cdots, x_{j+m}) = \frac{\delta_{ij}}{(m-1)!(x_{i+m} - x_i)}. \tag{1.3.3}$$

Доказательство. При $s = j,\, j+1, \cdots, j+m$ и $j < i$, как отмечалось выше, $\psi_i^+(x_s) = 0$, и, следовательно,

$$\psi_i^+(x_j, \cdots, x_{j+m}) = 0.$$

Пусть теперь $j > i$. Тогда при вычислении разделенной разности $\psi_i^+(x_j, \cdots, x_{j+m})$ используются узлы $x_j, \cdots, x_{j+m} \geq x_{i+1}$. Легко заметить, что в этих узлах функция ψ_i^+ совпадает с фукцией ψ_i, которая является полиномом степени $m-1$. Поэтому

$$\psi_i^+(x_j, \cdots, x_{j+m}) = \psi_i(x_j, \cdots, x_{j+m}) = 0.$$

Таким образом, при $i \neq j$: $\psi_i^+(x_j, \cdots, x_{j+m}) = 0$.

При $i = j$ нас интересуют узлы x_i, $x_{i+1}, \cdots$, x_{i+m}. Функция ψ_i^+ отлична от нуля лишь в узле x_{i+m}. Легко заметить, что в этих узлах ее значения совпадают со значениями полинома

$$F(t) = \psi_i(t)\, \frac{t - x_i}{x_{i+m} - x_i}$$

степени $m-1$. Поэтому разделенные разности $F(x_i, \cdots, x_{i+m})$ и $\psi_i^+(x_i, \cdots, x_{i+m})$ совпадают. Осталось лишь заметить, что коэффициент при старшей степени у полинома F равен $1/((m-1)!(x_{i+m} - x_i))$. Отсюда и следует, что при $j = i$

$$\psi_i^+(x_i, \cdots, x_m) = \frac{1}{(m-1)!\,(x_{i+m} - x_i)}.$$

Лемма доказана.

Если некоторая функция $f(t)$ в узлах сетки (расширенной) $\overline{\Delta}_n$ совпадает с ψ_i^+, то в силу (1.3.3)

$$(m-1)!\,(x_{i+m} - x_i) f(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+m}) = \delta_{ij}. \tag{1.3.4}$$

Допустим, что мы построили такую m раз непрерывно дифференцируемую функцию $f(t)$. Тогда, используя формулу Тейлора, представим ее в виде

$$f(t) = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{f^{(s)}(a')(t-a')^s}{s!} + \frac{1}{(m-1)!}\left(\int_{a'}^{b'} (t-\tau)^{m-1} + f^{(m)}(\tau)\right) d\tau.$$

Далее, из (1.3.4), (1.1.2), (1.1.10), (1.1.19) следует, что

$$\delta_{ij} = (m-1)! f(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+m})(x_{i+m} - x_i) \equiv$$

$$\equiv \int_{a'}^{b'} N_{m-1,j}(\tau) f^{(m)}(\tau) d\tau. \tag{1.3.5}$$

Из (1.3.5) вытекает следующее утверждение

Лемма 7 *Пусть m раз непрерывно дифференцируемая функция f_i совпадает в узлах сетки $\overline{\Delta}_n$ с функцией ψ_i^+. Тогда для $\lambda_i = f_i^{(m)}$ будет справедливо соотношение*

$$\int_{a'}^{b'} \lambda_i(t) N_{m-1,j}(t)\, dt = \delta_{ij}.$$

Действительно, если определить функцию $f_i \in C_m[a', b']$ так, чтобы

$$f_i(t) = \begin{cases} 0, & t \le x_i \\ 0, & t = x_{i+1}, \cdots, x_{i+m-1} \\ \psi_i(t), & t \ge x_{i+m} \end{cases}$$

то носитель $\lambda_i = f_i^{(m)}$ будет принадлежать промежутку $[x_i, x_{i+m}]$ и, следовательно, будут иметь место формулы (1.3.2).

В качестве f_i можно взять любую функцию вида

$$f_i = G_i(t)\psi_i(t), \tag{1.3.6}$$

где $G_i \in C_m[a', b']$ и

$$G_i = \begin{cases} 0, & t \le x_i \\ 1, & t \ge x_{i+m}. \end{cases} \tag{1.3.7}$$

Например, $G_i = H\left(\dfrac{t - x_i}{x_{i+m} - x_i}\right)$, где

$$H(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \le 0 \\ \int_0^\tau e^{\frac{1}{t(t-1)}}\, dt \Big/ \int_0^1 e^{\frac{1}{t(t-1)}}\, dt, & 0 < \tau \le 1 \\ 1, & \tau \ge 1 \end{cases} \tag{1.3.8}$$

Заметим, что все производные $H^s\,(s = 0, 1, \cdots, m)$ равномерно ограничены на числовой прямой. Отсюда легко вытекает существование такой универсальной константы $C > 0$, что при $t \in [a', b']$

$$|G_i(t)| \le C,\ |G_i'(t)| \le \frac{C}{x_{i+m} - x_i},\ |G_i''(t)| \le \frac{C}{(x_{i+m} - x_i)^2}.$$

и т.д.

Заметим, что при $t \in (x_i, x_{i+m})$ для некоторой константы $C > 0$

$$|\psi_i(t)| \le C(x_{i+m} - x_i)^{m-1},\ |\psi_i'(t)| \le C(x_{i+m} - x_i)^{m-2},$$

$$|\psi_i''(t)| \le C(x_{i+m} - x_i)^{m-3},$$

и т.д.

Используя эти оценки, простым подсчетом легко получить, что при $t \in (x_i, x_{i+m})$ для некоторой константы $C > 0$ имеем

$$|f_i(t)| \le C(x_{i+m} - x_i)^{m-1},\ |f_i'(t)| \le C(x_{i+m} - x_i)^{m-2},\ \cdots$$

$$|f_i^{(m)}(t)| \le \frac{C}{(x_{i+m} - x_i)}.$$

Отсюда следует, что при $t \in (x_i, x_{i+m})$

$$|\lambda_i(t)| = |f_i^{(m)}(t)| \le \frac{C}{(x_{i+m} - x_i)}.$$

Поэтому

$$|\langle \mu_i, f \rangle| = \left| \int_{x_i}^{x_{i+m}} \lambda_i(t) f(t) dt \right| \le C \|f\|_{C[x_i, x_{i+m}]},$$

и следовательно, для некоторой константы $C > 0$

$$\|\mu_i\|_{L_\infty} < C \ (i = -m+1, -m+2, \cdots, n). \tag{1.3.9}$$

Здесь C не зависит от разбиения Δ_n. Лемма доказана.

Теорема 4 *Существуют такие функции* $\lambda_i \in C_[a', b'] \, (i = -m+1, \cdots, n)$ *и константа* $C_1 = C_1(m)$*, что для любого нормированного сплайна*

$$N_{m-1,j} \ (j = -m+1, -m+2, \cdots, n)$$

справедливы соотношения

$$\langle \mu_i, N_{m-1,j} \rangle = \int_{x_i}^{x_{i+m}} \lambda_i(t) N_{m-1,j}(t) dt = \delta_{i,j}, \tag{1.3.10}$$

причем

$$\|\mu_i\|_{L_\infty} = \int_{x_i}^{x_{i+m}} |\lambda_i(t)| dt \le C_1. \tag{1.3.11}$$

Аналогичный результат имеет место и в пространстве $L_2[a', b']$.
Пусть $N^{(2)}_{m-1,i} \, (i = -m+1, \cdots, n)$ — B-сплайны, нормированные на 1 в $L_2[a', b']$.

Теорема 5 *Существуют такие функции* $\lambda_i^{(2)}(t) \in C[a', b']$*, что*

$$\langle \mu_i^{(2)}, N^{(2)}_{m-1,j} \rangle = \int_{x_i}^{x_{i+m}} \lambda_i^{(2)}(t) N^{(2)}_{m-1,j}(t) dt = \delta_{i,j}, \tag{1.3.12}$$

причем

$$\|\mu_i^{(2)}\|_{L_2} = \left(\int_{x_i}^{x_{i+m}} \lambda_i^{(2)}(t) N^{(2)}_{m-1,j}(t)) \, dt \right)^{1/2} = \delta_{i,j}. \tag{1.3.13}$$

Доказательство. Положим

$$\lambda_i^{(2)} = \lambda_i(t)\,\|N_{m-1,i}\|_C/\|N_{m-1,i}^{(2)}\|_C.$$

Легко подсчитать, что

$$\|\lambda_i^{(2)}\|_C = \|\lambda_i\|_C \frac{\|N_{m-1,i}\|_C}{\|N_{m-1,i}^{(2)}\|_C} \leq$$

$$\leq \|\lambda_i\|_C/\|N_{m-1,i}^{(2)}\|_C \leq \frac{C}{(x_{i+m}-x_i)\|N_{m-1,i}^{(2)}\|_C}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\|N_{m-1,i}^{(2)}\|_C \geq C_4\big(x_{i+m}-x_i\big)^{-1/2}\,(C_4>0).$$

Поэтому

$$\|\lambda_i^{(2)}(t)\|_C \leq \frac{C}{(x_{i+m}-x_i)^{1/2}}.$$

Отсюда и следует оценка (1.3.13).

1.4 Теоремы Карла де Бора о сплайновых аппроксимациях

Конструкция биортогональных базисов позволяет установить существование сплайн-приближений функций, обладающих высокой точностью.

Будем рассматривать гладкие функции $g \in C^{(k)}[a,b]$. Мы предполагаем, что g продолжена на $(-\infty,a)$, (b,∞) полиномами степени k с центрами в точках a и b соответственно с сохранением гладкости.

Теорема 6 *Существует такая константа $C = C(m)$, что для любой функции $g \in C[a,b]$ и для любого разбиения Δ_n отрезка $[a,b]$ найдется такая функция $g_\Delta \in S(\overline{\Delta}_n, m-1, 1)$, что для любого частичного отрезка $I_i = [x_i, x_{i+1}] \subset [a,b]$*

$$\|g-g_\Delta\|_{C[x_i,x_{i+1}]} \leq C\,dist_{C[x_{i-m+1},x_{i+m}]}(g, P_{m-1}), \tag{1.4.1}$$

где P_{m-1} — пространство полиномов степени не выше $m-1$.

Доказательство. Пусть μ_s — введенные в предыдущем параграфе функционалы, биортогональные $N_{m-1,j}$.

Рассмотрим линейный оператор

$$Ag = \sum_{s=1-m}^{n} \langle \mu_s,\, g\rangle\, N_{m-1,s}(t).$$

Из теоремы 5 легко вывести, что если $g \in S(\Delta_n, m-1, 1)$, то $Ag = g$, т.е. A — проектор на $S(\Delta_n, m-1, 1)$. В частности, $Ap = p$ для любого полинома $p \in P_{m-1}$ степени не выше $m-1$. Отсюда для $p \in P_{m-1}$ получаем

$$g - Ag = (g-p) + (p - Ag) = (g-p) - A(p-g).$$

Зафиксируем отрезок $I_i = [x_i, x_{i+1}]$. Имеем

$$\|g - Ag\|_{C[x_i,x_{i+1}]} \le \|g-p\|_{C[x_i,x_{i+1}]} + \|A(p-g)\|_{C[x_i,x_{i+1}]}. \tag{1.4.2}$$

На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ отличны от нуля лишь сплайны
$N_{m-1,i-m+1}, \cdots, N_{m-1,i}$. Поэтому для $t \in [x_i, x_{i+1}]$

$$A(p-g)(t) = \sum_{s=i-m+1}^{i} \langle \mu_s, p-g\rangle\, N_{m-1,s}(t).$$

Заметим далее, что $supp\, \mu_s \in [x_s, x_{s+m}]$ и, следовательно,

$$|\langle \mu_s, p-g\rangle| \le \|\mu_s\|_{L_\infty} \|p-g\|_{C[x_s,x_{s+m}]}.$$

Так как $s = i-m+1, \cdots, i$, то $[x_s, x_{s+m}] \in I_i^*$ и, следовательно, при всех $s = i-m+1, \cdots, i$ для некоторого $C > 0$

$$|\langle \mu_s, p-g\rangle| \le C\|p-g\|_{C[x_{i-m+1},x_{i+m}]}.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\|A(p-g)\|_{C[x_i,x_{i+1}]} \le \max_s |\langle \mu_s, p-g\rangle| \max_s N_{m-1,s}(t). \tag{1.4.3}$$

Используя (1.4.3) и (1.4.2), легко вывести, что

$$\|g - Ag\|_{C[x_i,x_{i+1}]} \le (1 + C_1)\, \|g-p\|_{C[x_{i-m+1},x_{i+m}]}$$

для произвольного $p \in P_{m-1}$. Теорема 6 доказана.

Будем теперь рассматривать гладкие функции $g \in C^{(k)}[a,b]$. Продолжим их на всю числовую ось, полагая

$$\overline{g}(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{g^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i, & t \le a \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{g^{(i)}(b)}{i!}(t-b)^i, & t \ge b. \end{cases}$$

Теорема 7 *Пусть Δ_n — произвольное разбиение промежутка $[a,b]$, удовлетворяющее условию LR с константами C_1 и C_2 (т.е. $C_1 \le h_i/h_{i+1} \le C_2$).*

Тогда найдется такая константа $C_3 > 0$, что для любой функции $g \in C^{(l+1)}[a,b]\,(0 \le l \le m-1)$ можно указать такой сплайн $g_\Delta \in S(\overline{\Delta}_n, m-1, 1)$, что для любого частичного отрезка $[x_j, x_{j+1}]$ и любого $i = 0,\, 1, \cdots, \min(l+1, m-1)$ будет справедлива оценка

$$\Big\|\frac{d^i}{dt^i}(g-g_\Delta)\Big\|_{C[x_j,x_{j+1}]} \le C_3 h_j^{l+1-i}\Big\|g^{(l+1)}\Big\|_{C[x_{j-m+1},x_{j+m}]}. \tag{1.4.4}$$

Доказательство. Установим (1.4.4) вначале при $i=0$. Зафиксируем произвольный отрезок $[x_j, x_{j+1}]$. Обозначим через $P_{j,l}(t)$ полином Тейлора степени l функции $g(t)$ с некоторым центром разложения в точке x_j. Имеем

$$g(t) = P_{j,l}(t) + \frac{1}{l!}\int_{x_j}^{t}(t-s)^l g^{(l+1)}(s)\,ds. \tag{1.4.5}$$

Отсюда тотчас же следует, что

$$\|g - P_{j,l}\|_{C[x_{j-m+1},x_{j+m}]} \le Ch^{l+1}\Big\|g^{(l+1)}\Big\|_{C[x_{j-m+1},x_{j+m}]}.$$

Поэтому

$$dist_{C[x_{j-m+1},x_{j+m}]}\|g - P_{m-1}\| \le Ch_j^{l+1}\Big\|g^{(l+1)}\Big\|_{C[x_{j-m+1},x_{j+m}]}.$$

Отсюда и из теоремы 6 получаем существование такой функции $g_\Delta \in S(\Delta_n, m-1, 1)$, что

$$\|(g-g_\Delta)\|_{C[x_j,x_{j+1}]} \le Ch_j^{l+1}\|g^{(l+1)}\|_{C[x_{j-m+1},x_{j+m}]}. \tag{1.4.6}$$

Перейдем теперь к изучению приближений производных. Из (1.4.5) и (1.4.6) вытекает, что для некоторого $C_3 > 0$

$$\|g_\Delta - P_{j,l}\|_{C[x_j,x_{j+1}]} \le C_3 h_j^{l+1}\Big\|g^{(l+1)}\Big\|_{C[x_{j-m+1},x_{j+m}]}. \tag{1.4.7}$$

Теперь заметим, что $g_\Delta - P_{j,l}$ на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ — полином степени $\le m-1$ и поэтому в силу леммы 5 и из (1.4.7) следует, что для $i = 0,\, 1, \cdots, \min(l+1, m-1)$

$$\Big\|\frac{d^i}{dt^i}(P_{j,l}-g_\Delta)\Big\|_{C[x_j,x_{j+1}]} \le Ch_j^{l+1-i}\|g^{(l+1)}\|_{C[x_j,x_{j+1}]}. \tag{1.4.8}$$

Наконец, заметим, что из (1.4.5) следует оценка

$$\Big\|\frac{d^i}{dt^i}(g-P_{j,l})\Big\|_{C[x_j,x_{j+1}]} \le Ch_j^{l+1-i}\Big\|g^{(l+1)}\Big\|_{C[x_j,x_{j+1}]}. \tag{1.4.9}$$

Отсюда и из (1.4.8) немедленно вытекает утверждение теоремы 7.

Приведем некоторое обобщение теоремы 7. Для простоты будем считать, что разбиение $\Delta_n : x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ целиком содержит хотя бы один отрезок вида $[x_{j-m+1}, x_{j+m}]$, т.е. $n \geq 2m - 2$. Справедливо следующее уточнение теоремы 7, не требующее перехода к расширенному разбиению $\overline{\Delta}_n$.

Теорема 8 *Пусть Δ_n — произвольное разбиение промежутка $[a, b]$, удовлетворяющее условию LR с константами C_1 и C_2.*

Тогда найдется такая константа $C_3 > 0$, что для любой функции $g \in C^{(l+1)}[a, b]\,(0 \leq l \leq m - 1)$ можно указать такой сплайн $g_\Delta \in S(\Delta_n, m - 1, 1)$, что для любого частичного отрезка $[x_j, x_{j+1}]$ и любого $i = 0, 1, \cdots, \min(l + 1, m - 1)$ будет справедлива оценка

$$\Big\|\frac{d^i}{dt^i}(g - g_\Delta)\Big\|_{C[x_j,x_{j+1}]} \leq C_3 h_j^{l+1-i} \big\|g^{(l+1)}\big\|_{C[I_j^*]}, \qquad (1.4.10)$$

где

$$I_j^* = \begin{cases} [x_{j-m+1}, x_{j+m}], & m - 1 < j < n + 1 - m \\ [a, x_{j+m}], & 0 \leq j \leq m - 1 \\ [x_{j-m+1}, b], & n + 1 - m \leq j \leq n + 1. \end{cases}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение расширенное разбиение $\overline{\Delta}_n$. Продолжим функцию $g(t)$ на всю ось, полагая

$$\overline{g}(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{l+1} \frac{g^{(i)}(a)}{i!}(t - a)^i, & -\infty < t < a \\ g(t), & a \leq t \leq b \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{l+1} \frac{g^{(i)}(b)}{i!}(t - b)^i, & b < t < \infty. \end{cases}$$

Тогда для функций $\overline{g}(t)$ будет справедлива теорема 7. Согласно этой теореме существует такой сплайн $\overline{g}_\Delta \in S(\overline{\Delta}_n, m - 1, 1)$, что

$$\Big\|\frac{d^i}{dt^i}(\overline{g} - \overline{g}_\Delta)\Big\|_{C[x_j,x_{j+1}]} \leq C_3 h_j^{l+1-i} \big\|\overline{g}^{(l+1)}\big\|_{C[x_{j-m+1},x_{j+m}]}. \qquad (1.4.11)$$

Но в силу (1.4.10)

$$\overline{g}^{(l+1)}(t) = g^{(l+1)}(a),\ t \leq a, \qquad (1.4.12)$$

$$\overline{g}^{(l+1)}(t) = g^{(l+1)}(b),\ \ t \geq b. \tag{1.4.13}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left\|\overline{g}^{(l+1)}\right\|_{C[x_{j-m+1},x_{j+m}]} = \left\|\overline{g}^{(l+1)}\right\|_{C[x_{j-m+1},x_{j+m}]\cap[a,b]} = \\ = \left\|\overline{g}^{(l+1)}\right\|_{C[I_j^*]} = \left\|g^{(l+1)}\right\|_{C[I_j^*]}. \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

Учитывая, что $\overline{g} = g$ на $[a,b]$, из (1.4.14) и (1.4.11) получаем (1.4.9). Теорема 8 доказана.

Глава 2

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ

2.1 Интерполяционные формулы, точные на погранслойной составляющей

2.1.1 Необходимость построения специальных формул

Пусть функция $u(x)$ достаточно гладкая и имеет декомпозицию в виде суммы регулярной и погранслойной составляющих:

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \ x \in [0,1]. \tag{2.1.1}$$

где функции $p(x)$ и $\Phi(x)$ – достаточно гладкие, погранслойная составляющая $\Phi(x)$ известна, но ее производные не являются равномерно ограниченными, регулярная составляющая $p(x)$ не задана и имеет ограниченные производные до некоторого порядка, постоянная γ не задана.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \ u(1) = B, \tag{2.1.2}$$

где

$$a(x) \ge \alpha > 0, b(x) \ge 0, \ \varepsilon > 0,$$

функции $a(x), b(x), f(x)$ – достаточно гладкие. Согласно [7], решение задачи (2.1.2) содержит экспоненциальный погранслой вблизи точки $x = 0$ и в представлении (2.1.1) можно задать

$$\Phi(x) = \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x),\ \gamma = -\varepsilon u'(0)/a_0,\ a_0 = a(0).$$

Тогда

$$\left|p^{(j)}(x)\right| \leq C_0\Big[\varepsilon^{1-j}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x) + 1\Big],\ j \geq 1.$$

Отметим, что под C и C_j мы подразумеваем положительные постоянные, не зависящие от ε и числа шагов сетки N.

Заметим, что

$$\Phi'(x) < 0,\ \Phi''(x) > 0,\ x \in [0,1]. \tag{2.1.3}$$

Итак, производная $p'(x)$ является ограниченной при любом значении параметра ε, а $|\Phi'(x)|$ неограниченно растет с убыванием ε.

Пусть функция $u(x)$ задана в узлах равномерной сетки Ω^h :

$$\Omega^h = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h,\ x_0 = 0,\ x_N = 1,\ n = 1, 2, \ldots, N\},\ \Delta_n = [x_{n-1}, x_n],$$

где $u_n = u(x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Покажем необходимость построения специальной интерполяции для функций с погранслойной составляющей.

Зададим $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Оценим погрешность линейной интерполяции в случае такой функции. Пусть $L_2(u, x)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа для интервала $[x_{n-1}, x_n]$:

$$L_2(u, x) = (u_n - u_{n-1})\frac{x - x_n}{h} + u_n,\ x \in \Delta_n.$$

Известно, что для погрешности линейной интерполяции справедлива оценка:

$$|L_2(u, x) - u(x)| \leq \frac{h^2}{8}\max_{s\in\Delta_n}|u''(s)|,\ x \in [x_{n-1}, x_n].$$

Из этой оценки следует, что если производная $|u''(x)|$ равномерно ограничена на интервале $[0, 1]$, то погрешность интерполяции – величина порядка $O(h^2)$, если же производная $|u''(x)|$ не ограничена равномерно сверху, то погрешность интерполяции может быть существенной. В случае $u(x) = e^{-\varepsilon^{-1}x}$ производная $u''(x)$ не является ограниченной на интервале $[0, 1]$ при малых значениях ε. При $\varepsilon = h$

$L_2(u, h/2) - u(h/2) \approx 0,0774$ для любого малого шага h. Получили, что погрешность интерполяции не может быть уменьшена при $\varepsilon = h$ и $h \to 0$.

Таким образом, для функций вида (2.1.1) необходимо строить специальные интерполяционные формулы, погрешность которых не зависит от градиентов интерполируемой функции в пограничном слое.

2.1.2 Интерполяционная формула, точная на погранслойной составляющей

В [20] для интерполяции функции вида (2.1.1) построена интерполяционная формула с k узлами интерполяции:

$$L_{\Phi,k}(u, x) = L_{k-1}(u, x) + \frac{[x_1, \ldots, x_k]u}{[x_1, \ldots, x_k]\Phi}\Big[\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)\Big], \qquad (2.1.4)$$

где $[x_1, \ldots, x_k]u$ – разделенная разность для функции $u(x)$ [26], $L_k(u, x)$ – многочлен Лагранжа с k узлами интерполяции $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Несложно убедиться, что формула (2.1.4) является интерполяционной в узлах $x_1,\ x_2, \ldots, x_k$ и точной на многочленах степени $(k-2)$ и на составляющей $\gamma\Phi(x)$. Эта формула определена корректно, если $\Phi^{(k-1)}(x) \neq 0,\ x \in (0, 1)$.

В [20] доказана следующая лемма.

Лемма 1 *Пусть*

$$M_k(\Phi, x) = \frac{\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)}{\Phi(x_k) - L_{k-1}(\Phi, x_k)}. \qquad (2.1.5)$$

Тогда

$$\Big|L_{\Phi,k}(u, x) - u(x)\Big| \le \max_s |p^{(k-1)}(s)| \Big[|M_k(\Phi, x)| + 1\Big] h^{k-1}. \qquad (2.1.6)$$

.

В соответствии с этой леммой , предложенная интерполяционная формула (2.1.4) обладает погрешностью порядка $O(h^{k-1})$, если функция $M_k(\Phi, x)$ является равномерно ограниченной.

Лемма 2 *Пусть*

$$\Phi^{(k-1)}(x) > 0,\ \Phi^{(k)}(x) \ge 0 \quad \textit{или} \quad \Phi^{(k-1)}(x) < 0,\ \Phi^{(k)}(x) \le 0, \quad x \in (0, 1). \qquad (2.1.7)$$

Тогда

$$\Big|L_{\Phi,k}(u, x) - u(x)\Big| \le 2 \max_s |p^{(k-1)}(s)| h^{k-1}. \qquad (2.1.8)$$

.

Доказательство. Рассмотрим первый случай в (2.1.7). Учитывая [26, с. 44], что

$$\Phi(x)-L_{k-1}(\Phi,x)=r_{k-1}(x)[x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x]\Phi, r_{k-1}(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1}),$$

из (2.1.5) получаем

$$M_k(\Phi,x)=\frac{r_{k-1}(x)[x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x]\Phi}{r_{k-1}(x_k)[x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x_k]\Phi}. \tag{2.1.9}$$

Для некоторого $s\in(0,1)$ справедливо соотношение [26]

$$[x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x]\Phi=\Phi^{(k-1)}(s)/(k-1)!. \tag{2.1.10}$$

Учитывая условие $\Phi^{(k-1)}(x)>0$, получаем $z(x)=[x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x]\Phi>0$. Для разделенной разности справедливо соотношение [26] $z'(x)=[x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x,x]\Phi$. Учитывая условие $\Phi^{(k)}(x)\geq 0$ и (2.1.10), получаем $z'(x)\geq 0,\ x\in[0,1]$. Итак, функция $z(x)$ на интервале $[0,1]$ является положительной и возрастающей. Учитывая еще неравенство $|r_{k-1}(x)|\leq r_{k-1}(x_k)$, из (2.1.9) получаем, что $|M_k(\Phi,x)|\leq 1$. Применяя (2.1.6), получаем утверждение леммы.

Отметим, что оценка (2.1.8) равномерно по погранслойной составляющей $\Phi(x)$.

Условия этой леммы выполнены в случае функции $\Phi(x)=e^{(x-1)/\varepsilon}$, соответствующей экспоненциальному пограничному слою у правой границы.

Используя соотношение [26, с. 45]

$$L_k(u,x)-L_{k-1}(u,x)=r_{k-1}(x)[x_1,x_2,\dots,x_k]u,$$

интерполяционную формулу (2.1.4) можно записать в виде:

$$L_{\Phi,k}(u,x)=L_k(u,x)+\frac{[x_1,\dots,x_k]u}{[x_1,\dots,x_k]\Phi}\Big[\Phi(x)-L_k(\Phi,x)\Big]. \tag{2.1.11}$$

Из (2.1.11) явно следует, что эта формула является интерполяционной и точной на $\Phi(x)$. Хотя эта формула является более сложной в сравнении с (2.1.4), где используется многочлен Лагранжа меньшей степени.

Замечание 1 *Дифференцированием интерполянта $L_{\Phi,k}(u,x)$ можно получить формулы численного дифференцирования, точные на погранслойной составляющей $\Phi(x)$.*

Замечание 2 *Рассмотрим вопрос численного интегрирования функции с большими градиентами вида (2.1.1). Пусть* $I(u) = \int\limits_a^b u(x)\,dx$. *Как показано в [54], применение формул Ньютона-Котеса для вычисления интеграла* $I(u)$ *приводит к повышению погрешности этих формул до величины порядка* $O(h)$ *независимо от числа узлов в базовой формуле, в случае равномерной сетки. Интерполяционная формула (2.1.4) позволяет строить квадратурные формулы, точные на погранслойной составляющей* $\Phi(x)$*:*

$$S_{\Phi,k}(u) = \int\limits_a^b L_{\Phi,k}(u,x)\,dx.$$

Такие формулы нами исследовались, например, в [54, 55]. Доказано, что погрешность таких формул равномерна по погранслойной составляющей $\Phi(x)$. *Доказано, что построенная составная квадратурная формула с* k *узлами обладает погрешностью порядка* $O(h^{k-1})$ *равномерно по* $\Phi(x)$. *Таким образом, погрешность равномерна по большим градиентам функции* $u(x)$ *в пограничном слое.*

2.1.3 Интерполяционная формула подгонки с двумя узлами

Рассмотрим интерполяционную формулу (2.1.4) в случае $k = 2$:

$$L_{\Phi,2}(u,x) = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Phi_n - \Phi_{n-1}}[\Phi(x) - \Phi_n] + u_n, \; x \in \Delta_n. \tag{2.1.12}$$

Лемма 3 *Пусть погранслойная составляющая* $\Phi(x)$ *строго монотонна на интервале* $[x_{n-1}, x_n]$. *Тогда*

$$|L_{\Phi,2}(u,x) - u(x)| \le 2 \max_{s \in \Delta_n} |p'(s)|\, h, \; x \in \Delta_n.$$

Доказательство. Зададим погрешность интерполяции:

$$R_\Phi(u,x) = L_{\Phi,2}(u,x) - u(x).$$

Учитывая представление (2.1.1), получаем $R_\Phi(u,x) = R_\Phi(p,x)$. Следовательно,

$$L_{\Phi,2}(u,x) - u(x) = -\frac{\Phi_n - \Phi(x)}{\Phi_n - \Phi_{n-1}}(p_n - p_{n-1}) + p_n - p(x), \; x \in \Delta_n.$$

Учитывая строгую монотонность $\Phi(x)$ на Δ_n, получаем утверждение леммы.

Перейдем к анализу формул численного дифференцирования для функций с большими градиентами в пограничном слое.

Сначала покажем неэффективность применения классической формулы для производной в случае функции вида (2.1.1). Зададим $\Phi(x) = \ln x, x \in [\varepsilon, 1]$. Оценим относительную погрешность формулы для производной. При $\varepsilon = h$ имеем

$$\Big|\frac{u_1 - u_0}{h} - u'(\varepsilon)\Big|\Big/|u'(\varepsilon)| = \varepsilon\Big|\frac{\ln(\varepsilon + h) - \ln\varepsilon}{h} - \frac{1}{\varepsilon}\Big| = 1 - \ln 2.$$

Итак, точность классичечкой формулы не повышается с уменьшением шага сетки.

На основе дифференцирования интерполянта (2.1.12) получаем формулу численного дифференцирования, точную на $\Phi(x)$:

$$u'(x) \approx L'_{\Phi,2}(u, x) = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Phi_n - \Phi_{n-1}}\Phi'(x), \ x \in [x_{n-1}, x_n]. \tag{2.1.13}$$

Пусть

$$|\Phi'(x)| \le B_n, \ x \in [x_{n-1}, x_n]. \tag{2.1.14}$$

Лемма 4 *Пусть для некоторой постоянной G_n справедлива оценка:*

$$\frac{\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} |\Phi''(s)|\, ds}{B_n|\Phi_n - \Phi_{n-1}|} \le G_n. \tag{2.1.15}$$

Тогда

$$\Big|\frac{L'_{\Phi,2}(u, x) - u'(x)}{B_n}\Big| \le G_n \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} |p'(s)|\, ds + \frac{1}{B_n}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} |p''(s)|\, ds, \ x \in [x_{n-1}, x_n]. \tag{2.1.16}$$

Доказательство. Учитывая, что формула (2.1.13) является точной на $\Phi(x)$, получаем

$$L'_{\Phi,2}(u, x) - u'(x) = \frac{p_n - p_{n-1}}{\Phi_n - \Phi_{n-1}}\Big[\Phi'(x) - \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{h}\Big] + \Big(\frac{p_n - p_{n-1}}{h} - p'(x)\Big). \tag{2.1.17}$$

Учитывая оценку

$$\Big|\Phi'(x) - \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{h}\Big| \le \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} |\Phi''(s)|\, ds \tag{2.1.18}$$

и (2.1.15), из (2.1.17) получаем (2.1.16). Лемма доказана.

Остановимся на случае экспоненциального пограничного слоя, когда $\Phi(x) = e^{-mx/\varepsilon},\ m > 0,\ x \in [0,1]$, Зададим $B_n = m/\varepsilon$. Тогда

$$\frac{\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} |\Phi''(s)|\, ds}{B_n|\Phi_n - \Phi_{n-1}|} = 1. \tag{2.1.19}$$

Итак, услови (2.1.15) выполнено при задании $G_n = 1$. Учитывая (2.1.19), из (2.1.16) для некоторой постоянной C, не зависящей от ε получаем

$$\varepsilon\Big|L'_{\Phi,2}(u,x) - u'(x)\Big| \le Ch,\ x \in [x_{n-1}, x_n]. \tag{2.1.20}$$

Оценка (2.1.20) справедлива и в случае $\Phi(x) = \ln x,\ x \in [\varepsilon, 1]$.

2.2 Классические формулы интерполяции и численного дифференцирования на сетке Шишкина

Пусть для функции $u(x)$ справедливо представление:

$$u(x) = q(x) + \Phi(x),\ x \in [0,1], \tag{2.2.1}$$

где

$$|q^{(j)}(x)| \le C_1,\quad |\Phi^{(j)}(x)| \le \frac{C_1}{\varepsilon^j}\, e^{-\alpha x/\varepsilon},\ 0 \le j \le m_0, \tag{2.2.2}$$

где функции $q(x)$ и $\Phi(x)$ в явном виде не заданы, $\alpha > 0, \varepsilon \in (0,1]$, постоянная C_1 не зависит от параметра ε. Представление (2.2.1) представляет собой декомпозицию Шишкина [70] для решения задачи (2.1.2).

В соответствии с [70] зададим на интервале $[0,1]$ кусочно-равномерную сетку:
В соответствии с [70] зададим на интервале $[0,1]$ кусочно-равномерную сетку:

$$\Omega = \{x_k :\ x_k = x_{k-1} + h_k,\quad k = 1,2,\ldots,N,\quad x_0 = 0,\ x_N = 1\} \tag{2.2.3}$$

с шагами:

$$h_k = h = \frac{2\sigma}{N},\ 1 \le k \le \frac{N}{2};\quad h_k = H = \frac{2(1-\sigma)}{N},\ \frac{N}{2} < k \le N,$$

где $\sigma \in (0, 1/2]$. Параметр σ зададим ниже. Предполагаем, что функция $u(x)$ известна в узлах сетки $\Omega,\ u_k = u(x_k)$, $k = 0,1,\ldots,N$.

Будем строить разностные формулы для вычисления производных функции $u(x)$ на подинтервалах с m узлами, покрывающих исходный интервал $[0,1]$. Предполагаем, что N кратно $2(m-1)$, чтобы каждый подинтервал, на котором строится формула для производной, был целиком внутри или вне области пограничного слоя $[0,\sigma]$, $\sigma = x_{N/2}$.

Итак, разбиваем исходный интервал $[0,1]$ на $N/(m-1)$ подинтервалов:

$$[0,1] = \bigcup_{k=0,\, m-1}^{N-m+1} [x_k, x_{k+m-1}].$$

Для построения разностной формулы для производной на интервале $[x_k, x_{k+m-1}]$, осуществляем на этом интервале интерполяцию функции $u(x)$ многочленом Лагранжа:

$$L_{k,m}(u,x) = \sum_{j=k}^{k+m-1} u_j P_{j,k}(x), \;\; u_j = u(x_j),$$

где множитель Лагранжа $P_{j,k}(x)$ имеет вид:

$$P_{j,k}(x) = \prod_{\substack{i=k \\ i\neq j}}^{k+m-1} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}.$$

Для сетки (2.2.3) зададим

$$\sigma = \min\Big\{\frac{1}{2}, \frac{m\varepsilon}{\alpha}\ln N\Big\}. \qquad (2.2.4)$$

Теорема 1 *Пусть для функции $u(x)$ справедливо представление (2.2.1) с ограничениями (2.2.2) при $m_0 = m+n$, где m – число узлов в разностной формуле для производной, n – номер вычисляемой производной. Пусть сетка Ω задана согласно (2.2.3). Тогда для некоторой постоянной C на каждом интервале $[x_k, x_{k+m-1}]$ при $k = 0, m-1, \ldots, N-m+1$ справедлива одна из оценок погрешности:*

$$\varepsilon^n|u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)| \le C\Big(\frac{\ln N}{N}\Big)^{m-n}, \quad n\ge 0,\; \sigma<1/2,\; x_{k+m-1}\le\sigma, \qquad (2.2.5)$$

$$\varepsilon^n\Big|u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)\Big| \le C\Big[\frac{1}{N^m}e^{-\alpha(x_k-\sigma)/\varepsilon} + \frac{\varepsilon^n}{N^{m-n}}\Big], \quad n\ge 0, \sigma<1/2,\; x_k\ge\sigma, \qquad (2.2.6)$$

$$\varepsilon^n|u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)| \le C\Big(\min\Big(\frac{\ln N}{N}, \frac{1}{N\varepsilon}\Big)\Big)^{m-n}, \; n\ge 0,\; \sigma=1/2. \qquad (2.2.7)$$

Доказательство. Для погрешности интерполяции многочленом Лагранжа известно представление [26, с. 89]:

$$u(x) - L_{k,m}(u,x) = w_{k,m}(x)[x, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m-1}]u, \tag{2.2.8}$$

где $[x, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m-1}]u$ - разделенная разность для функции $u(x)$,

$$w_{k,m}(x) = (x - x_k)(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_{k+m-1}).$$

На основе дифференцирования соотношения (2.2.8) в [26, с. 89] получена формула для погрешности приближения n-ой производной на основе многочлена Лагранжа:

$$u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!} w^{(n-j)}_{k,m}(x)[\underbrace{x, \dots, x}_{j+1 \text{ раз}}, x_k, \dots, x_{k+m-1}]u, n \geq 0. \tag{2.2.9}$$

В случае произвольных узлов $y_1, y_2, \dots, y_p$ для некоторого $s \in (\min\{y_j\}, \max\{y_j\})$ справедливо представление [26, с. 40]:

$$[y_1, y_2, \dots, y_p]u = \frac{u^{(p-1)}(s)}{(p-1)!}.$$

Тогда из (2.2.9) при всех $x \in [x_k, x_{k+m-1}]$ получаем

$$|u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)| \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!(m+j)!} \max_{[x_k, x_{k+m-1}]} |u^{(m+j)}(s)|\, |w^{(n-j)}_{k,m}(x)|,$$

$$n \geq 0. \tag{2.2.10}$$

Используем исходное представление функции, получаем

$$|u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)| \leq |q^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(q,x)| + |\Phi^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(\Phi,x)|.$$

Учитывая полученные оценки, для некоторой постоянной C_1 и для произвольного интервала $[x_k, x_{k+m-1}]$ получаем

$$|q^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(q,x)| \leq C_1 \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!(m+j)!} \tau_k^{m+j-n}, \quad n \geq 0, \tag{2.2.11}$$

где τ_k – шаг интервала $[x_k, x_{k+m-1}]$.

Из (2.2.11) следует, что для некоторой постоянной C_2

$$|q^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(q,x)| \leq C_2 \tau_k^{m-n} \leq \frac{C_3}{N^{m-n}},\ x \in [x_k, x_{k+m-1}],\ n \geq 0. \tag{2.2.12}$$

Теперь получим оценку погрешности на сингулярной составляющей $\Phi(x)$.

Рассмотрим случай $\sigma < 1/2$. При этом рассмотрим случаи, когда интервал $[x_k, x_{k+m-1}]$ находится в пограничном слое и вне его.

1). Пусть $x_{k+m-1} \le \sigma$. Тогда интервал $[x_k, x_{k+m-1}]$ находится в погранслое и в соответствии с (2.2.4)

$$\tau_k = \frac{2m\varepsilon}{\alpha N} \ln N. \tag{2.2.13}$$

Учитывая (2.2.10), для некоторой постоянной C_4 получаем

$$|\Phi^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(\Phi, x)| \le C_4 \sum_{j=0}^{n} \frac{\tau_k^{m-n+j}}{\varepsilon^{m+j}}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^n |\Phi^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(\Phi, x)| \le C_4 \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\tau_k}{\varepsilon}\right)^{m-n+j}.$$

Учитывая (2.2.13), для некоторой постоянной C_5 получаем

$$\varepsilon^n |\Phi^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(\Phi, x)| \le C_5 \Big(\frac{\ln N}{N}\Big)^{m-n}, \quad x \in [x_k, x_{k+m-1}], \quad x_{k+m-1} \le \sigma. \tag{2.2.14}$$

Из оценок (2.2.1), (2.2.12), (2.2.14) следует (2.2.5).

2). Пусть $x_k \ge \sigma$. Используем оценку:

$$\varepsilon^n \Big| L^{(n)}_{k,m}(\Phi, x) - \Phi^{(n)}(x) \Big| \le \varepsilon^n |L^{(n)}_{k,m}(\Phi, x)| + \varepsilon^n |\Phi^{(n)}(x)|.$$

В силу условий (2.2.2) и (2.2.4) при $x_k \ge \sigma$

$$\varepsilon^n |\Phi^{(n)}(x)| \le \frac{C_6}{N^m} e^{-\alpha(x_k - \sigma)/\varepsilon}. \tag{2.2.15}$$

Учитывая вид многочлена Лагранжа, для некоторой постоянной C_7 получаем

$$|L^{(n)}_{k,m}(u, x)| = \Big| \sum_{j=k}^{k+m-1} u_j P^{(n)}_{j,k}(x) \Big| \le \max_{k \le j \le k+m-1} |u_j| \frac{C_7}{\tau_k^n}. \tag{2.2.16}$$

Учитывая (2.2.2), из (2.2.16) получаем, что при $x_k \ge \sigma$

$$|L^{(n)}_{k,m}(\Phi, x)| \le \frac{C_7}{N^{m-n}} e^{-\alpha(x_k - \sigma)/\varepsilon}. \tag{2.2.17}$$

Из (2.2.12) (2.2.15), (2.2.17) получаем (2.2.6).

Рассмотрим случай $\sigma = 1/2$, когда сетка является равномерной. Из (2.2.10) имеем

$$\varepsilon^n |u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u, x)| \le C_8 \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{N\varepsilon}\right)^{m-n+j} \le C_9 \Big(\frac{1}{N\varepsilon}\Big)^{m-n}, \ n \ge 0. \tag{2.2.18}$$

Из условия $\sigma = 1/2$ следует, что $\varepsilon \geq \alpha/(2m \ln N)$. Тогда из (2.2.18) получаем

$$\varepsilon^n |u^{(n)}(x) - L_{k,m}^{(n)}(u,x)| \leq C_{10} \Big(\frac{\ln N}{N} \Big)^{m-n}, \; n \geq 0. \qquad (2.2.19)$$

Из (2.2.18), (2.2.19) следует (2.2.7). Теорема доказана.

Заметим, что из оценок (2.2.5)-(2.2.7) следуют оценки относительной погрешности, равномерные по параметру ε. Отметим, что в случае $\sigma < 1/2$ вне области пограничного слоя и оценки абсолютной погрешности равномерны по параметру ε. Полученная оценка погрешности (2.2.7) при $\varepsilon = 1$ соответствует известной оценке погрешности в регулярном случае, когда производные функции являются равномерно ограниченными [26].

Глава 3

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ ФУНКЦИЙ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Пусть $\Omega : \ 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ – разбиение отрезка $[0, 1]$. Обозначим через $S(\Omega, k, 1)$ пространство полиномиальных сплайнов степени k дефекта 1 [50] на сетке Ω. В случае необходимости будем считать разбиение Ω продолженным левее точки 0 с шагом $h_1 = x_1 - x_0$ и правее точки 1 с шагом $h_N = x_N - x_{N-1}$. Под C и C_j будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и числа узлов сетки, при этом один и тот же символ C_j может обозначать разные константы.

3.1 Интерполяция параболическими сплайнами функций с большими градиентами в пограничном слое

3.1.1 Постановка задачи

Будем предполагать, что интерполируемая функция $u(x)$ представима в виде:

$$u(x) = q(x) + \Phi(x), \; x \in [0, 1], \; |q^{(j)}(x)| \le C_1, \; |\Phi^{(j)}(x)| \le \frac{C_1}{\varepsilon^j} \, e^{-\alpha x/\varepsilon}, \; 0 \le j \le 3, \quad (3.1.1)$$

где функции $q(x)$ и $\Phi(x)$ в явном виде не заданы, $\alpha > 0, \varepsilon \in (0,1]$, C_1 не зависит от ε, α отделено от нуля. Согласно (3.1.1), регулярная составляющая $q(x)$ имеет производные, ограниченные до третьего порядка, а погранслойная составляющая $\Phi(x)$ имеет производные, не ограниченные равномерно по ε. Представление (3.1.1) справедливо для решения краевой задачи с экспоненциальным пограничным слоем [70], [8].

Зададим параболический сплайн по Субботину [41] для интерполяции функции (3.1.1).

Пусть Ω – сетка интервала $[0,1]$ с узлами $\{x_n\}$, где $0 \le n \le N,\ h_n = x_n - x_{n-1}$, $1 \le n \le N$. Зададим дополнительную сетку:

$$\bar{\Omega} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_n,\ -1 \le n \le N, \\ \bar{x}_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2},\ 0 \le n \le N-1, \\ \bar{x}_{-1} = x_0 - \frac{h_1}{2}, \\ \bar{x}_N = x_N + \frac{h_N}{2}. \end{array} \right\}$$

Пусть $g_2(x,u) \in S(\bar{\Omega}, 2, 1)$ – интерполяционный параболический сплайн на сетке $\bar{\Omega}$, определяемый из условий:

$$g_2(x_n,u) = u(x_n),\ 0 \le n \le N,\ g_2'(0,u) = u'(0),\ g_2'(1,u) = u'(1). \tag{3.1.2}$$

В соответствии с [70] зададим кусочно-равномерную сетку Ω с шагами:

$$h_n = h = \frac{\sigma}{N/2},\ n = 1, \ldots, \frac{N}{2},\ h_n = H = \frac{1-\sigma}{N/2},\ n = \frac{N}{2}+1, \ldots, N,$$

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{3\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\}. \tag{3.1.3}$$

Сетка вида (3.1.3) применяется для обеспечения ε-равномерной сходимости разностных схем для сингулярно-возмущенных краевых задач [70, 10]. В данной работе проведем анализ погрешности при применении квадратичного сплайна (3.1.2) на сетке (3.1.3), предполагая, что интерполируемая функция имеет область больших градиентов в соответствии с представлением (3.1.1). Параметр σ в (3.1.3) выбран так, что в области больших градиентов шаг сетки порядка $O(\varepsilon \ln(N)/N)$, а вне погранслойной области шаг порядка $O(1/N)$ и $|\Phi(x)| \le CN^{-3}$, что соответствует погрешности параболического сплайна в регулярном случае, когда интерполируемая функция имеет ограниченные производные.

В (3.1.3) и ниже считаем что $N = 2N_0 \ge 6$.

Итак, пусть функция $u(x)$, имеющая представление (3.1.1), задана в узлах сетки Ω, $u_n = u(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Исследуем погрешность интерполяции этой функции параболическим сплайном $g_2(x, u)$ на сетке (3.1.3).

3.1.2 Формулировка основных результатов

В соответствии с [66, с. 56] для интерполяционного параболического сплайна $g_2(x, u)$ справедлива оценка погрешности:

$$|g_2(x, u) - u(x)| \leq C\|u^{(3)}\|_{C[0,1]} \max_n h_n^3, \; x \in [0, 1]. \tag{3.1.4}$$

Из (3.1.4) следует, что если производная $u^{(3)}(x)$ является ограниченной, то сплайн $g_2(x, u)$ обладает третьим порядком точности по шагу сетки. Однако в силу (3.1.1), производная $u^{(3)}(x)$ неограниченно растет у границы $x = 0$ с уменьшением ε и в этом случае оценка (3.1.4) не является равномерной по малому параметру.

Остановимся на случае, когда в (3.1.3) будет $\sigma = 1/2$. В силу (3.1.4) и того, что в этом случае $\max_n h_n = 1/N$, $\|u^{(3)}\|_{C[0,1]} \leq C\varepsilon^{-3} \leq C_1 \ln^3 N$, имеет место оценка, равномерная по ε:

$$\|u(x) - g_2(x, u)\|_{C[0,1]} \leq CN^{-3} \ln^3 N. \tag{3.1.5}$$

Ниже будем предполагать, что $\sigma < 1/2$. Для упрощения выкладок будем считать, что в (3.1.1), (3.1.3) $\alpha = 1$, так как значение параметра α не влияет на обоснование приводимых ниже оценок. Заметим, что $g_2(x, u) = g_2(x, q) + g_2(x, \Phi)$, а в силу (3.1.1) и (3.1.4)

$$\|q(x) - g_2(x, q)\|_{C[0,1]} \leq C_1 \max_n h_n^3 \leq C_2 N^{-3}. \tag{3.1.6}$$

Поэтому для того, чтобы сплайн имел погрешность порядка $O(N^{-3} \ln^3 N)$, необходимо и достаточно обеспечить оценку

$$\|\Phi(x) - g_2(x, \Phi)\|_{C[0,1]} \leq CN^{-3} \ln^3 N. \tag{3.1.7}$$

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1 *Найдутся такие константы C, C_3, что при $N^{-1} \leq C_3\varepsilon$ будет справедлива оценка (3.1.5).*

Теорема 2 *Найдутся такие константы C_4, C_5 и $\beta > 0$, не зависящие от ε, N, что при $\varepsilon \le C_4 N^{-1}$ будут справедливы оценки*

$$\|g_2(x,\Phi) - \Phi(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \le C_5 \begin{cases} N^{-3}\ln^3 N, \ 0 \le n \le N/2-1, \\ \frac{1}{N^4\varepsilon} e^{-\beta(n-N/2)}, \ N/2 \le n \le N-1. \end{cases} \tag{3.1.8}$$

Следующая теорема показывает, что вторая оценка в (3.1.8) является неулучшаемой.

Теорема 3 *Пусть $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Тогда найдутся такие $C_6, C_7, \beta_1 > 0$, не зависящие от ε, N, что при $\varepsilon \le C_6 N^{-1}$ будут справедливы оценки снизу*

$$\|g_2(x,\Phi) - \Phi(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \ge \frac{C_7}{N^4\varepsilon} e^{-\beta_1(n-N/2)}, \ \frac{N}{2} \le n \le N-1. \tag{3.1.9}$$

3.1.3 Вспомогательные результаты

Введем обозначения. Пусть при $-1 \le n \le N-1$

$$M_{n,1}(x) = \sigma_n \begin{cases} \frac{x-x_n}{x_{n+1}-x_n}, x \in [x_n, x_{n+1}], \\ \frac{x_{n+2}-x}{x_{n+2}-x_{n+1}}, x \in [x_{n+1}, x_{n+2}], \\ 0, x \notin [x_n, x_{n+2}) \end{cases} \quad \sigma_n = \begin{cases} \frac{4}{3h}, \ -1 \le n \le N/2-2, \\ \frac{8}{3(h+H)}, \ n = N/2-1, \\ \frac{4}{3H}, \ N/2 \le n \le N-1 \end{cases}. \tag{3.1.10}$$

Здесь $M_{n,1}(x)$ соответствующим образом нормированный B-сплайн первой степени на сетке Ω,

$$N_{n,0}(x) = \begin{cases} 1, x \in [\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}), \\ 0, x \notin [\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) \end{cases} \tag{3.1.11}$$

– нормализованный B-сплайн нулевой степени на сетке $\bar{\Omega}$.

Далее для краткости будем использовать обозначение $g_2(x) = g_2(x,\Phi)$. Изучим функцию $g_2''(x)$. Обозначим через P ортогональный в $L_2[0,1]$ проектор на $S(\Omega,1,1)$.

Лемма 1 *Справедлива формула $Pg_2''(x) = P\Phi''(x)$.*

Доказательство. Для произвольной функции $s(x) \in S(\Omega,1,1)$ с учетом граничных условий и условий интерполяции (3.1.2) имеем

$$(g_2'' - \Phi'', s) = (g_2'(x) - \Phi'(x))s(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (g_2'(x) - \Phi'(x))s'(x)dx =$$

$$-\sum_{i=0}^{N-1}(g_2(x)-\Phi(x))\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} s'(x_i)=0.$$

Лемма доказана.

Представим функцию $g_2''(x)$ в виде

$$g_2''(x)=\sum_{k=-1}^{N-1}\alpha_k N_{k,0}(x). \qquad (3.1.12)$$

Из условия ортогональности разности $g_2''(x,\Phi)-\Phi''(x)$ пространству $S(\Omega,1,1)$ получаем СЛАУ для коэффициентов

$$\sum_{k=-1}^{N-1}\alpha_k(N_{k,0},M_{n,1})=(\Phi'',M_{n,1}),\ -1\le n\le N-1, \qquad (3.1.13)$$

или в матричном виде

$$\Gamma\alpha=F, \qquad (3.1.14)$$

где $\Gamma=\{\gamma_{nk}\}=\{(N_{k,0},M_{n,1})\}$, $F=(F_{-1},F_0,\cdots,F_{N-1})^T$, $F_j=(\Phi'',M_{j,1})$.

Лемма 2 *Матрица* Γ *имеет вид:*

$$\Gamma=tridiag\{a_n,c_n,b_n\},\ -1\le n\le N-1,\ a_{-1}=b_{N-1}=0,\ c_{-1}=c_{N-1}=\frac{1}{2}, \qquad (3.1.15)$$

$$c_n=1,\ \ 0\le n\le N-2, a_n=b_n=\frac{1}{6},\ -1\le n\le N-2,\ n\ne N/2-1, \qquad (3.1.16)$$

$$b_{N/2-1}=\frac{H}{3(h+H)},\ a_{N/2-1}=\frac{h}{3(h+H)}. \qquad (3.1.17)$$

Доказательство получается прямым вычислением интегралов в (3.1.14) с учетом (3.1.10), (3.1.11).

Обозначим через $cond_2(\Gamma)$ спектральное число обусловленности матрицы Γ.

Следствие 1 *Матрица* Γ *имеет вид:*

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{pmatrix}, \qquad (3.1.18)$$

где Γ, Γ_{11}, Γ_{22} *- трехдиагональные квадратные матрицы со строгим диагональным преобладанием порядка* $(N+1)\times(N+1),(N/2)\times(N/2)$ *и* $(N/2+1)\times(N/2+1)$ *соответственно, причем* $cond_2(\Gamma)=O(1)$, $cond_2(\Gamma_{ii})=O(1), i=1,2,$ *матрица* Γ_{21} *- прямоугольная матрица с единственным ненулевым элементом порядка* $O(h/H)$ *в правом верхнем углу, матрица* Γ_{12} *- прямоугольная матрица с единственным ненулевым элементом* $1/6$ *в левом нижнем углу.*

Данное следствие справедливо, так как в силу (3.1.15)-(3.1.17) все три матрицы Γ, Γ_{11}, Γ_{22} имеют строгое диагональное преобладание по строкам с положительным и не зависящим от ε, N показателем преобладания.

Лемма 3 *Матрицы* Γ_{11}, Γ_{22} *обратимы, и для элементов обратных матриц* $\hat{\gamma}^{ii}_{nk}, i = 1, 2$, *справедливы оценки*

$$|\hat{\gamma}^{ii}_{nk}| \leq Ce^{-\beta|n-k|}, \tag{3.1.19}$$

а для элементов $\hat{\gamma}^{22}_{nk}$ *справедливы и оценки снизу*

$$|\hat{\gamma}^{22}_{nk}| \geq C_1 e^{-\beta_1|n-k|}, \tag{3.1.20}$$

а также оценки

$$|\hat{\gamma}^{22}_{nk}| \geq |\hat{\gamma}^{22}_{np}|\, e^{-\beta_2|k-p|}, \quad N/2-1 \leq n \leq N-1, \ N/2-1 \leq k \leq p \leq N-1, \tag{3.1.21}$$

где $C, C_1, \beta, \beta_1, \beta_2$ *не зависят от* N, ε.

Доказательство. Обратимость матриц Γ_{11}, Γ_{22} и оценки (3.1.19) вытекают из строгого диагонального преобладания и теоремы Демко [5]. Докажем оценки (3.1.20). Введем матрицу

$$M = \{m_{nk}, \ N/2-1 \leq n, k \leq N-1\} = \mathrm{tridiag}\Big\{\frac{1}{6}, 1, \frac{1}{6}\Big\}.$$

Так как $h \leq H$, то из (3.1.15)-(3.1.17) следует, что $\gamma^{22}_{nn} \leq m_{nn}$, $\gamma^{22}_{nk} \geq m_{nk}, n \neq k$.

Тогда для M-матриц [45, с. 269] $M^+ = \{m^+_{nk}\}$ и $\Gamma^+_{22} = \{(\gamma^{22}_{nk})^+\}$, получающихся из M и Γ_{22} заменой знаков всех внедиагональных элементов на противоположные, согласно [45, с. 270], будем иметь

$$\Big(\Gamma^+_{22}\Big)^{-1} \geq \Big(M^+\Big)^{-1} \geq \mathbf{0}, \tag{3.1.22}$$

где неравенство между матрицами подразумевается поэлементным.

Непосредственным перемножением исходных и обратных матриц легко убедиться, что для элементов $\Gamma^{-1}_{22} = \{\hat{\gamma}^{22}_{nk}\}$ и $M^{-1} = \{\hat{m}_{nk}\}$ справедливы равенства

$$\hat{\gamma}^{22}_{nk} = (-1)^{n+k}\Big(\hat{\gamma}^{22}_{nk}\Big)^+, \ \hat{m}_{nk} = (-1)^{n+k}\Big(\hat{m}_{nk}\Big)^+. \tag{3.1.23}$$

Поэтому приходим к выводу, что

$$|\hat{\gamma}^{22}_{nk}| \geq |\hat{m}_{nk}|. \tag{3.1.24}$$

Заметим, что из тех же соображений, рассматривая пару матриц M^+ и I, где I – единичная матрица, получаем

$$\hat{m}_{kk} \geq 1. \tag{3.1.25}$$

С учетом (3.1.24), для доказательства (3.1.20) достаточно доказать оценку

$$|\hat{m}_{nk}| \geq C_1 e^{-\beta_1 |n-k|}. \tag{3.1.26}$$

Рассмотрим $\{\hat{m}_{nk}\}$ как решение краевой задачи для трехточечного разностного уравнения

$$\hat{m}_{n-1k} + 6\hat{m}_{nk} + \hat{m}_{n+1k} = 0, N/2 - 1 \leq n \leq k - 1$$

с заданными граничными значениями $\hat{m}_{N/2-2,k} = 0$ и $\hat{m}_{kk}$, где $1 \leq \hat{m}_{kk} \leq C$. Согласно [65, с.55] находим

$$\hat{m}_{nk} = \left[\lambda_1^{n-N/2+2} - \lambda_2^{n-N/2+2}\right] \Big/ \left[\lambda_1^{k-N/2+1} - \lambda_2^{k-N/2+1}\right] \hat{m}_{kk},\ N/2 - 1 \leq n \leq k - 1,$$

где $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{8}$. Отсюда следует оценка (3.1.26) для $N/2 - 1 \leq n \leq k - 1$.

Доказательство для $k+1 \leq n \leq N-1$ аналогично, а при $n = k$ оценка (3.1.26) вытекает из (3.1.25). Итак, оценка (3.1.20) доказана.

Докажем (3.1.21). Для элементов Γ^{-1} при фиксированном $n \in [N/2-1, N-1]$ справедливы формулы $\hat{\gamma}^{22}_{nk-1}\gamma^{22}_{k-1k} + \hat{\gamma}^{22}_{nk} + \hat{\gamma}^{22}_{nk+1}\gamma^{22}_{k+1k} = 0, \quad k \neq n$. Из (3.1.22), (3.1.23) получаем, что $sign(\hat{\gamma}^{22}_{nk-1}) = sign(\hat{\gamma}^{22}_{nk+1})$. Отсюда, с учетом положительности γ^{22}_{kk} и (3.1.15)-(3.1.17) получаем, что для $k \neq n$

$$|\hat{\gamma}^{22}_{nk}| \geq |\hat{\gamma}^{22}_{nk+1}\gamma^{22}_{k+1k}| \geq \frac{1}{6}|\hat{\gamma}^{22}_{nk+1}|,$$

и оценка (3.1.21) получается рекуррентно для $k \neq n$ при $\beta_2 = \ln 6$.

Для $k = n$ она вытекает из (3.1.19) и неравенства $\hat{\gamma}^{22}_{kk} \geq 1$, которое следует из (3.1.22)-(3.1.25) Лемма доказана.

Лемма 4 *Для элементов F_n при любых $\varepsilon \in (0, 1], N$ справедливы оценки*

$$F_n = \begin{cases} O(\varepsilon^{-2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon}),\ -1 \leq n \leq N/2 - 2, \\ O(\varepsilon^{-2} e^{-x_n/\varepsilon}),\ N/2 - 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases}, \tag{3.1.27}$$

а при $\varepsilon \leq CN^{-1}$ также справедливы оценки

$$F_n = \begin{cases} O(H^{-1}\varepsilon^{-1} e^{-x_{N/2}/\varepsilon}), \quad n = N/2 - 1, \\ O(H^{-2} e^{-x_n/\varepsilon}), \quad N/2 \leq n \leq N - 1 \end{cases}. \tag{3.1.28}$$

В случае, если $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$, справедливы и аналогичные оценки снизу, т.е. с заменой в (3.1.27)-(3.1.28) O на O^*.

Доказательство. Для оценки F_n, задаваемом в (3.1.14), используем прямое вычисление интегралов. Докажем вторую оценку в (3.1.28), остальные оценки получаются аналогично. При $n \geq N/2$ в силу (3.1.10), (3.1.11), (3.1.1) имеем:

$$|F_n| = |(\Phi'', M_{n,1})| \leq \int_{x_n}^{x_{n+2}} |M_{n,1}(x)| \cdot |\Phi''(x)|\, dx \leq C \int_{x_n}^{x_{n+2}} \frac{8}{3(h+H)} \frac{x - x_n}{H} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\, dx$$

$$\leq CH^{-2} e^{-\frac{x_n}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_n}^{x_{n+2}} \frac{x - x_n}{\varepsilon} e^{-\frac{x - x_n}{\varepsilon}}\, dx \leq C_1 H^{-2} e^{-\frac{x_n}{\varepsilon}},$$

что и требовалось доказать. Если $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$, то все интегралы вычисляются точно и оценки будут двусторонними. Лемма доказана.

Лемма 5 *Для матрицы Γ^{-1} справедливо представление*

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{11} & \tilde{\Gamma}_{12} \\ \tilde{\Gamma}_{21} & \tilde{\Gamma}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.1.29}$$

где элементы $\tilde{\gamma}_{nk}^{ij}$ матриц $\tilde{\Gamma}_{ij}$ при некотором $\beta > 0$, не зависящем от ε, N, удовлетворяют оценкам:

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}_{nk}^{11}| &\leq Ce^{-\beta|n-k|},\ -1 \leq n, k \leq N/2 - 2; \\ |\tilde{\gamma}_{nk}^{22}| &\leq Ce^{-\beta|n-k|},\ N/2 - 1 \leq n, k \leq N - 1, \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

$$|\tilde{\gamma}_{nk}^{12}| \leq Ce^{-\beta|n-k|},\ -1 \leq n \leq N/2 - 2,\ N/2 - 1 \leq k \leq N - 1, \tag{3.1.31}$$

$$|\tilde{\gamma}_{nk}^{21}| \leq C(h/H)e^{-\beta|n-k|},\ -1 \leq k \leq N/2 - 2,\ N/2 - 1 \leq n \leq N - 1. \tag{3.1.32}$$

Доказательство. Применяя блочный метод Гаусса, находим

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{-1} + \Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}\tilde{\Gamma}^{-1}\Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1} & \Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}\tilde{\Gamma}^{-1} \\ \tilde{\Gamma}^{-1}\Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1} & \tilde{\Gamma}^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.1.33}$$

где $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{22} - \Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}$. Обратимость всех блоков и равномерная по ε, N ограниченность всех обратных матриц вытекает из следствия 1 Более того, из теоремы Демко [5] вытекает, что элементы матрицы Γ_{11}^{-1} удовлетворяют оценкам (3.1.30), а, значит, в силу вида матриц Γ_{12}, Γ_{21}, таким же оценкам удовлетворяют и элементы матрицы $\tilde{\Gamma}$. Но для матриц, имеющих обратную, ограниченную в спектральной норме константой, не зависящей от порядка матрицы и параметров, определяющих ее элементы, в [28] было доказано, что и элементы обратной матрицы $\tilde{\Gamma}^{-1}$ удовлетворяют таким же оценкам, возможно, с другой константой $\beta_1 \in (0, 1)$, также не зависящей от N, ε. Там же было доказано, что элементы произведения двух матриц, удовлетворяющих оценкам вида (3.1.30), удовлетворяют таким же оценкам, возможно, с другой константой $\beta_1 \in (0,1)$. Отсюда вытекают оценки (3.1.30).

Докажем оценки (3.1.31). Пусть

$$\tilde{\Gamma}^{-1} = \{\tilde{\gamma}_{nk},\ N/2-1 \le n, k \le N-1\},$$
$$\Gamma_{12} = \{\gamma_{nk},\ 1 \le n \le N/2-2, N/2-1 \le k \le N-1\},$$
$$\Gamma_{11}^{-1} = \{\tilde{\gamma}_{nk}^{11},\ 1 \le n, k \le N/2-2\}.$$

Поскольку у матрицы Γ_{12} отличен от нуля единственный элемент $\gamma_{N/2-2,N/2-1}$, то, перемножая матрицы, находим для элементов матрицы $\tilde{\Gamma}_{12}$ (см. (3.1.29)):

$$\tilde{\gamma}_{nk}^{12} = \tilde{\gamma}_{n,N/2-2}^{11}\gamma_{N/2-2,N/2-1}\tilde{\gamma}_{N/2-2,k}.$$

Отсюда, учитывая оценки (3.1.30) для первого и третьего сомножителей и формулу (3.1.16) для второго сомножителя, получаем

$$|\tilde{\gamma}_{nk}^{12}| \le Ce^{-\beta((N/2-2)-n)}e^{-\beta(k-(N/2-2))} = Ce^{-\beta(k-n)} = Ce^{-\beta|k-n|}.$$

Оценки (3.1.31) доказаны.

Доказательство оценок (3.1.32) проводится аналогично. Лемма доказана.

Лемма 6 *Для коэффициентов α_n в представлении (3.1.12) при $\varepsilon \le CN^{-1}$ справедливы оценки*

$$\alpha_n = \begin{cases} O\big(\varepsilon^{-2}e^{-\frac{x_{n+1}}{\varepsilon}}\big),\ -1 \le n \le N/2-2, \\ O\Bigg(H^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\,e^{-\beta(n-N/2)}\Bigg),\ N/2-1 \le n \le N-1 \end{cases}, \tag{3.1.34}$$

а при $N^{-1} \le C\varepsilon$ справедливы оценки

$$\alpha_n = O\Bigg(\varepsilon^{-2}e^{-\frac{x_{n+1}}{\varepsilon}}\Bigg),\ -1 \le n \le N-1. \tag{3.1.35}$$

В случае, если $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$, найдется такая константа C, не зависящая от ε, N, что при $\varepsilon \le CN^{-1}$ для $n \ge N/2-1$ в (3.1.34) справедливы и аналогичные оценки снизу, т.е. с заменой O на O^*.

Доказательство. Из (3.1.14) имеем $\alpha = \Gamma^{-1}F$. Пусть $\alpha = (\alpha^{(1)},\, \alpha^{(2)})^T$, где $dim(\alpha^{(1)}) = N/2$. Аналогичным образом представим F. Тогда $\alpha^{(1)} = \tilde{\Gamma}_{11}F^{(1)} + \tilde{\Gamma}_{12}F^{(2)}$. Для любого $n = -1,\,\ldots,\,N/2-2$ имеем

$$\alpha_n^{(1)} = \alpha_n = \sum_{k=-1}^{N/2-2}\tilde{\gamma}_{nk}^{11}F_k + \sum_{k=N/2-1}^{N-1}\tilde{\gamma}_{nk}^{12}F_k. \tag{3.1.36}$$

Далее в силу (3.1.27), (3.1.30), (3.1.31) имеем при достаточно больших N

$$\Big|\sum_{k=-1}^{N/2-2}\tilde{\gamma}_{nk}^{11}F_k\Big|\le\frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{k=-1}^{N/2-2}e^{-\beta|n-k|}e^{-x_{k+1}/\varepsilon}=\frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{k=-1}^{N/2-2}e^{-\beta|n-k|}\,e^{-\frac{h(k+1)}{\varepsilon}}=$$

$$=\frac{C}{\varepsilon^2}e^{-\frac{h(n+1)}{\varepsilon}}\sum_{k=-1}^{N/2-2}e^{-\beta|n-k|}\,e^{-\frac{h(k-n)}{\varepsilon}}=C\varepsilon^{-2}e^{-\frac{h(n+1)}{\varepsilon}}\sum_{k=-1}^{N/2-2}e^{-\beta|n-k|}\,e^{-\frac{8\ln N(k-n)}{N}}\le$$

$$\le C\varepsilon^{-2}e^{-\frac{x_{n+1}}{\varepsilon}}\sum_{k=-1}^{N/2-2}e^{-\frac{\beta}{2}|n-k|}\le C\varepsilon^{-2}e^{-\frac{x_{n+1}}{\varepsilon}},\tag{3.1.37}$$

$$\Big|\sum_{k=N/2-1}^{N-1}\tilde{\gamma}_{nk}^{12}F_k\Big|\le C\sum_{k=N/2-1}^{N-1}e^{-\beta|n-k|}\varepsilon^{-2}e^{-\frac{x_k}{\varepsilon}}\le$$

$$\le C\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{x_{N/2-1}}{\varepsilon}}\sum_{k=N/2-1}^{N-1}e^{-\beta|n-k|}\le C_1\varepsilon^{-2}e^{-\frac{x_{N/2-1}}{\varepsilon}}\le C_1\varepsilon^{-2}e^{-\frac{x_{n+1}}{\varepsilon}}.$$

Таким образом, оценка (3.1.34) при $-1\le n\le N/2-2$ доказана.

Докажем (3.1.34) для $n\ge N/2-1$. Имеем

$$\alpha_n^{(2)}=\alpha_n=\sum_{k=-1}^{N/2-2}\tilde{\gamma}_{nk}^{21}F_k+\sum_{k=N/2-1}^{N-1}\tilde{\gamma}_{nk}^{22}F_k.\tag{3.1.38}$$

Далее аналогично (3.1.37), применяя (3.1.32) для $\tilde{\gamma}_{nk}^{21}$ и (3.1.27), (3.1.28) для F_k, находим

$$\left|\sum_{k=-1}^{N/2-2}\tilde{\gamma}_{nk}^{21}F_k\right|\le C\frac{h}{H}\sum_{k=-1}^{N/2-2}e^{-\beta(n-k)}\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{x_{k+1}}{\varepsilon}}=$$

$$=C\frac{h}{H}e^{-\beta(n-\frac{N}{2})}\sum_{k=-1}^{N/2-2}e^{-\beta(\frac{N}{2}-k)}\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{x_{k+1}}{\varepsilon}}\le C_1\frac{h}{H}e^{-\beta(n-\frac{N}{2})}\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{x_{N/2-1}}{\varepsilon}}\le$$

$$\le C_1H^{-1}\varepsilon\frac{\ln N}{N}\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{x_{N/2-1}}{\varepsilon}}e^{-\beta(n-\frac{N}{2})}\le\frac{C_2}{H\varepsilon}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}e^{-\beta(n-\frac{N}{2})}.\tag{3.1.39}$$

Оценим второе слагаемое в (3.1.38). Применяем оценки (3.1.30) для $\tilde{\gamma}_{nk}^{22}$ и (3.1.28) для F_k, с учетом того, что по условию леммы $\varepsilon\le CH$:

$$\left|\sum_{k=N/2-1}^{N-1}\tilde{\gamma}_{nk}^{22}F_k\right|\le C\varepsilon^{-1}H^{-1}\sum_{k=N/2-1}^{N-1}e^{-\beta|n-k|}e^{-x_k/\varepsilon}=$$

$$=\frac{C}{\varepsilon H}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\sum_{k=N/2-1}^{N-1}e^{-\beta|n-k|}\,e^{-\frac{x_k-x_{N/2}}{\varepsilon}}\le\frac{C}{\varepsilon H}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\,e^{\frac{h}{\varepsilon}}\sum_{k=N/2}^{N}e^{-\beta|n-k|}\,e^{-(k-\frac{N}{2})\frac{H}{\varepsilon}}\le$$

$$\leq \frac{C_1}{\varepsilon H} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \sum_{k=N/2}^{N} e^{-\beta|n-k|} e^{-\beta(k-\frac{N}{2})} \leq \frac{C_1}{\varepsilon H} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \Big(\sum_{k=N/2}^{n} e^{-\beta(n-\frac{N}{2})} +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{N} e^{-\beta(2k-n-\frac{N}{2})} \Big) \leq \frac{C_2}{\varepsilon H} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \big(e^{-\frac{\beta}{2}(n-\frac{N}{2})} + e^{-\beta(n-\frac{N}{2})} \big) \leq \frac{C_3}{\varepsilon H} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \, e^{-\frac{\beta}{2}(n-\frac{N}{2})},$$

и переобозначая $\frac{\beta}{2}$ через β, с учетом (3.1.38), (3.1.39) получаем (3.1.34) для $n \geq N/2 - 1$.

Тем самым оценки (3.1.34) доказаны полностью. Оценки (3.1.35) доказываются совершенно аналогично с использованием (3.1.27) вместо (3.1.28) при проведении последней оценки.

Докажем оценки снизу в (3.1.34) для $n \geq N/2 - 1$ в случае, если $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$. Обозначим $(\alpha_{N/2-1}, \cdots, \alpha_{N-1})^T = \tilde{\alpha}$. Тогда вектор $\tilde{\alpha}$ есть решение СЛАУ $\Gamma_{22}\tilde{\alpha} = \tilde{F}$, где элементы вектора $\tilde{F} = \{\tilde{F}_n,\ N/2 - 1 \leq n \leq N - 1\}$ имеют вид:
$\tilde{F}_{N/2-1} = F_{N/2-1} - \alpha_{N/2-2} a_{N/2-1};\ \tilde{F}_n = F_n,\ n \geq N/2.$

В силу (3.1.28) для $F_{N/2-1}$, (3.1.17) для $a_{N/2-1}$ и (3.1.35) для $\alpha_{N/2-2}$ имеем:

$$|\tilde{F}_{N/2-1}| \geq C\varepsilon^{-1} H^{-1} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} - C_1 h H^{-1} \varepsilon^{-2} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} = H^{-1}\varepsilon^{-1} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} (C - C_1 h \varepsilon^{-1}) \geq$$

$$\geq H^{-1}\varepsilon^{-1} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \Big(C - C_2 \frac{\ln N}{N} \Big) \geq C_3 H^{-1} \varepsilon^{-1} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}},$$

т.е. элементы вектора $\tilde{F}$ удовлетворяют оценкам, аналогичным (3.1.28):

$$\tilde{F}_n = \begin{cases} O^*(H^{-1}\varepsilon^{-1} e^{-x_{N/2}/\varepsilon}), & n = N/2 - 1, \\ O^*(H^{-2} e^{-x_n/\varepsilon}), & N/2 \leq n \leq N - 1. \end{cases} . \tag{3.1.40}$$

Оценим $|\alpha_n|$ для $n = N/2 - 1, \cdots, N - 1$, опираясь на (3.1.40). Имеем

$$|\alpha_n| = \left| \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \hat{\gamma}^{22}_{nk} \tilde{F}_k \right| \geq |\hat{\gamma}^{22}_{n,N/2-1} \tilde{F}_{N/2-1}| - \sum_{k=N/2}^{N-1} |\hat{\gamma}^{22}_{nk}| \, |\tilde{F}_k|. \tag{3.1.41}$$

Найдется постоянная C_1, такая, что при $\varepsilon \leq C_1 N^{-1}$ будет справедливо неравенство $\frac{H}{\varepsilon} \geq 2\beta_2$, где β_2 соответствует (3.1.21). Применяя (3.1.21), (3.1.40), получаем

$$\sum_{k=N/2}^{N-1} |\hat{\gamma}^{22}_{nk}| \, |\tilde{F}_k| \leq C \sum_{k=N/2}^{N-1} |\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}| e^{\beta_2|k-N/2|} \cdot H^{-2} e^{-\frac{x_k}{\varepsilon}} = C H^{-2} |\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}| e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \times$$

$$\times \sum_{k=N/2}^{N-1} e^{\beta_2|k-N/2|} e^{-\frac{x_k - x_{N/2}}{\varepsilon}} = C H^{-2} |\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}| e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \sum_{k=N/2}^{N-1} e^{\beta_2|k-N/2|} e^{-\frac{H}{\varepsilon}|k-N/2|} \leq$$

$$\le CH^{-2}|\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}|e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \sum_{k=N/2}^{N-1} e^{-\beta_2|k-N/2|} \le C_1 H^{-2} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} |\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}|. \tag{3.1.42}$$

Наконец, с учетом (3.1.40) получаем

$$|\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}|\,|\tilde{F}_{N/2-1}| \ge CH^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\,|\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}|. \tag{3.1.43}$$

Из (3.1.41)-(3.1.43), (3.1.20) при достаточно малых ε/H получаем

$$|\alpha_n| \ge C_2 H^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\,|\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}| \ge C_3 H^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\,e^{-\beta_1(n-N/2)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7 *Найдутся такие константы $C, \beta > 0$, не зависящие от ε, N, что для функции $g_2''(x)$ при $N^{-1} \le C\varepsilon$ будет справедливо соотношение*

$$g_2''(x_n) = O\left(\frac{C}{\varepsilon^2}e^{-x_n/\varepsilon}\right),\ 0 \le n \le N, \tag{3.1.44}$$

а при $\varepsilon \le CN^{-1}$ выполнится

$$g_2''(x_n) = O\left(\frac{C}{\varepsilon^2}e^{-x_n/\varepsilon}\right),\ 0 \le n \le \frac{N}{2} - 1, \tag{3.1.45}$$

$$g_2''(x_n) = O\left(\frac{1}{\varepsilon H}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}e^{-\beta|n-\frac{N}{2}|}\right),\ \frac{N}{2} \le n \le N. \tag{3.1.46}$$

В случае $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ найдется такая константа $C > 0$, не зависящая от ε, N, что при $\varepsilon \le CN^{-1}$ для $n \ge N/2-1$ в (3.1.45), (3.1.46) справедливы и аналогичные оценки снизу, т.е. с заменой O на O^*.

Доказательство. Поскольку в каждом узле x_n отличен от нуля только один B-сплайн $N_{n-1,0}$, то справедливо равенство $g_2''(x_n) = \alpha_{n-1}N_{n-1,0}(x_n)$. Отсюда, из леммы 6 и формулы (3.1.11) следует утверждение леммы.

Наконец, установим результат о точности приближения функции $\Phi''(x)$ функцией $g_2''(x, \Phi)$.

Лемма 8 *Справедлива оценка*

$$\|g_2''(x,\Phi) - \Phi''(x)\|_{L_\infty[0,1]} \le \frac{C}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\ln N}{N}. \tag{3.1.47}$$

Доказательство. Обозначим через $Q : L_2[0,1] \to S(\bar{\Omega},0,1)$ линейный оператор, ставящий в соответствие каждой функции $\Phi''(x) \in L_2[0,1]$ функцию $g_2''(x,\Phi)$ вида (3.1.12), где коэффициенты α_n находятся из системы (3.1.13). Очевидно, что $QQ = Q$, т.е. Q – проектор. Поскольку матрица системы (3.1.13) имеет строгое диагональное преобладание по строкам с положительным показателем преобладания, не зависящим от ε, N, то в соответствии с [41, с. 43] получаем, что $\|Q\|_{L_\infty[0,1]\to L_\infty[0,1]} \leq C_1$. Пусть $P(x) \in S(\bar{\Omega},0,1)$ — сплайн нулевой степени, интерполирующий $\Phi''(x)$ в узлах сетки Ω. Из оценки (3.1.1) и оценки погрешности интерполяции кусочно-постоянной функцией получаем, что

$$\|g_2''(x,\Phi) - \Phi''(x)\|_{L_\infty[0,1]} \leq \big(1 + \|Q\|_{L_\infty[0,1]\to L_\infty[0,1]}\big)\|P(x) - \Phi''(x)\|_{L_\infty[0,1]} \leq$$

$$\leq (1 + C_1)\frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\ln N}{N},$$

что доказывает лемму.

3.1.4 Доказательство теорем

Доказательство теорем 1 и 2.

Вначале докажем оценки (3.1.8) для $n \leq \frac{N}{2} - 1$. Используем обозначения $e(x) = g_2(x,\Phi) - \Phi(x)$, $g_2(x) = g_2(x,\Phi)$. Зафиксируем $n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$. Тогда, поскольку

$$e(x_n) = e(x_{n+1}) = 0, \tag{3.1.48}$$

то, рассматривая $e(x)$ как решение краевой задачи $e''(x) = e''(x)$ с условиями (3.1.48) на интервале $[x_n, x_{n+1}]$, получаем, что

$$e(x) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} G(x,s)e''(s)ds, \tag{3.1.49}$$

где

$$G(x,s) = \frac{1}{x_{n+1} - x_n}\begin{cases} (x - x_n)(x_{n+1} - s), \ x_n \leq x \leq s, \\ (s - x_n)(x_{n+1} - x), \ s < x \leq x_{n+1} \end{cases} \tag{3.1.50}$$

– функция Грина. Так как $|G(x,s)| \leq x_{n+1} - x_n = h$, то из (3.1.49) получаем

$$|e(x)| \leq h\int_{x_n}^{x_{n+1}} |e''(s)|ds \leq h^2 \parallel e''(s) \parallel_{C[0,1]}, \tag{3.1.51}$$

Но, поскольку $h = O(\varepsilon \ln(N)/N)$, из (3.1.51), (3.1.47) получаем оценку (3.1.8) и утверждение теоремы 1 для $n \leq \frac{N}{2} - 1$.

Замечание 1 *Оценки (3.1.8) при* $n = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1$ *доказаны при любых соотношениях между* ε *и* N.

Докажем теорему 1 и оценки (3.1.8) при $n \geq N/2$.

Пусть $N^{-1} \leq C\varepsilon$. В силу (3.1.49) и леммы 7 имеем

$$\|e(x)\_C[x_n, x_{n+1}] = \Big\| \int_{x_n}^{x_{n+1}} G(x,s) e''(s)\, ds \Big\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq \frac{C}{N} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |e''(s)|\, ds \leq$$

$$\leq \frac{C}{N^2} \|e''(s)\|_{L_\infty[x_n, x_{n+1}]} \leq \frac{C_1}{N^2} \|\Phi''(s)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq \frac{C_1}{N^2} \|\Phi''(s)\|_{C[x_{N/2}, x_{N/2+1}]} \leq$$

$$\leq \frac{C_1}{N^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 N^3} \leq \frac{C_2}{N^3}.$$

Отсюда, с учетом замечания 1, следует утверждение теоремы 1.

Пусть теперь $\varepsilon \leq CN^{-1}$. Тогда аналогичным образом имеем

$$\|e(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq \frac{C}{N} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |\, e''(s)|\, ds \leq \frac{C}{N} \Big(\int_{x_n}^{x_{n+1}} |\, \Phi''(s)|\, ds + \int_{x_n}^{x_{n+1}} |g_2''(s)|\, ds \Big). \tag{3.1.52}$$

Далее,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |\Phi''(s)|\, ds \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\, ds \leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{x_n}{\varepsilon}} = \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{x_n - x_{N/2}}{\varepsilon}} \leq$$

$$\leq \frac{C_1}{\varepsilon} N^{-3} e^{-(n-N/2)\frac{H}{\varepsilon}} \leq \frac{C_1}{\varepsilon} N^{-3} e^{-\beta(n-N/2)}. \tag{3.1.53}$$

Учитывая (3.1.46), получаем

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |g_2''(s)|\, ds \leq CN^{-1} \frac{1}{\varepsilon H} e^{-x_{N/2}/\varepsilon} e^{-\beta|n-\frac{N}{2}|} \leq \frac{C}{\varepsilon} N^{-3} e^{-\beta|n-\frac{N}{2}|}. \tag{3.1.54}$$

Из (3.1.52)-(3.1.54) вытекает оценка (3.1.8) при $N/2 \leq n \leq N-1$. Теорема 2 доказана полностью.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Докажем оценку (3.1.9) при $n = N/2$. Для этого заметим, что в силу (3.1.46) и того, что $e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} = N^{-3}$, будет иметь место оценка

$$\|g_2''(x)\|_{L_\infty[x_{N/2}, x_{N/2+1}]} \geq \frac{C}{N^2 \varepsilon}. \tag{3.1.55}$$

Оценим снизу $e(x)$ на интервале $[x_{\frac{N}{2}}, x_{\frac{N}{2}+1}]$. В силу (3.1.49) при $n = \frac{N}{2}$ имеем

$$\|e(x)\|_{C[x_{N/2}, x_{N/2+1}]} \geq \Big\| \int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s) g_2''(s)\, ds \Big\|_{C[x_{N/2}, x_{N/2+1}]} -$$

$$\Big|\Big| \int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s)\Phi''(s)\,ds\Big|\Big|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]}. \tag{3.1.56}$$

Далее в силу (3.1.50) при любом $x \in [x_{N/2}, x_{N/2+1}]$ имеем

$$\Big| \int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s)\Phi''(s)\,ds\Big| \le \frac{C}{H}\int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} (x_{N/2+1}-x)(s-x_{N/2})\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{s}{\varepsilon}}\,ds \le$$

$$e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\frac{C}{\varepsilon}\int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} \frac{s-x_{N/2}}{\varepsilon}e^{-\frac{s-x_{N/2}}{\varepsilon}}\,ds \le Ce^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \le CN^{-3},$$

откуда получаем оценку:

$$\Big|\Big| \int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s)\Phi''(s)\,ds\Big|\Big|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]} \le CN^{-3}. \tag{3.1.57}$$

Докажем, что найдется такая константа $C_1 > 0$, что

$$\Big|\Big| \int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s)g_2''(s)\,ds\Big|\Big|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]} \ge C_1\frac{N^{-4}}{\varepsilon}. \tag{3.1.58}$$

Сделаем замену переменной $\frac{s-x_{N/2}}{H} = \tau$ и обозначим $v(\tau) = \varepsilon N^2 g_2''(x_{N/2}+\tau H)$. Тогда оценка (3.1.58) эквивалентна тому, что

$$\Big|\Big| \int_0^1 \tilde{G}(x,s)v(s)\,ds\Big|\Big|_{C[0,1]} \ge C_2 > 0, \tag{3.1.59}$$

где $\tilde{G}(x,s)$ – функция Грина (3.1.50) при $x_n = 0, x_{n+1} = 1$, $v(\tau)$ – двузвенная кусочно-постоянная на $[0,1]$ функция с разрывом в точке $\tau = 1/2$, причем в силу (3.1.55)

$$\| \, v(\tau) \, \|_{L_\infty[0,1]} \ge C > 0. \tag{3.1.60}$$

Докажем (3.1.59). Предположим противное. Тогда существуют последовательности констант $C_j \to 0$ и кусочно-постоянных двузвенных функций $v_j(\tau)$: $\|v_j(\tau)\|_{L_\infty[0,1]} = 1$ таких, что при $j \to \infty$

$$\Big|\Big| \int_0^1 \tilde{G}(\tau,s)v_j(s)ds\Big|\Big|_{C[0,1]} \le C_j \to 0.$$

Но из последовательности таких функций можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Переходя к пределу, получим, что для некоторой функции $v(\tau)$ такой, что $\|v(\tau)\|_{L_\infty[0,1]} = 1$ будет

$$\int_0^1 \tilde{G}(\tau,s)v(s)ds \equiv 0.$$

Но функция в левой части последнего тождества есть решение задачи $y'' = v$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, которое не может быть тождественно нулевым при $v \not\equiv 0$. Полученное противоречие доказывает (3.1.59).

Из (3.1.56)-(3.1.58) получаем, что найдется такая не зависящая от ε, N константа C, что при $\varepsilon \le CN^{-1}$ будут справедливы оценки

$$\|e(x)\|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]} \ge C_1 \frac{N^{-4}}{\varepsilon},$$

откуда следует оценка (3.1.9) для $n = N/2$. Доказательство для остальных n с учетом леммы 7 совершенно аналогично.

3.1.5 Результаты численных экспериментов

Зададим функцию вида (3.1.1):

$$u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}},\ x \in [0, 1].$$

Результаты расчетов сведены в три таблицы. В таблицах приведены максимальные погрешности сплайновой интерполяции, вычисленные в узлах сгущенной сетки, получающейся из исходной расчетной сетки разбиением каждого ее частичного интервала на 10 равных частей. В таблице 1 приведены погрешности для параболического сплайна $g_2(x, u)$ на равномерной сетке, из таблицы видно, что погрешность возрастает при уменьшении ε для фиксированного N. На рисунке приведены графики функции $u(x)$ и сплайна $g_2(x, u)$ на сетке с параметром (3.1.3), иллюстрирующие отсутствие равномерной сходимости интерполяционного процесса при малых значениях ε, что соответствует теореме 3.

Отметим, что применение параболического сплайна на равномерной сетке при малых значениях параметра ε приводит к значительным погрешностям. Например, при $\varepsilon = 10^{-8}$ и $N = 2^9$ погрешность интерполяции порядка $O(10^4)$. Так в таблице 2 приведены погрешности для $g_2(x, u)$ на сетке Шишкина. Из таблицы так же видно, что погрешность возрастает при уменьшении ε для фиксированного N. Результаты таблицы 3 для модифицированного сплайна $gm_2(x, u)$ демонстрируют равномерную по ε сходимость интерполяционного процесса.

Таблица 3.1: Погрешность параболического сплайна $g_2(x, u)$ на равномерной сетке

	$N = 2^4$	$N = 2^5$	$N = 2^6$	$N = 2^7$	$N = 2^8$	$N = 2^9$
$\varepsilon = 1$	$2.82 \cdot 10^{-7}$	$1.76 \cdot 10^{-8}$	$1.16 \cdot 10^{-9}$	$1.02 \cdot 10^{-10}$	$4.30 \cdot 10^{-12}$	$2.68 \cdot 10^{-13}$
10^{-1}	$3.43 \cdot 10^{-4}$	$2.33 \cdot 10^{-5}$	$1.51 \cdot 10^{-6}$	$9.58 \cdot 10^{-8}$	$6.03 \cdot 10^{-9}$	$4.11 \cdot 10^{-10}$
10^{-2}	0.43	$8.38 \cdot 10^{-2}$	$9.72 \cdot 10^{-3}$	$8.00 \cdot 10^{-4}$	$5.59 \cdot 10^{-5}$	$3.65 \cdot 10^{-6}$
10^{-3}	9.88	4.58	1.93	0.66	0.15	$2.03 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	$1.05 \cdot 10^{2}$	$5.23 \cdot 10^{1}$	$2.58 \cdot 10^{1}$	$1.25 \cdot 10^{1}$	5.90	2.59
10^{-5}	$1.06 \cdot 10^{3}$	$5.30 \cdot 10^{2}$	$2.64 \cdot 10^{2}$	$1.32 \cdot 10^{2}$	$6.56 \cdot 10^{1}$	$3.24 \cdot 10^{1}$
10^{-6}	$1.06 \cdot 10^{4}$	$5.30 \cdot 10^{3}$	$2.65 \cdot 10^{3}$	$1.33 \cdot 10^{3}$	$6.62 \cdot 10^{2}$	$3.30 \cdot 10^{2}$
10^{-7}	$1.06 \cdot 10^{5}$	$5.30 \cdot 10^{4}$	$2.65 \cdot 10^{4}$	$1.33 \cdot 10^{4}$	$6.63 \cdot 10^{3}$	$3.30 \cdot 10^{3}$
10^{-8}	$1.06 \cdot 10^{6}$	$5.30 \cdot 10^{5}$	$2.65 \cdot 10^{5}$	$1.33 \cdot 10^{5}$	$6.63 \cdot 10^{4}$	$3.31 \cdot 10^{4}$

Таблица 3.2: Погрешность параболического сплайна на кусочно-равномерной сетке с σ из (3.1.3)

	$N = 2^4$	$N = 2^5$	$N = 2^6$	$N = 2^7$	$N = 2^8$	$N = 2^9$
$\varepsilon = 1$	$9.38 \cdot 10^{-6}$	$1.18 \cdot 10^{-6}$	$1.47 \cdot 10^{-7}$	$1.84 \cdot 10^{-8}$	$2.31 \cdot 10^{-9}$	$2.89 \cdot 10^{-10}$
10^{-1}	$1.44 \cdot 10^{-3}$	$2.50 \cdot 10^{-4}$	$3.64 \cdot 10^{-5}$	$4.90 \cdot 10^{-6}$	$6.35 \cdot 10^{-7}$	$8.09 \cdot 10^{-8}$
10^{-2}	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-3}	$7.05 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-4}	$7.32 \cdot 10^{-2}$	$4.08 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-5}	$7.35 \cdot 10^{-1}$	$4.11 \cdot 10^{-2}$	$2.36 \cdot 10^{-3}$	$1.39 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-6}	7.35	$4.11 \cdot 10^{-1}$	$2.37 \cdot 10^{-2}$	$1.40 \cdot 10^{-3}$	$8.46 \cdot 10^{-5}$	$5.18 \cdot 10^{-6}$
10^{-7}	73.5	4.11	$2.37 \cdot 10^{-1}$	$1.40 \cdot 10^{-2}$	$8.46 \cdot 10^{-4}$	$5.19 \cdot 10^{-5}$
10^{-8}	735	41.1	2.37	$1.40 \cdot 10^{-1}$	$8.46 \cdot 10^{-3}$	$5.19 \cdot 10^{-4}$

Таблица 3.3: Погрешность модифицированного сплайна $gm_2(x, u)$ на кусочно-равномерной сетке с σ из (3.1.3)

	$N = 2^4$	$N = 2^5$	$N = 2^6$	$N = 2^7$	$N = 2^8$	$N = 2^9$
$\varepsilon = 1$	$9.38 \cdot 10^{-6}$	$1.18 \cdot 10^{-6}$	$1.47 \cdot 10^{-7}$	$1.84 \cdot 10^{-8}$	$2.31 \cdot 10^{-9}$	$2.89 \cdot 10^{-10}$
10^{-1}	$1.44 \cdot 10^{-3}$	$2.50 \cdot 10^{-4}$	$3.64 \cdot 10^{-5}$	$4.90 \cdot 10^{-6}$	$6.35 \cdot 10^{-7}$	$8.09 \cdot 10^{-8}$
10^{-2}	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-3}	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-4}	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-5}	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-6}	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-7}	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-8}	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$1.59 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$

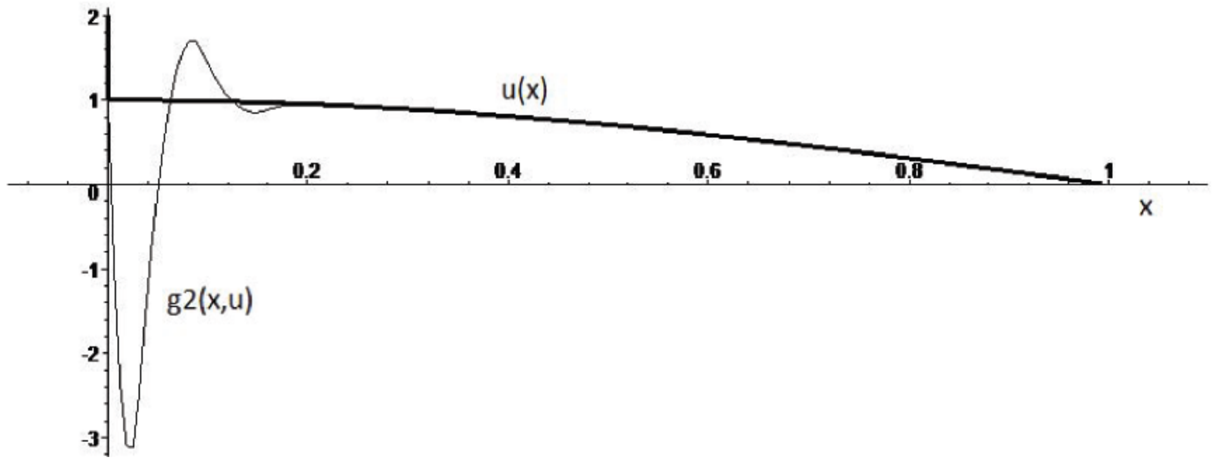

Рис. 3.1: Графики $u(x)$ и $g_2(x,u)$ при $\varepsilon = 10^{-7}$, $N = 32$ сетка Шишкина

3.2 Интерполяция кубическими сплайнами функций с большими градиентами в пограничном слое

Будем говорить, что квадратная матрица $A = \{a_{nk}\}$ имеет диагональное преобладание по строкам с показателем преобладания $r > 0$, если справедлива формула

$$\min_n(|a_{nn}| - \sum_{k\neq n} |a_{nk}|) \geq r.$$

3.2.1 Постановка задачи

Пусть интерполируемая функция $u(x)$ представима в виде:

$$u(x) = q(x) + \Phi(x),\ x \in [0,1], \tag{3.2.1}$$

где

$$|q^{(j)}(x)| \leq C_1,\ |\Phi^{(j)}(x)| \leq \frac{C_1}{\varepsilon^j}\, e^{-\alpha x/\varepsilon},\ 0 \leq j \leq 4, \tag{3.2.2}$$

где функции $q(x)$ и $\Phi(x)$ в явном виде не заданы, $\alpha > 0, \varepsilon > 0$, некоторая постоянная C_1 не зависит от ε.

Согласно (3.2.2), регулярная составляющая $q(x)$ имеет производные, ограниченные до четвертого порядка, а погранслойная составляющая $\Phi(x)$ имеет производные, не ограниченные равномерно по параметру ε.

В соответствии с [70, 10, 8], представление (3.2.1) с ограничениями (3.2.2) имеет место для решения сингулярно возмущенной краевой задачи:

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x),\ u(0) = A,\ u(1) = B, \qquad (3.2.3)$$

где

$$a_1(x) \geq \alpha > 0,\ a_2(x) \geq 0,\ \varepsilon > 0,$$

функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – достаточно гладкие. При малых значениях параметра ε решение задачи (3.2.3) имеет погранслойную область больших градиентов у границы $x = 0$, чему соответствует представление (3.2.1).

Изучим задачу кубической сплайн-интерполяции функции (3.2.1). Вначале рассмотрим случай равномерной сетки. Пусть N — натуральное число, Δ — равномерное с шагом $H = 1/N$ и узлами x_n, $n = 0, 1, \dots, N$, разбиение отрезка $[0, 1]$. Пусть $g_3(x, u) \in S(\Delta, 3, 1)$ — интерполяционный кубический сплайн на сетке Δ, определяемый из условий

$$g_3(x_n, u) = u(x_n),\ 0 \leq n \leq N,\ g_3'(0, u) = u'(0),\ g_3'(1, u) = u'(1). \qquad (3.2.4)$$

Теорема 1 *В случае равномерной сетки найдется такая константа C, что будет справедлива оценка*

$$\| u(x) - g_3(x, u) \|_{C[0,1]} \leq C(N\varepsilon)^{-4}. \qquad (3.2.5)$$

Если в (3.2.1) $\Phi(x) = e^{-\alpha x/\varepsilon}$, то имеет место и оценка снизу

$$\| u(x) - g_3(x, u) \|_{C[0,1]} \geq C_1 \min\{(N\varepsilon)^{-1}, (N\varepsilon)^{-4}\}. \qquad (3.2.6)$$

Эта и последующие теоремы будут доказаны далее. Из теоремы 1 следует, что при $\varepsilon = O(1/N)$ погрешность интерполяции будет величиной порядка $O^*(1)$ и выше, и необходимо применение адаптивных сеток.

Замечание 1 *Заменяя краевые условия (3.2.4) на [50] "естественные"$g_3''(0, u) = 0$, $g_3''(1, u) = 0$, можно "улучшить"оценку (3.2.6) до*

$$\| u(x) - g_3(x, u) \|_{C[0,1]} \geq C_1 \min\{1, (N\varepsilon)^{-4}\},$$

но ясно, что и в этом случае $g_3(x, u)$ непригоден для аппроксимации.

В соответствии с [70] зададим сетку Ω с узлами x_n, $n = 0, 1, \ldots, N$, и шагами

$$h_n = h = \frac{\sigma}{N/2},\ n = 1, \ldots, \frac{N}{2},\ \ h_n = H = \frac{1-\sigma}{N/2},\ n = \frac{N}{2} + 1, \ldots, N. \tag{3.2.7}$$

В соответствии с [70] зададим

$$\sigma = \min\Big\{\frac{1}{2},\ \frac{4\varepsilon}{\alpha}\ln N\Big\}. \tag{3.2.8}$$

Замечание 2 *В дальнейшем будем считать, что* $N = 2N_0 \geq 8$.

Итак, пусть функция $u(x)$ задана в узлах сетки Ω, $u_n = u(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Исследуем погрешность интерполяции кубическим сплайном на кусочно-равномерной сетке (3.2.7) с заданием параметра σ в соответствии с (3.2.8).

3.2.2 Формулировка основных результатов

В соответствии с [50] для интерполяционного кубического сплайна $g_3(x, u) \in S(\Omega, 3, 1)$ справедлива оценка погрешности:

$$|g_3(x, u) - u(x)| \leq \frac{5}{384} \parallel u^{(4)} \parallel_{C[0,1]} \max_n h_n^4. \tag{3.2.9}$$

Из (3.2.9) следует, что если производная $u^{(4)}(x)$ является ограниченной, сплайн $g_3(x, u)$ обладает четвертым порядком точности по шагу сетки. Однако, в силу (3.2.2), производная $u^{(4)}(x)$ неограниченно растет у границы $x = 0$ с уменьшением ε. Как следует из теоремы 1, погрешность кубического сплайна на равномерной сетке может быть порядка $O(1)$ и выше.

Заметим, что $g_3(x, u) = g_3(x, q) + g_3(x, \Phi)$, а в силу условий (3.2.2) и (3.2.9) $\parallel q(x) - g_3(x, q) \parallel_{C[0,1]} \leq C_2 \max\limits_n h_n^4 \leq C_2 N^{-4}$. Поэтому для построения сплайна, аппроксимирующего $u(x)$ с порядком $O(N^{-4} \ln^4 N)$, необходимо и достаточно обеспечить оценку

$$\parallel \Phi(x) - g_3(x, \Phi) \parallel_{C[0,1]} \leq C_2 N^{-4} \ln^4 N. \tag{3.2.10}$$

В случае, когда в (3.2.8) $\sigma = 1/2$, оценка (3.2.10) имеет место в силу (3.2.5) и того, что в этом случае $N\varepsilon = O^*(N/lnN)$. Поэтому ниже будем предполагать, что $\sigma < 1/2$. Также, не ограничивая общности, будем считать, что в (3.2.2) $\alpha = 1$, так как общий случай сводится к этому заменой $\alpha x = y$ с сохранением оценок вида (3.2.2).

Далее для краткости будем использовать обозначение $g_3(x) = g_3(x, \Phi)$, $g_3(x) \in S(\Omega, 3, 1)$.

Теорема 2 *Найдутся такие константы* C_2, C_3*, что при* $N^{-1} \leq C_3\varepsilon$ *будут справедливы оценки (3.2.10).*

Теорема 3 *Найдутся такие константы* C_4, C_5 *и* $\beta > 0$*, не зависящие от* ε, N*, что при* $\varepsilon \leq C_4 N^{-1}$ *будут справедливы оценки*

$$\| g_3(x) - \Phi(x) \|_{C[x_n,x_{n+1}]} \leq C_5 \begin{cases} N^{-4}\ln^4 N,\ 0 \leq n \leq N/2-1 \\ \varepsilon^{-1}N^{-5}\exp\Big(-\beta\big(n-N/2\big)\Big),\ N/2 \leq n \leq N-1 \end{cases}. \tag{3.2.11}$$

Следующая теорема показывает, что оценки (3.2.11) неулучшаемы.

Теорема 4 *Пусть* $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$*. Тогда найдутся такие* $C_4, C_6, \beta_1 >\ 0$*, не зависящие от* ε, N*, что при* $\varepsilon \leq C_4 N^{-1}$ *будут справедливы оценки снизу*

$$\| g_3(x) - \Phi(x) \|_{C[x_n,x_{n+1}]} \geq C_6 N^{-5}\varepsilon^{-1}e^{-\beta_1\big(n-N/2\big)},\ \frac{N}{2} \leq n \leq N-1. \tag{3.2.12}$$

Построим модифицированный интерполяционный сплайн. Положим

$$\bar{x}_{N/2} = (x_{N/2} + x_{N/2+1})/2,\ \bar{x}_n = x_n,\ n \in [0, N/2-1] \cup [N/2+1, N]$$

Пусть $gm_3(x,u)$ — интерполяционный кубический сплайн, определяемый из условий

$$gm_3(\bar{x}_n, u) = u(\bar{x}_n),\ n \in [0,N],\ gm_3'(0,u) = u'(0),\ gm_3'(1,u) = u'(1). \tag{3.2.13}$$

Единственным отличием $gm_3(x,u)$ от $g_3(x,u)$ является то, что узел интерполяции $x_{N/2}$ заменяется узлом $\bar{x}_{N/2}$. Узлы самого сплайна при этом не меняются и совпадают с узлами Ω.

Теорема 5 *Найдутся такие не зависящие от* ε, N *константы* $\gamma_0 > 0, C$*, что при* $\varepsilon \ln N \leq \gamma_0$ *будет справедлива оценка*

$$\| u(x) - gm_3(x,u) \|_{C[0,1]} \leq CN^{-4}\ln^4 N. \tag{3.2.14}$$

Замечание 3 *Условие* $\varepsilon \ln N \leq \gamma_0$ *будет выполнено при* $\varepsilon \leq CN^{-1}$*. Поэтому в силу теорем 2, 5 применение интерполяционного сплайна* $gm_3(x,u)$ *при* $\varepsilon = O(N^{-1})$ *и интерполяционного сплайна* $g_3(x,u)$ *при* $N^{-1} = O(\varepsilon)$ *позволяет получить равномерные по* N, ε *оценки вида (3.2.10), (3.2.14).*

Замечание 4 *Предполагается, что функция* $u(x)$ *задана своими значениями в точках сетки* Ω*, а* $\bar{x}_{N/2} \notin \Omega$*. Поэтому для получения оценок вида (3.2.10), (3.2.14) необходимо найти значение* $u(\bar{x}_{N/2})$ *с точностью* $O(\ln^4 N/N^4)$*. Как показано в [52], это можно сделать с помощью многочлена Лагранжа невысокой фиксированной степени по соседним с* $\bar{x}_{N/2}$ *узлам.*

3.2.3 Вспомогательные результаты

Изучим функцию $g_3''(x)$. Согласно [41, с. 60], справедлива формула

$$g_3''(x) = P\Phi''(x), \tag{3.2.15}$$

где P - ортогональный в $L_2[0,1]$ проектор на $S(\Omega,1,1)$. Пусть

$$N_{n,1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_n}{x_{n+1}-x_n}, x \in [x_n, x_{n+1}] \\ \\ \frac{x_{n+2}-x}{x_{n+2}-x_{n+1}}, x \in [x_{n+1}, x_{n+2}], \ -1 \le n \le N-1 \\ \\ 0, x \notin [x_n, x_{n+2}) \end{cases} \tag{3.2.16}$$

— B-сплайн первой степени. Из (3.2.16) находим

$$\| N_{n,1} \|_{L_2[0,1]} = \frac{1}{\sqrt{3}}(h_{n+1} + h_{n+2})^{1/2}, \tag{3.2.17}$$

т.е.

$$\| N_{n,1} \|_{L_2[0,1]} = \begin{cases} O^*(h^{1/2}), \ 0 \le n \le N/2-2, \\ O^*(H^{1/2}), \ N/2-1 \le n \le N-1. \end{cases} \tag{3.2.18}$$

Пусть $\tilde{N}_{n,1}(x) = N_{n,1}(x)/ \| N_{n,1} \|_{L_2[0,1]}, \ 0 \le n \le N-2$. При $n=-1$ и $n = N-1$ положим

$$\tilde{N}_{-1,1}(x) = \tilde{N}_{0,1}(x+h), \ \tilde{N}_{N-1,1}(x) = \tilde{N}_{N-2,1}(x-H).$$

Из (3.2.16), (3.2.18) вытекает формула

$$\| \tilde{N}_{n,1} \|_{C[0,1]} = \begin{cases} O^*(h^{-1/2}), & -1 \le n \le N/2-2, \\ O^*(H^{-1/2}), & N/2-1 \le n \le N-1. \end{cases} \tag{3.2.19}$$

Представим функцию $g_3''(x)$ в виде

$$g_3''(x) = \sum_{n=-1}^{N-1} \alpha_n \tilde{N}_{n,1}(x). \tag{3.2.20}$$

Из условий ортогональности разности $g_3''(x,\Phi) - \Phi''(x)$ пространству $S(\Omega,1,1)$ получим СЛАУ для коэффициентов

$$\sum_{n=-1}^{N-1} \alpha_n (\tilde{N}_{n,1}, \tilde{N}_{k,1}) = (\Phi'', \tilde{N}_{k,1}), \ -1 \le k \le N-1, \tag{3.2.21}$$

или в матричном виде

$$\Gamma\alpha = F, \tag{3.2.22}$$

где $\Gamma = \{\gamma_{nk}\} = \{(\tilde{N}_{n,1}, \tilde{N}_{k,1})\}$ — матрица Грама нормированных B-сплайнов,

$$F = (F_{-1}, F_0, \cdots, F_{N-1})^T,\ F_j = (\Phi'', \tilde{N}_j).$$

Лемма 1 *Матрица* Γ *имеет вид*

$$\Gamma = tridiag\{a_n, c_n, b_n\},\ -1 \le n \le N-1, a_{-1} = b_{N-1} = 0, \tag{3.2.23}$$

$$a_{n+1} = b_n = \frac{1}{4},\ 0 \le n \le N-2,\ n \ne N/2-2,\ n \ne N/2-1, \tag{3.2.24}$$

$$a_{N/2} = b_{N/2-1} = \frac{H^{1/2}}{2\sqrt{2}(h+H)^{1/2}}, a_{N/2-1} = b_{N/2-2} = \frac{h^{1/2}}{2\sqrt{2}(h+H)^{1/2}}, \tag{3.2.25}$$

$$c_n = 1,\ 0 \le n \le N-2, c_{-1} = c_{N-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.2.26}$$

Доказательство получается прямым вычислением интегралов с учетом (3.2.17).

Обозначим через $cond_2\Gamma$ спектральное число обусловленности Γ.

Следствие 1 *Матрица* Γ *имеет вид*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.2.27}$$

где Γ, Γ_{11}, Γ_{22} *— трехдиагональные квадратные матрицы со строгим диагональным преобладанием порядка* $(N/2)\times(N/2)$ *и* $(N/2+1)\times(N/2+1)$ *соответственно, причем* $cond_2\Gamma = O(1)$, $cond_2\Gamma_{ii} = O(1)$, $i = 1,2$, *а матрицы* Γ_{12} *и* Γ_{21} *— прямоугольные матрицы с единственным ненулевым элементом порядка* $O\left((h/H)^{1/2}\right)$ *в левом нижнем и правом верхнем углах соответственно.*

Данное следствие справедливо, так как в силу (3.2.23)-(3.2.26) все три матрицы Γ, Γ_{11}, Γ_{22} имеют строгое диагональное преобладание по строкам с положительным не зависящим от ε, N показателем преобладания.

Лемма 2 *Матрицы* Γ_{11}, Γ_{22} *обратимы, и для элементов* $\check{\gamma}^{ii}_{nk}$, $i = 1,2$ *обратных матриц справедливы оценки*

$$|\check{\gamma}^{ii}_{nk}| \le Ce^{-\beta|n-k|}, \tag{3.2.28}$$

а для элементов Γ_{22} *также справедливы оценки снизу*

$$|\check{\gamma}_{nk}^{22}| \geq C_1 e^{-\beta_1 |n-k|}, \tag{3.2.29}$$

а также

$$|\check{\gamma}_{nk}^{22}| \geq |\check{\gamma}_{np}^{22}| e^{-\beta_2 |k-p|},\ N/2-1 \leq n \leq N-1,\ N/2-1 \leq k \leq p \leq N-1, \tag{3.2.30}$$

где C, C_1, β, β_1, β_2 *не зависят от* N, ε.

Доказательство. Обратимость матриц Γ_{11}, Γ_{22} и оценки (3.2.28) вытекают из строгого диагонального преобладания и теоремы Демко [5]. Докажем оценки (3.2.29). Рассмотрим матрицу

$$M = \{m_{nk}, N/2-1 \leq n, k \leq N-1\} = tridiag\{\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}\}.$$

Поскольку $h \leq H$, то из (3.2.23)-(3.2.26) следует, что $\gamma_{nn}^{22} \leq m_{nn}$, $\gamma_{nk}^{22} \geq m_{nk}$, $n \neq k$. Тогда для M-матриц (см. [45, с. 269]) $\Gamma M_{22} = \{\gamma m_{nk}^{22}\}$ и $MM = \{mm_{nk}\}$, получающихся из M и Γ_{22} заменой знаков всех внедиагональных элементов на противоположные, согласно [45, с.270, п. 36.19] будем иметь

$$\gamma \check{m}_{nk}^{22} \geq m\check{m}_{nk} \geq 0, \tag{3.2.31}$$

где $\gamma \check{m}_{nk}^{22}$ и $m\check{m}_{nk}$ – соответствующие элементы обратных матриц. Но непосредственным перемножением исходных и обратных матриц легко убедиться, что для элементов $\Gamma_{22}^{-1} = \{\check{\gamma}_{nk}\}$ и $M^{-1} = \{\check{m}_{nk}\}$ будут справедливы равенства

$$\check{\gamma}_{nk} = (-1)^{n+k} \gamma \check{m}_{nk},\ \check{m}_{nk} = (-1)^{n+k} m\check{m}_{nk}. \tag{3.2.32}$$

Поэтому приходим к выводу, что

$$|\check{\gamma}_{nk}^{22}| \geq |\check{m}_{nk}|. \tag{3.2.33}$$

Заметим, что из тех же соображений, рассматривая пару матриц MM и I, где I — единичная матрица, получаем

$$\check{m}_{kk} \geq 1. \tag{3.2.34}$$

Ввиду (3.2.33) для доказательства (3.2.29) достаточно доказать оценку

$$|\check{m}_{nk}| \geq C_1 e^{-\beta_1 |n-k|}. \tag{3.2.35}$$

Рассматривая $\{\check{m}_{nk}\}$ как решения краевой задачи для трехточечного разностного уравнения

$$\frac{1}{4}\check{m}_{n-1k} + \check{m}_{nk} + \frac{1}{4}\check{m}_{n+1k} = 0,\ N/2-1 \le n \le k-1 \tag{3.2.36}$$

с заданными граничными значениями $m_{(N/2-2)k} = 0$ и $\check{m}_{kk} : 1 \le \check{m}_{kk} \le C$, находим согласно [65, с.55, формула (5)]

$$\check{m}_{nk} = \frac{\lambda_1^{n-N/2+2} - \lambda_2^{n-N/2+2}}{\lambda_1^{k-N/2+1} - \lambda_2^{k-N/2+1}}\,\check{m}_{kk},\ N/2-1 \le n \le k-1,\ \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}. \tag{3.2.37}$$

Отсюда следует (3.2.35) для $N/2-1 \le n \le k-1$. Доказательство для $k+1 \le n \le N-1$ аналогично, а при $n = k$ оценка вытекает из (3.2.34). Оценка (3.2.29) доказана.

Докажем (3.2.30). Для элементов Γ^{-1} при фиксированном $n \in [N/2-1, N-1]$ справедливы формулы

$$\check{\gamma}^{22}_{nk-1}\gamma^{22}_{k-1k} + \check{\gamma}^{22}_{nk} + \check{\gamma}^{22}_{nk+1}\gamma^{22}_{k+1k} = 0, \quad k \ne n.$$

Из (3.2.31), (3.2.32) получаем, что $sign\,\check{\gamma}^{22}_{nk-1} = sign\,\check{\gamma}^{22}_{nk+1}$. Отсюда, с учетом (3.2.23)-(3.2.26) и положительности γ^{22}_{kk} и находим для $k \ne n$

$$|\check{\gamma}^{22}_{nk}| \ge |\check{\gamma}^{22}_{nk+1}\gamma^{22}_{k+1k}| \ge \tfrac{1}{4}|\check{\gamma}^{22}_{nk+1}|,$$

и оценка (3.2.30) доказана для $k \ne n$ при $\beta_2 = \ln 4$. Для $k = n$ она вытекает из (3.2.28) и неравенства $\check{\gamma}^{22}_{kk} \ge 1$, которое следует из (3.2.31)-(3.2.34) Лемма доказана.

Лемма 3 *Для элементов F_n при любых $\varepsilon \in (0,1), N$ справедливы оценки*

$$F_n = \begin{cases} O(h^{1/2}\varepsilon^{-2}e^{-x_{n+1}/\varepsilon}), & -1 \le n \le N/2-2, \\ O(H^{1/2}\varepsilon^{-2}e^{-x_n/\varepsilon}), & N/2-1 \le n \le N-1, \end{cases} \tag{3.2.38}$$

а при $\varepsilon \le CN^{-1}$ также справедливы оценки

$$F_n = \begin{cases} O(H^{-1/2}\varepsilon^{-1}e^{-x_{N/2}/\varepsilon}), & n = N/2-1, \\ O(H^{-3/2}e^{-x_n/\varepsilon}), & N/2 \le n \le N-1. \end{cases} \tag{3.2.39}$$

В случае, если $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$, справедливы и аналогичные оценки снизу, т.е. с заменой в (3.2.38)-(3.2.39) O на O^*.

Доказательство: Используем прямое вычисление интегралов с учетом (3.2.19). Докажем, например, вторую оценку (3.2.39), остальные получаются совершенно аналогично. Имеем в силу (3.2.16), (3.2.19), (3.2.2) при $n \ge N/2$

$$|F_n| = |(\Phi'', \tilde{N}_{n,1})| \le \int_{x_n}^{x_{n+2}} |\tilde{N}_{n,1}(x)| \cdot |\Phi''(x)| dx \le C \int_{x_n}^{x_{n+2}} H^{-1/2}\,\tfrac{x-x_n}{H}\,\tfrac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}dx =$$

$$= CH^{-3/2}e^{-\frac{x_n}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_n}^{x_{n+2}}\frac{x-x_n}{\varepsilon}e^{-\frac{x-x_n}{\varepsilon}}dx \le C_1H^{-3/2}e^{-\frac{x_n}{\varepsilon}},$$

что и требовалось. Если $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$, то все интегралы вычисляются точно и оценки будут двусторонними. Лемма доказана.

Лемма 4 *Для матрицы Γ^{-1} справедливо представление*

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{11} & \tilde{\Gamma}_{12} \\ \tilde{\Gamma}_{21} & \tilde{\Gamma}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.2.40}$$

где элементы $\tilde{\gamma}_{nk}^{ij}$ матриц $\tilde{\Gamma}_{ij}$ при некотором $\beta > 0$, не зависящем от ε, N, удовлетворяют оценкам

$$\begin{gathered} |\tilde{\gamma}_{nk}^{11}| \le Ce^{-\beta|n-k|},\ -1 \le n,\ k \le N/2-2; \\ |\tilde{\gamma}_{nk}^{22}| \le Ce^{-\beta|n-k|},\ N/2-1 \le n,\ k \le N-1, \\ |\tilde{\gamma}_{nk}^{ij}| \le C(h/H)^{1/2}e^{-\beta|n-k|}, \end{gathered} \tag{3.2.41}$$

где

$-1 \le n \le N/2-2, N/2-1 \le k \le N-1$ *при* $i=1, j=2$*;*

$-1 \le k \le N/2-2, N/2-1 \le n \le N-1$ *при* $i=2, j=1$*.*

Доказательство. Применяя блочный метод Гаусса, находим

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{-1} + \Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}\tilde{\Gamma}^{-1}\Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1} & \Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}\tilde{\Gamma}^{-1} \\ \tilde{\Gamma}^{-1}\Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1} & \tilde{\Gamma}^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.2.42}$$

где $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{22} - \Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}$. Здесь обратимость всех блоков и равномерная по ε, N ограниченность всех обратных матриц вытекает из следствия 1 Более того, из теоремы Демко [5] вытекает, что элементы матрицы Γ_{11}^{-1} удовлетворяют оценкам вида (3.2.41), а, значит, в силу вида матриц Γ_{12}, Γ_{21} таким же оценкам удовлетворяют и элементы матрицы $\tilde{\Gamma}$. Но для матриц, имеющих обратную, ограниченную в спектральной норме константой, не зависящей от порядка матрицы и параметров, определяющих ее элементы, в [28] было доказано, что и элементы обратной матрицы $\tilde{\Gamma}^{-1}$ удовлетворяют таким же оценкам, возможно, с другой константой $\beta_1 \in (0,1)$, также не зависящей от N, ε. Там же было доказано, что элементы произведения двух матриц, удовлетворяющих оценкам вида (3.2.41), удовлетворяют таким же оценкам, возможно, с другой константой $\beta_1 \in (0,1)$. Отсюда вытекают первая из оценок (3.2.41).

Докажем оставшиеся оценки (3.2.41) при $i=1, j=2$. При $i=2, j=1$ они получатся в силу симметрии Γ^{-1}. Пусть $\tilde{\Gamma}^{-1}=\{\tilde{\gamma}_{nk}, N/2-1\le n,k\le N-1\}$, $\Gamma_{12}=\{\gamma_{nk}, 1\le n\le N/2-2, N/2-1\le k\le N-1\}$, $\Gamma_{11}^{-1}=\{\tilde{\gamma}_{nk}^{11}, 1\le n,k\le N/2-2\}$. Поскольку у матрицы Γ_{12} отличен от нуля единственный элемент $\gamma_{(N/2-2)(N/2-1)}$, то, перемножая матрицы, находим для элементов матрицы $\tilde{\Gamma}_{12}$: $\tilde{\gamma}_{nk}^{12}=\tilde{\gamma}_{n(N/2-2)}^{11}\gamma_{(N/2-2)(N/2-1)}\tilde{\gamma}_{(N/2-2)k}$. Отсюда, учитывая оценки (3.2.41) для первого и третьего сомножителей и формулу (3.2.25) для второго сомножителя, получаем

$$|\tilde{\gamma}_{nk}^{12}|\le Ce^{-\beta((N/2-2)-n)}(h/H)^{1/2}e^{-\beta(k-(N/2-2))}=$$

$$=C(h/H)^{1/2}e^{-\beta(k-n)}=C(h/H)^{1/2}e^{-\beta|k-n|}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5 *Для коэффициентов α_n в представлении (3.2.20) при $\varepsilon\le CN^{-1}$ справедливы оценки*

$$\alpha_n=\begin{cases} O(h^{1/2}\varepsilon^{-2}e^{-x_{n+1}/\varepsilon}), & -1\le n\le N/2-2,\\ O(H^{-1/2}\varepsilon^{-1}e^{-x_{N/2}/\varepsilon}), & n=N/2-1,\\ O(H^{-1/2}\varepsilon^{-1}e^{-x_{N/2}/\varepsilon}e^{-\beta(n-N/2)}), & N/2\le n\le N-1\end{cases}, \tag{3.2.43}$$

а при $N^{-1}\le C\varepsilon$ — оценки

$$\alpha_n=\begin{cases} O(h^{1/2}\varepsilon^{-2}e^{-x_{n+1}/\varepsilon}), -1\le n\le N/2-2,\\ O(H^{1/2}\varepsilon^{-2}e^{-x_{n+1}/\varepsilon}), N/2-1\le n\le N-1\end{cases}. \tag{3.2.44}$$

В случае, если $\Phi(x)=e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$, найдется такая константа $C>0$, не зависящая от ε, N, что при $\varepsilon\le CN^{-1}$ для $n\ge N/2-1$ в (3.2.43) справедливы и аналогичные оценки снизу, т.е. с заменой O на O^*.

Доказательство. Имеем $\alpha=\Gamma^{-1}F$. Пусть $\alpha=(\alpha^{(1)},\alpha^{(2)})^T$, где $dim\alpha^{(1)}=N/2$. Аналогичным образом представим F. Тогда $\alpha^{(1)}=\tilde{\Gamma}_{11}F^{(1)}+\tilde{\Gamma}_{12}F^{(2)}$.

Для любого $n\in[-1,N/2-2]$ имеем

$$\alpha_n^{(1)}=\alpha_n=\sum_{k=-1}^{N/2-2}\tilde{\gamma}_{nk}^{11}F_k+\sum_{k=N/2-1}^{N-1}\tilde{\gamma}_{nk}^{12}F_k. \tag{3.2.45}$$

Далее в силу (3.2.38), (3.2.41) имеем при достаточно больших N

$$\Big|\sum_{k=-1}^{N/2-2}\tilde{\gamma}_{nk}^{11}F_k\Big|\le\frac{C}{\varepsilon^2}h^{1/2}\sum_{k=-1}^{N/2-2}e^{-\beta|n-k|}e^{-x_{k+1}/\varepsilon}=$$

$$= \frac{C}{\varepsilon^2} h^{1/2} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\beta|n-k|} e^{-\frac{h(k+1)}{\varepsilon}} = \frac{C}{\varepsilon^2} h^{1/2} e^{-\frac{h(n+1)}{\varepsilon}} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\beta|n-k|} e^{-\frac{h(k-n)}{\varepsilon}} =$$

$$= C h^{1/2} \varepsilon^{-2} e^{-\frac{h(n+1)}{\varepsilon}} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\beta|n-k|} e^{-\frac{8 \ln N (k-n)}{N}} \le$$

$$\le C h^{1/2} \varepsilon^{-2} e^{-\frac{x_{n+1}}{\varepsilon}} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\frac{\beta}{2}|n-k|} \le C h^{1/2} \varepsilon^{-2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon}, \tag{3.2.46}$$

$$\Big| \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{nk}^{12} F_k \Big| \le C \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \frac{h^{1/2}}{H^{1/2}} e^{-\beta|n-k|} H^{1/2} \varepsilon^{-2} e^{-x_k/\varepsilon} \le$$

$$\le C \frac{h^{1/2}}{\varepsilon^2} e^{-\frac{x_{N/2-1}}{\varepsilon}} \sum_{k=N/2-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} \le$$

$$\le C_1 h^{1/2} \varepsilon^{-2} e^{-x_{N/2-1}/\varepsilon} \le C_1 h^{1/2} \varepsilon^{-2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon}.$$

Тем самым оценка (3.2.43) при $1 \le n \le N/2 - 2$ доказана. Доказательство (3.2.43) при $n = N/2 - 1$ совершенно аналогично с использованием оценок (3.2.39), (3.2.41).

Докажем (3.2.43) для $n \ge N/2$. Имеем

$$\alpha_n^{(2)} = \alpha_n = \sum_{k=-1}^{N/2-2} \tilde{\gamma}_{nk}^{21} F_k + \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{nk}^{22} F_k. \tag{3.2.47}$$

Далее совершенно аналогично (3.2.46) находим, применяя (3.2.41) для $\tilde{\gamma}_{nk}^{21}$ и (3.2.38) для F_k,

$$\left| \sum_{k=-1}^{N/2-2} \tilde{\gamma}_{nk}^{21} F_k \right| \le C \frac{h}{H^{1/2}} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\beta(n-k)} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-x_{k+1}/\varepsilon} =$$

$$= C \frac{h}{H^{1/2}} e^{-\beta(n-\frac{N}{2})} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\beta(\frac{N}{2}-k)} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-x_{k+1}/\varepsilon} \le C_1 \frac{h}{H^{1/2}} e^{-\beta(n-\frac{N}{2})} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-x_{\frac{N}{2}-1}/\varepsilon} \le$$

$$\le C_1 \varepsilon \frac{\ln N}{N^{1/2}} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-x_{\frac{N}{2}-1}/\varepsilon} e^{-\beta(n-\frac{N}{2})} \le C_2 H^{-1/2} \frac{1}{\varepsilon} e^{-x_{\frac{N}{2}}/\varepsilon} e^{-\beta(n-\frac{N}{2})}, \tag{3.2.48}$$

и применяя (3.2.41) для $\tilde{\gamma}_{nk}^{22}$ и (3.2.39) для F_k, с учетом того, что в (3.2.43) $\varepsilon \le CH$:

$$\left| \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{nk}^{22} F_k \right| \le C(\varepsilon H^{-1/2}) \sum_{k=N/2-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-x_k/\varepsilon} =$$

$$= C(\varepsilon H^{-1/2}) \sum_{k=N/2-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{x_k}{\varepsilon}} =$$

$$= C(\varepsilon H^{-1/2}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \sum_{k=N/2-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} e^{-\frac{x_k - x_{N/2}}{\varepsilon}} =$$

$$C(\varepsilon H^{-1/2}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-x_{\frac{N}{2}}/\varepsilon} e^{\frac{h}{\varepsilon}} \sum_{k=N/2-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} e^{-(k-\frac{N}{2}+1)\frac{H}{\varepsilon}} \leq$$

$$\leq C_1(\varepsilon H^{-1/2}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-x_{\frac{N}{2}}/\varepsilon} \sum_{k=N/2-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} e^{-(k-\frac{N}{2}+1)} =$$

$$= C_1\big(\varepsilon H^{-1/2}\big) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \left(\sum_{k=N/2-1}^{n} e^{-\beta\left(n-\frac{N}{2}+1\right)} + \sum_{k=n+1}^{N-1} e^{-\beta\left(2k-n-\frac{N}{2}+1\right)} \right) \leq$$

$$\leq C_2\big(H^{-1/2}\big) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\beta}{2}\left(n-\frac{N}{2}\right)} + e^{-\beta\left(n-\frac{N}{2}\right)} \right) \leq$$

$$\leq C_3 H^{-1/2} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{\beta}{2}\left(n-\frac{N}{2}\right)},$$

и переобозначая $\frac{\beta}{2}$ через β, с учетом (3.2.47), (3.2.48) получаем (3.2.43) для $n \geq N/2$.

Тем самым оценки (3.2.43) доказаны полностью. Оценки (3.2.44) доказываются совершенно аналогично с использованием (3.2.38) вместо (3.2.39) при проведении последней оценки.

Докажем оценки снизу в (3.2.43) для $n \geq N/2-1$ в случае, если $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$. Обозначим $(\alpha_{N/2-1}, \cdots, \alpha_{N-1})^T = \tilde{\alpha}$. Тогда вектор $\tilde{\alpha}$ есть решение СЛАУ

$$\Gamma_{22}\tilde{\alpha} = \tilde{F}, \tag{3.2.49}$$

где элементы вектора $\tilde{F} = \{\tilde{F}_n, N/2-1 \leq n \leq N-1\}$ имеют вид

$$\tilde{F}_{N/2-1} = F_{N/2-1} - \alpha_{N/2-2} a_{N/2-1}; \quad \tilde{F}_n = F_n,\ n \geq N/2. \tag{3.2.50}$$

При этом в силу (3.2.39) для $F_{N/2-1}$, (3.2.25) для $a_{N/2-1}$, (3.2.44) для $\alpha_{N/2-2}$, имеем

$$\big|\tilde{F}_{N/2-1}\big| \geq C H^{-1/2} \varepsilon^{-1} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} - C_1\, h\, H^{-1/2} \varepsilon^{-2} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} =$$

$$= H^{-1/2} \varepsilon^{-1} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} (C - C_1\, h \varepsilon^{-1}) \geq$$

$$H^{-1/2} \varepsilon^{-1} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \left(C - C_1 \frac{\ln N}{N} \right) \geq C_2 H^{-1/2} \varepsilon^{-1} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}},$$

т.е. элементы вектора $\tilde{F}$ удовлетворяют оценкам, аналогичным (3.2.39):

$$\tilde{F}_n = \begin{cases} O^*(H^{-1/2}\varepsilon^{-1}e^{-x_{N/2}/\varepsilon}), n = N/2-1, \\ O^*(H^{-3/2}e^{-x_n/\varepsilon}), N/2 \le n \le N-1. \end{cases} \quad . \qquad (3.2.51)$$

Оценим $|\alpha_n|$ для $n \in [N/2-1, N-1]$, опираясь на (**??**). Имеем

$$|\alpha_n| = |\sum_{k=N/2-1}^{N-1} \check{\gamma}_{nk}^{22}\tilde{F}_k| \ge |\check{\gamma}_{nN/2-1}^{22}\tilde{F}_{N/2-1}| - \sum_{k=N/2}^{N-1} |\check{\gamma}_{nk}^{22}||\tilde{F}_k|. \qquad (3.2.52)$$

Пусть εN столь мало, что $\frac{H}{\varepsilon} \ge 2\beta_2$. Применяя (3.2.30), (3.2.51), имеем

$$\sum_{k=N/2}^{N-1} |\check{\gamma}_{nk}^{22}||\tilde{F}_k| \le C \sum_{k=N/2}^{N-1} |\check{\gamma}_{nN/2-1}^{22}|e^{\beta_2|k-N/2|} \cdot H^{-3/2}e^{-\frac{x_k}{\varepsilon}} =$$

$$= CH^{-3/2}|\check{\gamma}_{nN/2-1}^{22}|e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \sum_{k=N/2}^{N-1} e^{\beta_2|k-N/2|}e^{-\frac{x_k-x_{N/2}}{\varepsilon}} =$$

$$= CH^{-3/2}|\check{\gamma}_{nN/2-1}^{22}|e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \sum_{k=N/2}^{N-1} e^{\beta_2|k-N/2|}e^{-\frac{H}{\varepsilon}|k-N/2|} \le$$

$$CH^{-3/2}|\check{\gamma}_{nN/2-1}^{22}|e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \sum_{k=N/2}^{N-1} e^{-\beta_2|k-N/2|} \le C_1H^{-3/2}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}|\check{\gamma}_{nN/2-1}^{22}|. \qquad (3.2.53)$$

Наконец, с учетом (3.2.51) получаем

$$|\check{\gamma}_{nN/2-1}^{22}||\tilde{F}_{N/2-1}| \ge CH^{-1/2}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}|\check{\gamma}_{nN/2-1}^{22}|. \qquad (3.2.54)$$

Из (3.2.52)-(3.2.54), (3.2.28) при достаточно малых ε/H получаем

$$|\alpha_n| \ge C_2H^{-1/2}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}|\check{\gamma}_{nN/2-1}^{22}| \ge C_3H^{-1/2}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}e^{-\beta_2(n-N/2)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 6 *Найдутся такие константы $C > 0, \beta > 0$, не зависящие от ε, N, что для функции $g_3''(x)$ при $N^{-1} \le C\varepsilon$ будут справедливы оценки*

$$g_3''(x_n) = O(\frac{C}{\varepsilon^2}e^{-x_n/\varepsilon}),\ 0 \le n \le N, \qquad (3.2.55)$$

а при $\varepsilon \le CN^{-1}$ — оценки

$$g_3''(x_n) = O(\frac{C}{\varepsilon^2}e^{-x_n/\varepsilon}),\ 0 \le n \le \frac{N}{2}-1, \qquad (3.2.56)$$

$$g_3''(x_n) = O(\frac{1}{\varepsilon H} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} e^{-\beta|n-\frac{N}{2}|}),\ \frac{N}{2} \le n \le N, \tag{3.2.57}$$

В случае, если $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$, найдется такая константа $C > 0$, не зависящая от ε, N, что при $\varepsilon \le CN^{-1}$ для $n \ge N/2 - 1$ в (3.2.56), (3.2.57) справедливы и аналогичные оценки снизу, т.е. с заменой O на O^*.

Доказательство. Поскольку в каждом узле x_n отличен от нуля только один B-сплайн $N_{n-1,1}$, то справедливо равенство $g_3''(x_n) = \alpha_{n-1}\tilde{N}_{n-1,1}(x_n)$. Отсюда, из леммы 5 и оценок (3.2.19) следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь модифицированный сплайн $gm_3(x, u)$ из (3.2.13). Обозначим через $N_{n,l}(x)$ нормализованный B-сплайн степени l на сетке Ω [50]. Для функций $N_{n,l}(x)$ справедливы формулы [50, с. 31],

$$N_{n,l}(x) = \frac{x - x_n}{x_{n+l} - x_n} N_{n,l-1}(x) + \frac{x_{n+l+1} - x}{x_{n+l+1} - x_{n+1}} N_{n+1,l-1}(x), \tag{3.2.58}$$

$$N'_{n,l}(x) = \frac{l}{x_{n+l} - x_n} N_{n,l-1}(x) - \frac{l}{x_{n+l+1} - x_{l+1}} N_{n+1,l-1}(x). \tag{3.2.59}$$

Далее для краткости обозначим $gm_3(x, u) = gm_3(x)$. Представим $gm_3(x)$ в виде

$$gm_3(x) = \sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n N_{n,3}(x). \tag{3.2.60}$$

Везде далее коэффициенты α_n соответствуют разложению сплайна $gm_3(x)$.

Из условий интерполяции (3.2.13) получим СЛАУ для коэффициентов

$$\sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n N'_{n,3}(0) = u'(0),$$

$$\sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n N_{n,3}(\bar{x}_k) = u(\bar{x}_k),\ -3 \le k \le N, \tag{3.2.61}$$

$$\sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n N'_{n,3}(1) = u'(1).$$

Преобразуем СЛАУ (3.2.61) в соответствии с [46]. Для этого вычислим значения входящих в нее кубических сплайнов и их производных по формулам (3.2.58), (3.2.59) и исключим из двух первых и двух последних уравнений неизвестные α_{-3} и α_{N-1}. В результате формулы для α_{-3} и α_{N-1} будут иметь вид

$$\alpha_{-3} = \alpha_{-1} - 2hu'(0),\ \alpha_{N-1} = \alpha_{N-3} + 2Hu'(1), \tag{3.2.62}$$

а СЛАУ для остальных коэффициентов после умножения на 6 всех уравнений примет вид

$$A\alpha = U, \tag{3.2.63}$$

где $A = \{a_{nk}\}, -2 \leq n, k \leq N-2$ — $(N+1) \times (N+1)$- матрица, $U = (U_{-2}, U_{-1}, \cdots, U_{N-2})^T$ — $(N+1)$-вектор. При этом ненулевые элементы матрицы A имеют вид

$$a_{nn} = 4,\, a_{nn-1} = a_{nn+1} = 1,\, n \in [-1, N/2-2] \cup [N/2+2, N-3], \tag{3.2.64}$$

$$a_{(-2)(-1)} = a_{(N-2)(N-3)} = 2,\, a_{(-2)(-2)} = a_{(N-2)(N-2)} = 4, \tag{3.2.65}$$

$$a_{(N/2-2)(N/2-3)} = 1,\, a_{(N/2-2)(N/2-2)} = 2,\; a_{(-2)(-2)} = a_{(N-2)(N-2)} = 4, \tag{3.2.66}$$

$$a_{(N/2-1)(N/2-2)} = 1,\, a_{(N/2-1)(N/2-1)} = 2 + \frac{3(h+H)}{2h+H},\, a_{(N/2-1)(N/2)} = \frac{3h}{2h+H}, \tag{3.2.67}$$

$$a_{(N/2+1)(N/2)} = \frac{3H}{2H+h},\, a_{(N/2+1)(N/2+1)} = 2 + \frac{3(h+H)}{2H+h},\, a_{(N/2+1)(N/2+2)} = 1, \tag{3.2.68}$$

$$\begin{gathered} a_{(N/2)(N/2-1)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{H^2}{(H+2h)(h+H)}, \\ a_{(N/2)(N/2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2h+H/2}{2h+H} \cdot \frac{H}{H+h} + \frac{H}{2H+h}\Big(\frac{9}{4} \cdot \frac{H+2h}{H+h} + \frac{27}{8}\Big), \\ a_{(N/2)(N/2+1)} = \frac{H+2h}{2H+h}\Big(\frac{3}{4} \cdot \frac{H+2h}{H+h} + \frac{9}{8}\Big),\, a_{(N/2)(N/2+2)} = \frac{1}{8}, \end{gathered} \tag{3.2.69}$$

а остальные элементы равны нулю.

Элементы вектора U имеют вид

$$U_{-2} = 6u(0) + 2hu'(0),\, U_n = u(x_{n+2}),\, -1 \leq n \leq N-3,\, U_{N-2} = 6u(1) - 2Hu'(1). \tag{3.2.70}$$

Обозначим

$$\bar{a}_{nk} = \lim_{h/H \to 0} a_{nk}.$$

Тогда из (3.2.69) получаем, что

$$\bar{a}_{(N/2)(N/2-1)} = \frac{3}{4},\, \bar{a}_{(N/2)(N/2)} = \frac{3}{4} + \frac{45}{16},\, \bar{a}_{(N/2)(N/2+1)} = \frac{25}{16},\, \bar{a}_{(N/2)(N/2+2)} = \frac{1}{8}. \tag{3.2.71}$$

Из (3.2.64)-(3.2.68) вытекает, что во всех строках, кроме строки с номером $N/2$, матрица A имеет диагональное преобладание с показателем преобладания, не зависящим от H, h. Но из (3.2.71) следует, что при достаточно малых h/H в строке с номером $N/2$ также будет диагональное преобладание с показателем преобладания, не зависящим от H, h. Тем самым доказана следующая лемма.

Лемма 7 *Найдутся такие $\gamma_0 > 0, r > 0$ не зависящие от ε, N, что при $h/H < \gamma_0$ матрица A имеет строгое диагональное преобладание по строкам с показателем преобладания r.*

Изучим аппроксимационные свойства пространства $S(\Omega, 3, 1)$.

Лемма 8 *Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет оценкам (3.2.2). Тогда найдется такая функция $gp_3(x) \in S(\Omega, 3, 1)$, что будут справедливы оценки*

$$\| u(x) - gp_3(x) \|_{C[0,1]} \leq CN^{-4} \ln^4 N, \tag{3.2.72}$$

$$\| h_{n+1}(u'(x) - gp_3'(x)) \|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq CN^{-4} \ln^4 N,\ n = \overline{0, N-1}. \tag{3.2.73}$$

Доказательство. Как говорилось выше, можно считать, что $\alpha = 1$. Будем считать функцию $u(x)$ продолженной левее точки $x = 0$ и правее точки $x = 1$ многочленами Тейлора третьей степени с центрами в $x = 0$ и $x = 1$ соответственно. Обозначим через P_3 множество всех многочленов третьей степени. Тогда, согласно [41, с.137], существует такая функция $gp_3(x) \in S(\Omega, 3, 1)$, что справедливы оценки

$$\| u(x) - gp_3(x) \|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C \inf_{g \in P_3} \| u(x) - g(x) \|_{C[x_{n-2}, x_{n+3}]} . \tag{3.2.74}$$

Зафиксируем произвольный отрезок $[x_n, x_{n+1}]$. Обозначим через $P_n(x)$ многочлен Тейлора степени 3 функции $u(x)$ с центром разложения в точке x_{n+3}. Имеем

$$u(x) = P_n(x) + \frac{1}{3!} \int_{x_{n+3}}^{x} (x - s)^3 u^{(4)}(s) ds. \tag{3.2.75}$$

Из (3.2.75), (3.2.2) при $\alpha = 1$, получаем для $0 \leq n \leq N/2 - 3$

$$\| u(x) - P_n(x) \|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq Ch^4 (1 + \varepsilon^{-4} e^{-\frac{x_{n-2}}{\varepsilon}}) \leq C_1 h^4 (1 + \varepsilon^{-4}),$$

откуда с учетом $h = O^*(\varepsilon \ln N/N)$

$$\| u(x) - P_n(x) \|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C_2 \frac{\ln^4 N}{N^4},\ 0 \leq n \leq N/2 - 3. \tag{3.2.76}$$

Пусть $N/2 - 2 \leq n \leq N - 1$. Тогда

$$| \int_{x_{n+3}}^{x} (x - s)^3 u^{(4)}(s) ds | \leq C \int_{x}^{x_{n+3}} (s - x)^3 (1 + \varepsilon^{-4} e^{-\frac{s}{\varepsilon}}) ds \leq CH^4 +$$

$$+ Ce^{-\frac{x}{\varepsilon}} \int_{x}^{x_{n+3}} (s - x)^3 \varepsilon^{-4} e^{-\frac{s-x}{\varepsilon}} ds = CH^4 + Ce^{-\frac{x}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x}^{x_{n+3}} \Big(\frac{s - x}{\varepsilon} \Big)^3 e^{-\frac{s-x}{\varepsilon}} ds \leq$$

$$\leq CH^4 + C_1 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \leq CH^4 + C_1 e^{-\frac{x_{n-2}}{\varepsilon}} \leq CH^4 + C_2 e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \leq \frac{C_3}{N^4} \leq C_3 \frac{\ln^4 N}{N^4}. \quad (3.2.77)$$

Из (3.2.75), (3.2.77) получаем, что

$$\parallel u(x) - P_n(x) \parallel_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C_4 \frac{\ln^4 N}{N^4},\ N/2 - 2 \leq n \leq N - 1. \quad (3.2.78)$$

Из (3.2.74), (3.2.76), (3.2.78) получаем (3.2.72).

Докажем (3.2.73). Для этого заметим, что в силу (3.2.72), (3.2.74), (3.2.75) будет

$$\parallel gp_3(x) - P_n(x) \parallel_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C_2 \frac{\ln^4 N}{N^4},\ 0 \leq n \leq N - 1. \quad (3.2.79)$$

Но функция $gp_3(x) - P_n(x)$ на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ есть многочлен третьей степени. Поэтому в силу эквивалентности норм в пространстве многочленов третьей степени на фиксированном отрезке будем иметь

$$\parallel gp_3'(x) - P_n'(x) \parallel_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq \frac{C}{h_{n+1}} \parallel gp_3(x) - P_n(x) \parallel_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq \frac{C_3}{h_{n+1}} \frac{\ln^4 N}{N^4}. \quad (3.2.80)$$

Далее, дифференцируя равенство (3.2.75), получим

$$u'(x) = P_n'(x) + \frac{1}{2!} \int_{x_{n+3}}^{x} (x - s)^2 u^{(4)}(s) ds. \quad (3.2.81)$$

Повторяя для (3.2.81) выкладки, проделанные с (3.2.75) при доказательстве (3.2.72), находим

$$\parallel u'(x) - P_n'(x) \parallel_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C_3 \frac{1}{\varepsilon} \frac{\ln^3 N}{N^3},\ 0 \leq n \leq N - 1. \quad (3.2.82)$$

Из (3.2.80), (3.2.82) с учетом $h_1 = h = O^*(\varepsilon \ln N/N)$ получаем (3.2.73) для $n = 0$. В случае $n = N - 1$ заметим, что в силу замечания 2

$$\parallel u^{(4)} \parallel_{C[x_{N-3}, x_{N+2}]} \leq C(1 + \varepsilon^{-4} e^{-1/(4\varepsilon)}) \leq C_1.$$

Поэтому для этого отрезка из (3.2.80), (3.2.81) сразу получаем (3.2.73) для $n = N-1$. Лемма доказана.

Установим аналогичный результат в случае равномерного разбиения Δ.

Лемма 9 *Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет оценкам (3.2.2). Тогда найдется такая функция $gp_3(x) \in S(\Delta, 3, 1)$, что будут справедливы оценки:*

$$\parallel u(x) - gp_3(x) \parallel_{C[0,1]} \leq C(\varepsilon N)^{-4}, \quad (3.2.83)$$

$$\parallel N^{-1}(u'(x) - gp_3'(x)) \parallel_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C(\varepsilon N)^{-4},\ n = 0, N - 1. \quad (3.2.84)$$

Доказательство (3.2.83), (3.2.84) совершенно аналогично (3.2.75)-(3.2.82) с учетом различий сеток Δ и Ω.

3.2.4 Доказательство теорем

Доказательство теорем 2 и 3

Вначале докажем оценки (3.2.11) для $n \le \frac{N}{2} - 1$. Зафиксируем $n \in [0, \frac{N}{2} - 1]$. Пусть $e(x) = g_3(x) - \Phi(x)$. Тогда, поскольку

$$e(x_n) = e(x_{n+1}) = 0, \tag{3.2.85}$$

то рассматривая $e(x)$ как решение краевой задачи $e''(x) = e''(x)$ с условиями (3.2.85) на $[x_n, x_{n+1}]$, получим, что

$$e(x) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} G(x,s) e''(s) ds, \tag{3.2.86}$$

где

$$G(x,s) = \frac{1}{x_{n+1} - x_n} \begin{cases} (x - x_n)(x_{n+1} - s),\ x_n \le x \le s, \\ (s - x_n)(x_{n+1} - x),\ ,\ s < x \le x_{n+1} \end{cases} \tag{3.2.87}$$

— функция Грина.

Поскольку $|G(x,s)| \le (x_{n+1} - x_n) = h$, то из (**??**) получаем

$$|e(x)| \le h \int_{x_n}^{x_{n+1}} |e''(s)| ds \le h^2 \parallel e''(s) \parallel_{C[0,1]}, \tag{3.2.88}$$

Но, согласно ([41], с.43)

$$\|e''(s)\|_{C[0,1]} \le C \inf_{P \in S(\Omega,1,1)} \|\Phi'' - P\|_{C[0,1]}.$$

Выбирая в качестве $P = P(x)$ линейный сплайн, интерполирующий $\Phi''(x)$ в узлах сетки, из оценки (3.2.2) и оценки погрешности линейной интерполяции получаем, что

$$\|e''(s)\|_{C[0,1]} \le \frac{C}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\ln^2 N}{N^2}. \tag{3.2.89}$$

Но, поскольку $h^2 = O(\varepsilon^2 \frac{\ln^2 N}{N^2})$, из (3.2.88), (3.2.89) получаем оценку (3.2.11) для $n \le \frac{N}{2} - 1$.

Замечание 5 *Оценки (3.2.11) при $n \in [0, \frac{N}{2} - 1]$ доказаны и при $N^{-1} \le C\varepsilon$, т.е. в условиях теоремы 2.*

Докажем теорему 2 и оценки (3.2.11) при $n \ge N/2$. Пусть $N^{-1} \le C\varepsilon$. В силу (3.2.86) и леммы 6 имеем

$$\|e(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} = \Big\| \int_{x_n}^{x_{n+1}} G(x,s) e''(s) ds \Big\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \le \tfrac{C}{N} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |e''(s)| ds \le$$

$$\leq \tfrac{C}{N^2}\|e''(s)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \leq \frac{C_1}{N^2}\|\Phi''(s)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \leq \tfrac{C_1}{N^2}\|\Phi''(s)\|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]} \leq$$
$$\leq \tfrac{C_1}{N^2}\cdot\tfrac{1}{\varepsilon^2 N^4} \leq \tfrac{C_2}{N^4}.$$

Отсюда с учетом замечания 5 следует теорема 2.

Пусть теперь $\varepsilon \leq CN^{-1}$. Тогда аналогичным образом имеем

$$\| e(x) \|_{C[x_n,x_{n+1}]} \leq \tfrac{C}{N}\int_{x_n}^{x_{n+1}} |e''(s)|ds \leq \tfrac{C}{N}\left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} |\Phi''(s)|ds + \int_{x_n}^{x_{n+1}} |g_3''(s)|ds\right). \tag{3.2.90}$$

Далее

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |\Phi''(s)|ds \leq \frac{C}{\varepsilon^2}\int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}ds \leq \frac{C}{\varepsilon}e^{-\frac{x_n}{\varepsilon}} = \frac{C}{\varepsilon}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\cdot e^{-\frac{x_n - x_{N/2}}{\varepsilon}} \leq$$
$$\leq \frac{C_1}{\varepsilon}N^{-4}e^{-(n-N/2)\frac{H}{\varepsilon}} \leq \frac{C_1}{\varepsilon}N^{-4}e^{-\beta(n-N/2)}, \tag{3.2.91}$$

и, учитывая (3.2.57),

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |g_3''(s)|ds \leq CN^{-1}\tfrac{\varepsilon}{H}\tfrac{1}{\varepsilon^2}e^{-x_{N/2}/\varepsilon}e^{-\beta|n-\frac{N}{2}|} \leq C\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}N^{-4}e^{-\beta|n-\frac{N}{2}|} = \tfrac{C}{\varepsilon}N^{-4}e^{-\beta|n-\frac{N}{2}|}. \tag{3.2.92}$$

Из (3.2.90)-(3.2.92) вытекают оценки (3.2.11) при $N/2 \leq n \leq N-1$. Теорема 3 доказана полностью.

Доказательство теоремы 4. Пусть $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Докажем оценку (3.2.12) при $n = N/2$. Для этого заметим, что в силу леммы 6, (3.2.57) и того, что $e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} = N^{-4}$ будет иметь место оценка

$$\| g_3''(x) \|_{C[x_{N/2},x_{N2+1}]} \geq C\frac{N^{-3}}{\varepsilon}. \tag{3.2.93}$$

Оценим $e(x)$ на $[x_{\frac{N}{2}}, x_{\frac{N}{2}+1}]$ снизу. В силу (3.2.86) при $n = \frac{N}{2}$ имеем

$$\| e(x) \|_{C[x_{N/2},x_{N2+1}]} \geq \left\| \int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s)g_3''(s)ds \right\|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]} -$$
$$- \left\| \int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s)\Phi''(s)ds \right\|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]}. \tag{3.2.94}$$

Далее в силу (3.2.87) при любом $x \in [x_{N/2}, x_{N/2+1}]$ имеем

$$\left| \int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s)\Phi''(s)ds \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{x_{N/2+1} - x_{N/2}}\int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} (x_{N/2+1} - x)(s - x_{N/2})\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{s}{\varepsilon}}ds \leq$$

$$\leq e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} \frac{s - x_{N/2}}{\varepsilon} e^{-\frac{s-x_{N/2}}{\varepsilon}} ds \leq C e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \leq CN^{-4},$$

откуда

$$\left\| \int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s) \Phi''(s) ds \right\|_{C[x_{N/2}, x_{N/2+1}]} \leq CN^{-4}. \qquad (3.2.95)$$

Докажем, что найдется такая константа $C_1 > 0$, что

$$\left\| \int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s) g_3''(s) ds \right\|_{C[x_{N/2}, x_{N/2+1}]} \geq C_1 \frac{N^{-5}}{\varepsilon}. \qquad (3.2.96)$$

Сделаем замену переменной $\frac{s - x_{N/2}}{H} = \tau$ и обозначим $v(\tau) = \varepsilon N^3 g_3''(x_{N/2} + \tau H)$. Тогда оценка (3.2.96) эквивалентна тому, что

$$\left\| \int_0^1 \tilde{G}(x,s) v(s) ds \right\|_{C[0,1]} \geq C_2 > 0, \qquad (3.2.97)$$

где $\tilde{G}(x,s)$ — функция Грина (3.2.87) при $x_n = 0$, $x_{n+1} = 1$, $v(\tau)$ — линейная функция, причем

$$\|v(\tau)\|_{C[0,1]} \geq C > 0. \qquad (3.2.98)$$

Докажем (3.2.97). Предположим противное. Тогда существуют последовательности констант $C_j \to 0$ и функций $v_j(\tau) = a_j \tau + b_j : \|v_j(\tau)\|_{C[0,1]} = 1$ таких, что при $j \to \infty$.

$$\| \int_0^1 \tilde{G}(\tau,s) v_j(s) ds \|_{C[0,1]} \leq C_j \to 0.$$

Но последовательности a_j и b_j ограничены и из них можно выделить сходящиеся подпоследовательности. Переходя к пределу, получим, что для некоторой функции $v(\tau) = a\tau + b$ такой, что $\| v(\tau) \|_{C[0,1]} = 1$ будет

$$\int_0^1 \tilde{G}(\tau,s) v(s) ds \equiv 0.$$

Но функция в левой части последнего тождества есть решение задачи $y'' = v$, $y(0) = y(1) = 0$, которое не может быть тождественно нулевым при $v \not\equiv 0$. Полученное противоречие доказывает (3.2.97). Из (3.2.94)-(3.2.96) получаем, что найдется такая не зависящая от ε, N константа C, что при $\varepsilon \leq CN^{-1}$ будут справедливы оценки

$$\| e(x) \|_{C[x_{N/2}, x_{N/2+1}]} \geq C_1 \tfrac{N^{-5}}{\varepsilon},$$

откуда следует оценка (3.2.12) для $n = N/2$. Доказательство для остальных n с учетом леммы 5 совершенно аналогично.

Доказательство теоремы 5. Введем в рассмотрение функцию $err(x) = gm_3(x) - gp_3(x)$. Представим ее в виде

$$err(x) = \sum_{n=-3}^{N-1} \beta_n N_{n,3}(x). \tag{3.2.99}$$

Тогда аналогично (3.2.61)-(3.2.63) для коэффициентов β получим систему

$$A\beta = ERR, \tag{3.2.100}$$

и

$$\beta_{-3} = \beta_{-1} - 2h \cdot err'(0),\ \beta_{N-1} = \beta_{N-3} + 2H \cdot err'(1), \tag{3.2.101}$$

где

$$err'(0) = u'(0) - gp_3'(0),\ err'(1) = u'(1) - gp_3'(1), \tag{3.2.102}$$

$$ERR = \{ERR_n\},\ ERR_n = 6(u(x_{n+2}) - gp_3(x_{n+2})),\ -2 \le n \le N-2, \tag{3.2.103}$$

причем в силу леммы 8 и (3.2.102)-(3.2.103) будут справедливы оценки

$$\max\{|h \cdot err'(0)|, |H \cdot err'(1)|\} \le C\tfrac{\ln^4 N}{N^4},\ \max_{-2\le n\le N-2} |ERR_n| \le C\tfrac{\ln^4 N}{N^4}. \tag{3.2.104}$$

Из леммы 8 и (3.2.101), (3.2.104) получаем, что $\max\limits_{-3\le n\le N-1} |\beta_n| \le C\frac{\ln^4 N}{N^4}$, откуда

$$\| err(x) \|_{C[x_n,x_{n+1}]} \le C\tfrac{\ln^4 N}{N^4},\ 0 \le n \le N-1. \tag{3.2.105}$$

Из (3.2.105) и леммы 8 получаем утверждение теоремы 5.

Доказательство теоремы 1. Оценки (3.2.5) доказываются аналогично (3.2.14) с применением леммы 9 вместо леммы 8. Докажем (3.2.6).

Поскольку для составляющей $q(x)$ в силу (3.2.9) погрешность интерполяции порядка $O(N^{-4})$, то достаточно показать, что

$$\| e^{-x/\varepsilon} - g_3(x,\Phi) \|_{C[0,x_1]} \ge C_1 \min\{(N\varepsilon)^{-1}, (N\varepsilon)^{-4}\}. \tag{3.2.106}$$

Делая замену переменной $x/\varepsilon = \tau$, получим, что (3.2.106) эквивалентно формуле

$$\| e^{-\tau} - g_3(\varepsilon\tau,\Phi) \|_{C[0,(N\varepsilon)^{-1}]} \ge C_1 \min\{(N\varepsilon)^{-1}, (N\varepsilon)^{-4}\}. \tag{3.2.107}$$

Рассмотрим два случая:

1. $(N\varepsilon)^{-1} \ge C_2 > 0$ и

2. $(N\varepsilon)^{-1} \leq \gamma_0$, где $\gamma_0 > 0$ достаточно малая, но не зависящая от N, ε константа.

Пусть $(N\varepsilon)^{-1} \geq C_2 > 0$. Тогда имеем

$$\| e^{-\tau} - g_3(\varepsilon\tau, \Phi) \|_{C[0,(N\varepsilon)^{-1}]} \geq C \| e^{-\tau} \|_{C[0,(N\varepsilon)^{-1}]},$$

поскольку погрешность аппроксимации экспоненты многочленом фиксированной степени на отрезке длины $O^*(1)$ не может быть меньше величины порядка C-нормы экспоненты на этом отрезке [27]. Но тогда из цепочки неравенств

$$\| u - v \| \geq C \| u \|, \; C \| u - v \| \geq C \| v \| - C \| u \|, \; (1 + C) \| u - v \| \geq C \| v \|$$

получаем, что

$$\| e^{-\tau} - g_3(\varepsilon\tau, \Phi) \|_{C[0,(N\varepsilon)^{-1}]} \geq \tfrac{C}{1+C} \| g_3(\varepsilon\tau, \Phi) \|_{C[0,(N\varepsilon)^{-1}]} = C_1 \| g_3(\varepsilon\tau, \Phi) \|_{C[0,(N\varepsilon)^{-1}]} . \tag{3.2.108}$$

Наконец, в силу условия $g_3'(0, \Phi) = \Phi'(0) = -\varepsilon^{-1}$ будет

$$\| g_3(\varepsilon\tau, \Phi) \|_{C[0,(N\varepsilon)^{-1}]} = \|g_3(x, \Phi)\|_{C[0,N^{-1}]} = \left\|a_0x^3 + a_1x^2 - \tfrac{1}{\varepsilon}x + a_3\right\|_{C[0,N^{-1}]} =$$

$$= \left\| \frac{a_0}{N^3}y^3 + \frac{a_1}{N^2}y^2 - \frac{1}{N\varepsilon}y + a_3 \right\|_{C[0,1]} \geq \tfrac{C_3}{\varepsilon N}. \tag{3.2.109}$$

Из (3.2.108), (3.2.109) вытекает (3.2.107) в случае 1.

Пусть $(N\varepsilon)^{-1} \leq \gamma_0$ где $\gamma_0 > 0$ достаточно малая, но не зависящая от N, ε константа. Тогда представим

$$e^{-\tau} = \tfrac{\tau^4}{4!} + Q_3(\tau) + O\left((N\varepsilon)^{-5}\right), \tag{3.2.110}$$

где $Q_3(\tau)$ — многочлен Тейлора третьей степени функции $e^{-\tau}$ с центром в нуле. Тогда аналогично (3.2.109) получим, что

$$\inf_{P \in P_3} \left\| \frac{\tau^4}{4!} + Q_3(\tau) - P(\tau) \right\|_{C[0,(N\varepsilon)^{-1}]} \geq C_3(N\varepsilon)^{-4}. \tag{3.2.111}$$

Из (3.2.110), (3.2.111) при достаточно малом $\gamma_0 > 0$ аналогично (3.2.108), (3.2.109) получаем (3.2.107) в рассматриваемом случае. Теорема 1 доказана.

3.2.5 Результаты численных экспериментов

Зададим функцию вида (3.2.1):

$$u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}},\ x \in [0,1].$$

Результаты расчетов сведены в три таблицы. В таблицах приведены максимальные погрешности сплайновой интерполяции, вычисленные в узлах сгущенной сетки, получающейся из исходной расчетной сетки разбиением каждого ее сеточного интервала на 10 равных частей. В табл. 1 приведены погрешности для традиционного кубического сплайна на равномерной сетке. Они подтверждают оценки теоремы 1 и непригодность применения равномерной сетки при малых ε. В табл. 2 приведены погрешности для традиционного кубического сплайна на сетке Шишкина. Из таблицы видно, что погрешность возрастает при уменьшении ε для фиксированного N. Результаты табл. 3 для модифицированного сплайна, напротив, демонстрируют равномерную сходимость, что подтверждает теореме 5. На рисунках 1-3 представлены графики $u(x)$ и $g_3(x,u)$ при $\varepsilon = 10^{-7}$, $N = 16$ на кусочно-равномерной сетке Шишкина в разных масштабах. На рисунке 1 приведены графики $u(x)$ и $g_3(x,u)$, иллюстрирующие расходимость традиционного интерполяционного процесса при $\varepsilon N^5 \to 0$ для кусочно-равномерной сетки, что соответствует теореме 4. Поскольку пограничный слой в этом случае имеет длину $O(10^{-6})$, то на рис. 2 и 3 приведены те же графики в других масштабах по оси OX. Из рис. 2 видно, что в области пограничного слоя графики $u(x)$ и $g_3(x,u)$ близки друг к другу и сливаются в одну линию, что соответствует оценке погрешности сплайна в пограничном слое по теореме 3, а из рис. 3 видно, как эти графики расходятся при выходе из пограничного слоя.

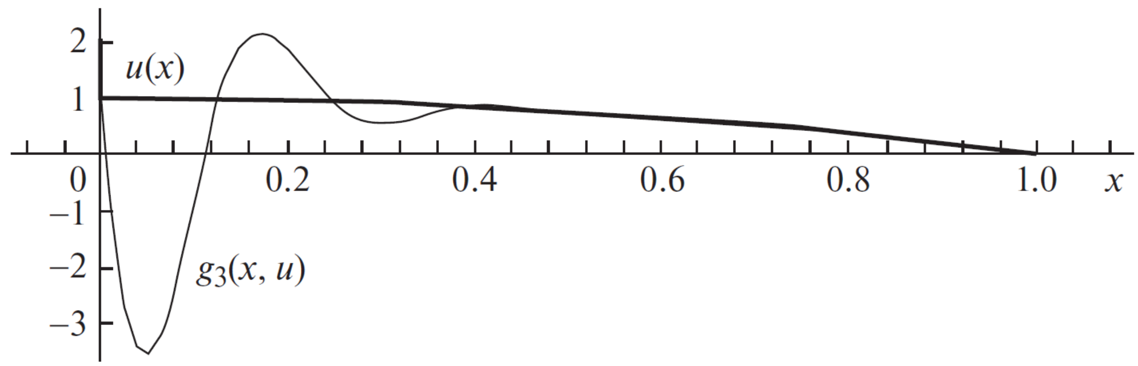

Рис. 3.2: Графики $u(x)$ и $g_3(x, u)$, масштаб 1 : 1

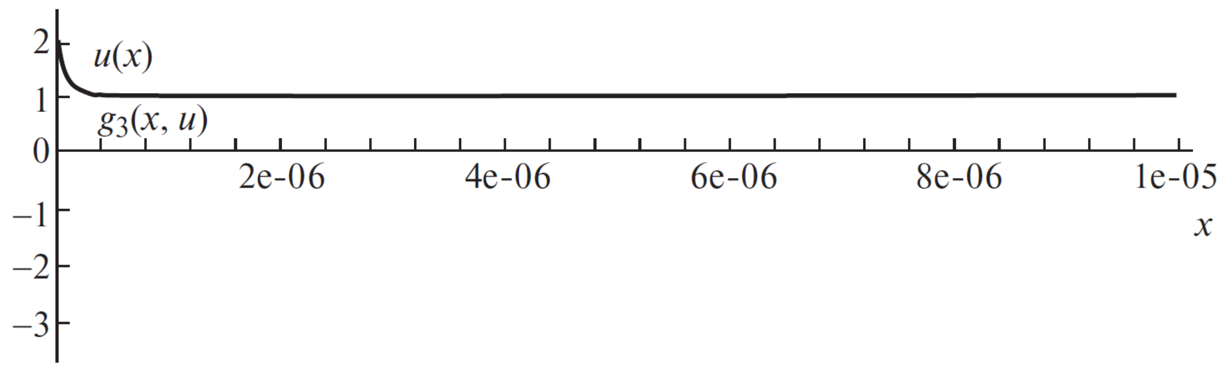

Рис. 3.3: Графики $u(x)$ и $g_3(x, u)$, масштаб 1 : 10^{-5}

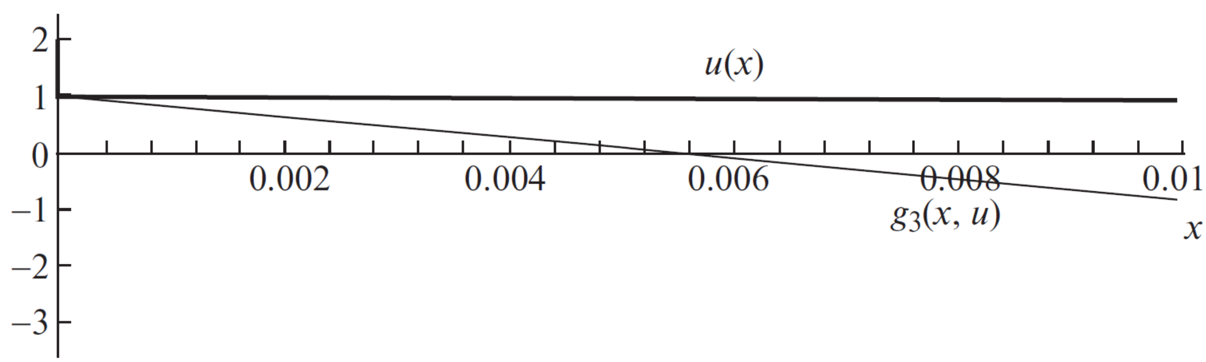

Рис. 3.4: Графики $u(x)$ и $g_3(x, u)$, масштаб 1 : 10^{-2}

Таблица 3.1: Погрешность кубического сплайна на равномерной сетке

	$N=2^4$	$N=2^5$	$N=2^6$	$N=2^7$	$N=2^8$	$N=2^9$
$\varepsilon=1$	$2.82\cdot10^{-7}$	$1.76\cdot10^{-8}$	$1.16\cdot10^{-9}$	$1.02\cdot10^{-10}$	$4.30\cdot10^{-12}$	$2.68\cdot10^{-13}$
10^{-1}	$3.43\cdot10^{-4}$	$2.33\cdot10^{-5}$	$1.51\cdot10^{-6}$	$9.58\cdot10^{-8}$	$6.03\cdot10^{-9}$	$4.11\cdot10^{-10}$
10^{-2}	0.43	$8.38\cdot10^{-2}$	$9.72\cdot10^{-3}$	$8.00\cdot10^{-4}$	$5.59\cdot10^{-5}$	$3.65\cdot10^{-6}$
10^{-3}	9.88	4.58	1.93	0.66	0.15	$2.03\cdot10^{-2}$
10^{-4}	$1.05\cdot10^{2}$	$5.23\cdot10^{1}$	$2.58\cdot10^{1}$	$1.25\cdot10^{1}$	5.90	2.59
10^{-5}	$1.06\cdot10^{3}$	$5.30\cdot10^{2}$	$2.64\cdot10^{2}$	$1.32\cdot10^{2}$	$6.56\cdot10^{1}$	$3.24\cdot10^{1}$
10^{-6}	$1.06\cdot10^{4}$	$5.30\cdot10^{3}$	$2.65\cdot10^{3}$	$1.33\cdot10^{3}$	$6.62\cdot10^{2}$	$3.30\cdot10^{2}$
10^{-7}	$1.06\cdot10^{5}$	$5.30\cdot10^{4}$	$2.65\cdot10^{4}$	$1.33\cdot10^{4}$	$6.63\cdot10^{3}$	$3.30\cdot10^{3}$
10^{-8}	$1.06\cdot10^{6}$	$5.30\cdot10^{5}$	$2.65\cdot10^{5}$	$1.33\cdot10^{5}$	$6.63\cdot10^{4}$	$3.31\cdot10^{4}$

Таблица 3.2: Погрешность кубического сплайна на кусочно-равномерной сетке с параметром σ из (3.2.8)

	$N=2^4$	$N=2^5$	$N=2^6$	$N=2^7$	$N=2^8$	$N=2^9$
$\varepsilon=1$	$2.82\cdot10^{-7}$	$1.76\cdot10^{-8}$	$1.16\cdot10^{-9}$	$1.02\cdot10^{-10}$	$4.30\cdot10^{-12}$	$2.68\cdot10^{-13}$
10^{-1}	$3.43\cdot10^{-4}$	$2.33\cdot10^{-5}$	$1.51\cdot10^{-6}$	$9.58\cdot10^{-8}$	$6.03\cdot10^{-9}$	$4.11\cdot10^{-10}$
10^{-2}	$6.43\cdot10^{-3}$	$1.18\cdot10^{-3}$	$1.70\cdot10^{-4}$	$2.07\cdot10^{-5}$	$2.27\cdot10^{-6}$	$2.31\cdot10^{-7}$
10^{-3}	$6.43\cdot10^{-3}$	$1.18\cdot10^{-3}$	$1.70\cdot10^{-4}$	$2.07\cdot10^{-5}$	$2.27\cdot10^{-6}$	$2.31\cdot10^{-7}$
10^{-4}	$6.43\cdot10^{-3}$	$1.18\cdot10^{-3}$	$1.70\cdot10^{-4}$	$2.07\cdot10^{-5}$	$2.27\cdot10^{-6}$	$2.31\cdot10^{-7}$
10^{-5}	$4.47\cdot10^{-2}$	$1.25\cdot10^{-3}$	$1.70\cdot10^{-4}$	$2.07\cdot10^{-5}$	$2.27\cdot10^{-6}$	$2.31\cdot10^{-7}$
10^{-6}	$4.47\cdot10^{-1}$	$1.25\cdot10^{-2}$	$3.62\cdot10^{-4}$	$2.07\cdot10^{-5}$	$2.27\cdot10^{-6}$	$2.31\cdot10^{-7}$
10^{-7}	4.47	$1.25\cdot10^{-1}$	$3.62\cdot10^{-3}$	$1.07\cdot10^{-4}$	$3.24\cdot10^{-6}$	$2.31\cdot10^{-7}$
10^{-8}	44.7	1.25	$3.62\cdot10^{-2}$	$1.07\cdot10^{-3}$	$3.24\cdot10^{-5}$	$9.92\cdot10^{-7}$

Таблица 3.3: Погрешность модифицированного кубического сплайна на кусочно-равномерной сетке с параметром σ из (3.2.8)

	$N = 2^4$	$N = 2^5$	$N = 2^6$	$N = 2^7$	$N = 2^8$	$N = 2^9$
$\varepsilon = 1$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$	$4.9 \cdot 10^{-12}$	$3.1 \cdot 10^{-13}$
10^{-1}	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$9.6 \cdot 10^{-8}$	$6.0 \cdot 10^{-9}$	$4.1 \cdot 10^{-10}$
10^{-2}	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$
10^{-3}	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$
10^{-4}	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$
10^{-5}	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$
10^{-6}	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$
10^{-7}	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$
10^{-8}	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$

Глава 4

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ L-СПЛАЙНАМИ ФУНКЦИЙ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Пусть $\varepsilon \in (0, +\infty)$ – положительный параметр, $\Omega = \{x_n : x_n = nh, n = 0, 1, \ldots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$ – равномерная сетка интервала $[0, 1]$ с шагом $h = 1/N$. Обозначим через $S(\Omega, k, 1)$ пространство полиномиальных сплайнов степени k дефекта 1 [50] на сетке Ω. В случае необходимости будем считать разбиение Ω продолженным левее точки $x = 0$ и правее точки $x = 1$ на всю ось с шагом h. Напомним, что запись $D = diag\{d_1, \cdots, d_n\}$ означает представление квадратной $n \times n$-диагональной матрицы с диагональными элементами d_i, $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le m \le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{mk}|$ – норма квадратной $n \times n$ матрицы, согласованная с максимум-нормой вектора. Будем говорить, что квадратная матрица $A = \{a_{mk}\}$ имеет диагональное преобладание в строке с номером m с показателем преобладания $r_m > 0$, если справедлива формула $|a_{mm}| - \sum_{k \ne m} |a_{mk}| = r_m$, и что $A = \{a_{mk}\}$ имеет диагональное преобладание по строкам с показателем преобладания $r > 0$, если справедлива формула

$$\min_m \Big(|a_{mm}| - \sum_{k \ne m} |a_{mk}| \Big) = r.$$

4.1 Постановка задачи и формулировка результатов

Через $C_h[0, 1]$ обозначим линейное нормированное пространство функций из $C[0, 1]$, имеющих в точках $x = 0$ и $x = 1$ односторонние производные второго порядка, с нормой $\|u\|_{C,h} = \|u\|_{C[0,1]} + h^2(|u''(0)| + |u''(1)|)$. Если предполагается зависимость функции $u(x)$ от параметра ε, то будем писать $u(x, \varepsilon)$.

Пусть Ω – равномерная сетка интервала $[0, 1]$ с узлами x_n, $n = 0, 1, \ldots, N$ и шагом h, заданная во введении. Предполагаем, что функция $u(x)$ задана в узлах сетки Ω, $u_n = u(x_n)$, $n = 0, 1, \cdots, N$. Зададим пространство L-сплайнов, учитывающих наличие погранслойной составляющей экспоненциального вида у интегрируемой функции:

$$SL(\Omega, 3, 1) = \{S(x) \in C^2[0, 1] : S(x) = a_n + b_n x + c_n x^2 + d_n e^{-x/\varepsilon},$$
$$x \in [x_n, x_{n+1}],\ 0 \le n \le N - 1\}.$$

Интерполяционный L-сплайн $S(x; u) \in SL(\Omega, 3, 1)$ функции $u(x)$ определим из условий

$$S(x_n; u) = u(x_n),\ 0 \le n \le N,\ S''(0; u) = u''(0),\ S''(1; u) = u''(1). \tag{4.1.1}$$

Основным для настоящей работы является случай, когда для интерполируемой функции $u(x, \varepsilon)$ справедлива декомпозиция в виде суммы регулярной и сингулярной составляющих:

$$u(x, \varepsilon) = q(x) + \gamma\Phi(x, \varepsilon),\ |q^{(j)}(x)| \le C_1,\ 0 \le j \le 4,\ \Phi(x, \varepsilon) = e^{-\alpha x/\varepsilon},\ \alpha > 0,\ x \in [0, 1]. \tag{4.1.2}$$

Предполагаем, что в представлении (4.1.2) регулярная составляющая $q(x)$ и постоянная γ не заданы, функция $\Phi(x, \varepsilon)$ известна, ее производные неограниченно растут у границы $x = 0$, если $\varepsilon \to 0$. Представление (4.1.2) соответствует решению краевой задачи для уравнения с малым параметром ε при старшей производной [49].

В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем, что $\alpha = 1$, т.к. этот параметр можно включить в значение ε.

Теорема 1 *Для любой функции $u(x) \in C_h[0, 1]$ при всех $h = 1/N \in (0, 1]$, $\varepsilon \in (0, +\infty)$ существует единственный интерполяционный сплайн $S(x; u) \in SL(\Omega, 3, 1)$, удовлетворяющий условиям (4.1.1), причем справедливы оценки погрешности*

$$\|S(x; u) - u(x)\|_{C[0,1]} \le C \min\left\{\frac{1}{h}, 1 + \frac{h}{\varepsilon}\right\} \inf_{v \in SL(\Omega,3,1)} \|u - v\|_{C,h}. \tag{4.1.3}$$

Если функция $u(x, \varepsilon)$ имеет вид (4.1.2), то справедливы оценки

$$\|S(x; u) - u(x, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \le C \begin{cases} \min\left\{h^3, \frac{h^4}{\varepsilon}\right\},\ \varepsilon \in (0, 1], \\ h^4,\ \varepsilon \in (1, +\infty). \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Замечание 1 *Из (4.1.4) вытекает равномерная по* $\varepsilon \in (0, +\infty)$ *сходимость третьего порядка интерполяционного процесса (4.1.1) для функций вида (4.1.2).*

Сплайн $S(x;u)$, анализируемый в теореме 1, можно применять для вычисления призводных функции с большими градиентами по ее значениям в узлах сетки. Отметим, что применение кубического сплайна на равномерной сетке для вычисления производных такой функции приводит к неприемлемым погрешностям. Эти вопросы исследованы в [4]. Итак, справедлива следующая теорема [4].

Теорема 2 *Для некоторой постоянной* C *при* $j = 1, 2$ *для сплайна* $S(x;u)$ *из теоремы 1 справедливы следующие оценки погрешности :*

$$\| S^{(j)}(x;u) - u^{(j)}(x) \|_{C[0,1]} \leq C \min\left\{h^{3-j}, \frac{h^{4-j}}{\varepsilon}\right\},\ \varepsilon \in (0,1].$$

Теорема 3 *Найдется такая константа* $C_1 > 0$*, что для любых* $\varepsilon \in (0,1]$, $h = 1/N \in (0,1]$ *существуют такая функция* $u(x) \in C_h[0,1]$*, что* $u''(0) = u''(1) = 0$,

$$\|S(x;u) - u(x)\|_{C[0,1]} \geq C_1 \min\left\{\frac{1}{h},\ 1 + \frac{h}{\varepsilon}\right\} \inf_{v \in SL(\Omega,3,1)} \|u - v\|_{C[0,1]} \qquad (4.1.5)$$

и такая функция $u_1(x) \in C^4[0,1]$*, что*

$$\|S(x;u_1) - u_1(x)\|_{C[0,1]} \geq C_1 \min\left\{h^3, \frac{h^4}{\varepsilon}\right\} \|u_1\|_{C[0,1]}. \qquad (4.1.6)$$

Получим некоторые следствия из теорем 1 и 3 для параболического и кубического сплайнов. Пусть $S_3(x;u) \in S(\Omega, 3, 1)$ – интерполяционный кубический сплайн функции $u(x)$, определяемый из условий (4.1.1), а $S_2(x;u) \in S(\Omega, 2, 1)$ – интерполяционный параболический сплайн, определяемый из условий

$$S_2(x_n;u) = u(x_n),\ 0 \leq n \leq N,\ S_2''(1-0;u) = u''(1). \qquad (4.1.7)$$

Изучим предельные по параметру ε свойства экспоненциального сплайна $S(x;u) \in SL(\Omega, 3, 1)$.

Теорема 4 *Для любой функции* $u(x) \in C_h[0,1]$ *интерполяционные сплайны* $S_2(x;u)$ *и* $S_3(x;u)$ *существуют, единственны, и имеют место формулы*

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \|S(x;u) - S_3(x;u)\|_{C[0,1]} = 0, \qquad (4.1.8)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \|S(x;u) - S_2(x;u)\|_{C[0,1]} = 0. \qquad (4.1.9)$$

Следствие 1 *Справедливы следующие оценки*

$$\|S_3(x;u) - u(x)\|_{C[0,1]} \leq C \inf_{v \in S(\Omega,3,1)} \|u - v\|_{C,h}, \tag{4.1.10}$$

$$\|S_2(x;u) - u(x)\|_{C[0,1]} \leq \frac{C}{h} \inf_{v \in S(\Omega,2,1)} \|u - v\|_{C,h}. \tag{4.1.11}$$

Если $u(x) \in C^4[0,1]$, то справедливы оценки погрешности

$$\|S_3(x;u) - u(x)\|_{C[0,1]} \leq Ch^4, \tag{4.1.12}$$

$$\|S_2(x;u) - u(x)\|_{C[0,1]} \leq Ch^3. \tag{4.1.13}$$

Замечание 2 *Оценка (4.1.8) может быть улучшена до следующей [4]:*

$$\lim_{\varepsilon/h \to +\infty} \|S(x;u) - S_3(x;u)\|_{C[0,1]} = 0.$$

Замечание 3 *Оценки (4.1.10), (4.1.12) – хорошо известные оценки погрешности кубической сплайн-интерполяции на равномерных сетках [50]. Оценки (4.1.11), (4.1.13) – это оценки погрешности параболической сплайн-интерполяции в случае совпадения узлов сплайна и узлов интерполяции. В [66], [41] отмечается, что такая постановка задачи параболической сплайн-интерполяции не является удачной. Однако из оценки (4.1.13) следует, что, несмотря на неограниченность совокупности констант Лебега в соответствии с (4.1.11) и теоремой 5 ниже, при повышенной гладкости, когда $u(x) \in C^4[0,1]$, погрешность интерполяции будет иметь такой же порядок, как и в случае обычной интерполяции по Субботину или Марсдену.*

Теорема 5 *Найдется такая константа $C_1 > 0$, что для любого $h = 1/N \in (0,1]$ существует такая функция $u(x) \in C_h[0,1]$, что $u''(0) = u''(1) = 0$, и*

$$\|S_2(x;u) - u(x)\|_{C[0,1]} \geq \frac{C_1}{h} \inf_{v \in SL(\Omega,3,1)} \|u - v\|_{C[0,1]}. \tag{4.1.14}$$

4.2 Вспомогательные результаты

4.2.1 Обобщенные B-сплайны и их свойства

Определим обобщенные B-сплайны первого порядка формулами

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{\frac{x_i - x}{\varepsilon}}}{1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}}}, \ x \in [x_i, x_{i+1}), \\ \frac{e^{\frac{x_{i+1}-x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{h}{\varepsilon}}}{1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}}}, \ x \in [x_{i+1}, x_{i+2}), \\ 0, \ x \notin [x_i, x_{i+2}). \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Обобщенные сплайны более высоких порядков определим рекуррентно:

$$N_{i,k+1}(x)=\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x}(N_{i,k}(s)-N_{i+1,k}(s))ds,\ \ k=1,2,\cdots \tag{4.2.2}$$

Последовательно применяя формулу (4.2.2), находим

$$N_{i,2}(x)=\frac{1}{h(1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}})}\begin{cases}(x-x_i)-\varepsilon(1-e^{\frac{x_i-x}{\varepsilon}}),\ x\in[x_i,x_{i+1}),\\ h+\varepsilon(1+e^{-\frac{h}{\varepsilon}}-2e^{\frac{x_{i+1}-x}{\varepsilon}})-(x-x_{i+1})(1+e^{-\frac{h}{\varepsilon}}),\ x\in[x_{i+1},x_{i+2}),\\ (x-x_{i+2}-\varepsilon-h)e^{-\frac{h}{\varepsilon}}+\varepsilon e^{\frac{x_{i+2}-x}{\varepsilon}},\ x\in[x_{i+2},x_{i+3}),\\ 0,\ x\notin[x_i,x_{i+3}).\end{cases} \tag{4.2.3}$$

$$N_{i,3}(x)=\frac{1}{h^2(1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}})}\begin{cases}\frac{(x-x_i)^2}{2}-\varepsilon(x-x_i)+\varepsilon^2(1-e^{\frac{x_i-x}{\varepsilon}}),x\in[x_i,x_{i+1}),\\ \frac{h^2}{2}-\varepsilon h+\varepsilon^2(1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}})+(h+\varepsilon(2+e^{-\frac{h}{\varepsilon}}))(x-x_{i+1})-\\ -(2+e^{-\frac{h}{\varepsilon}})\frac{(x-x_{i+1})^2}{2}-3\varepsilon^2(1-e^{\frac{x_{i+1}-x}{\varepsilon}}),x\in[x_{i+1},x_{i+2}),\\ (\frac{h^2}{2}-2\varepsilon^2)(1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}})+\varepsilon h(1+e^{-\frac{h}{\varepsilon}})-\\ -((2\varepsilon+h)e^{-\frac{h}{\varepsilon}}+\varepsilon+h)(x-x_{i+2})+\\ +\frac{(x-x_{i+2})^2}{2}(1+2e^{-\frac{h}{\varepsilon}})+3\varepsilon^2(1-e^{\frac{x_{i+2}-x}{\varepsilon}}),x\in[x_{i+2},x_{i+3}),\\ \varepsilon^2-(\frac{h^2}{2}+\varepsilon^2+\varepsilon h)e^{-\frac{h}{\varepsilon}}-\frac{(x-x_{i+3})^2}{2}e^{-\frac{h}{\varepsilon}}+\\ +(\varepsilon+h)e^{-\frac{h}{\varepsilon}}(x-x_{i+3})-\varepsilon^2(1-e^{\frac{x_{i+3}-x}{\varepsilon}}),x\in[x_{i+3},x_{i+4}),\\ 0,\ \ x\notin[x_i,x_{i+4}).\end{cases} \tag{4.2.4}$$

Из (4.2.2), (4.2.4)находим

$$N_{i,3}(x_j)=\begin{cases}\frac{1}{2(1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}})}-\frac{\varepsilon}{h(1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}})}+\frac{\varepsilon^2}{h^2},j=i+1,\\ \frac{1}{2}-\frac{2\varepsilon^2}{h^2}+\frac{\varepsilon}{h}\cdot\frac{1+e^{-\frac{h}{\varepsilon}}}{1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}}},j=i+2,\\ \frac{\varepsilon^2}{h^2}-\frac{e^{-\frac{h}{\varepsilon}}}{1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}}}(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{h}),j=i+3,\\ 0,j\notin[i+1,i+3].\end{cases} \tag{4.2.5}$$

$$N'_{i,3}(x_j)=\frac{1}{h}(N_{i,2}(x_j)-N_{i+1,2}(x_j))=\frac{1}{h}\begin{cases}-\frac{\varepsilon}{h}+\frac{1}{1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}}},j=i+1,\\ -\left(\frac{1+e^{-\frac{h}{\varepsilon}}}{1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}}}-\frac{2\varepsilon}{h}\right),j=i+2,\\ -\frac{\varepsilon}{h}+\frac{e^{-\frac{h}{\varepsilon}}}{1-e^{-\frac{h}{\varepsilon}}},j=i+3,\\ 0,j\notin[i+1,i+3].\end{cases} \tag{4.2.6}$$

$$N''_{i,3}(x_j)=\frac{1}{h^2}(N_{i,1}(x_j)-2N_{i+1,1}(x_j)+N_{i+2,1}(x_j))=\begin{cases}\frac{1}{h^2},j=i+1,\\ -\frac{2}{h^2},j=i+2,\\ \frac{1}{h^2},j=i+3,\\ 0,j\notin[i+1,i+3].\end{cases} \tag{4.2.7}$$

Лемма 1 *Справедливы формулы*

$$N_{i,3}(x) \geq 0,\ -\infty < i < +\infty, \tag{4.2.8}$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} N_{i,3}(x) \equiv 1, \tag{4.2.9}$$

$$\left\| \sum_{i=-3}^{N-1} \beta_i N_{i,3}(x) \right\|_{C[0,1]} \leq \max_{-3\leq i\leq N-1} |\beta_i|. \tag{4.2.10}$$

Доказательство. Формулы (4.2.8) непосредственно вытекают из (4.2.1), (4.2.2). Далее из (4.2.2) находим для любых натуральных $j,\ k,\ j<k$

$$\sum_{i=j}^{k} N'_{i,3}(x) = \frac{1}{h}\sum_{i=j}^{k}(N_{i,2}(x) - N_{i+1,2}(x)) = \frac{1}{h}(N_{j,2}(x) - N_{k+1,2}(x)).$$

Поскольку $supp\, N_{i,2} \subset (x_i, x_{i+3})$, то отсюда следует, что $\sum_{i=j}^{k} N'_{i,3}(x) = 0,\ x \in [x_{j+3},\ x_{k+1}]$. В силу произвольности j,k находим $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} N_{i,3}(x) \equiv C = const$. Вычисляя данную сумму в любом узле x_j согласно (4.2.5), находим $C=1$. Формула (4.2.10) вытекает из (4.2.8), (4.2.9). Лемма доказана.

Обозначим $\bar{x}_j = (x_j + x_{j+1})/2,\ 0 \leq j \leq N-1$.

Лемма 2 *При* $\varepsilon/h \to 0$ *справедливы формулы*

$$N_{i,3}(x_j) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{h} + O(\frac{\varepsilon^2}{h^2}),\ j = i+1, \\ \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{h} + O(\frac{\varepsilon^2}{h^2}),\ j = i+2, \\ O(\frac{\varepsilon^2}{h^2}),\ j = i+3, \\ 0,\ j \notin [i+1, i+3] \end{cases},\ N_{i,3}(\bar{x}_j) = \begin{cases} \frac{1}{8} + O(\frac{\varepsilon}{h}),\ j = i, i+2 \\ \frac{3}{4} + O(\frac{\varepsilon}{h}),\ j = i+1, \\ O(\frac{\varepsilon^2}{h^2}),\ j = i+3, \\ 0,\ j \notin [i, i+3]. \end{cases} \tag{4.2.11}$$

Доказательство непосредственно получается из формул (4.2.4), (4.2.5).

Наконец, отметим свойства вспомогательной функции, связанной с формулой (4.2.5). Пусть

$$f_1(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2}{x^2}. \tag{4.2.12}$$

Лемма 3 *При* $x>0$ *справедливы формулы*

$$f_1(x) > 0,\ f_1'(x) < 0. \tag{4.2.13}$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. При всех $x>0$ неравенство $f_1(x)>0$ эквивалентно $f_2(x) \equiv x + xe^{-x} - 2 + 2e^{-x} > 0$. Далее, $f_2'(x) = 1 - xe^{-x} - e^{-x}$, $f_2''(x) = xe^{-x} > 0$ при $x>0$, $f_2'(0)=0$, $f_2(0)=0$. Следовательно, $f_2(x)>0$, что и требовалось доказать. Второе неравенство доказывается аналогично. Лемма доказана.

4.2.2 Свойства матриц систем линейных алгебраических уравнений

Представим $S(x;u)$ в виде

$$S(x;u) \;=\; \sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n N_{n,3}(x). \tag{4.2.14}$$

Из условий интерполяции (4.1.1) получим СЛАУ для коэффициентов

$$\sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n N''_{n,3}(0) \;=\; u''(0),$$

$$\sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n N_{n,3}(x_k) = u(x_k),\; 0 \le k \le N, \tag{4.2.15}$$

$$\sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n N''_{n,3}(1) \;=\; u''(1).$$

Преобразуем СЛАУ (4.2.15) аналогично [46]. Для этого вычислим значения входящих в нее обобщенных B-сплайнов и их производных по формулам (4.2.5), (4.2.7) и исключим из двух первых и двух последних уравнений неизвестные α_{-3} и α_{N-1}. В результате формулы для α_{-3} и α_{N-1} будут иметь вид

$$\alpha_{-3} \;=\; 2\alpha_{-2} - \alpha_{-1} + h^2 u''(0),\;\; \alpha_{N-1} \;=\; 2\alpha_{N-2} - \alpha_{N-3} + h^2 u''(1), \tag{4.2.16}$$

а СЛАУ для остальных коэффициентов примет вид

$$A\alpha = U, \tag{4.2.17}$$

где $A = \{a_{nk}\}$, $-2 \le n, k \le N-2$ – трехдиагональная матрица порядка $(N+1) \times (N+1)$, $U = (U_{-2}, U_{-1}, \cdots, U_{N-2})^T$ – $(N+1)$-вектор. При этом ненулевые элементы матрицы A имеют вид:

$$a_{nk} = N_{k,3}(x_{n+2}),\; k = n-1, n, n+1;\; n \in [-1, N-3], \tag{4.2.18}$$

$$a_{(-2)(-2)} = N_{-2,3}(0) + 2N_{-3,3}(0),\;\; a_{(-2)(-1)} = N_{-1,3}(0) - N_{-3,3}(0), \tag{4.2.19}$$

$$a_{(N-2)(N-2)} = N_{N-2,3}(1) + 2N_{N-1,3}(1),\;\; a_{(N-2)(N-3)} = N_{N-3,3}(1) - N_{N-1,3}(1), \tag{4.2.20}$$

а остальные элементы равны нулю.

Элементы вектора U имеют вид

$$U_n = u(x_{n+2}),\ -1 \le n \le N-3, \tag{4.2.21}$$

$$U_{-2} \ = \ u(0) - h^2\, N_{-3,3}(0)\, u''(0), U_{N-2} \ = \ u(1) - h^2\, N_{N-1,3}(1)\, u''(1). \tag{4.2.22}$$

Лемма 4 *Для диагональных элементов матрицы A при всех $\varepsilon \in (0,+\infty)$, $h = 1/N \in (0,1]$ справедливы формулы*

$$a_{nn} \ge \frac{1}{2} + f_1\Big(\frac{h}{\varepsilon}\Big),\ -2 \le n \le N-2, \tag{4.2.23}$$

$$a_{(-2)(-2)} \ge |a_{(-2)(-1)}| + f_1\Big(\frac{h}{\varepsilon}\Big),\ a_{(N-2)(N-2)} \ge |a_{(N-2)(N-3)}| + f_1\Big(\frac{h}{\varepsilon}\Big). \tag{4.2.24}$$

При $\frac{\varepsilon}{h} \to 0$ справедливы формулы

$$a_{nn} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{h} + O\Big(\frac{\varepsilon^2}{h^2}\Big),\ -2 \le n \le N-3,\ a_{(N-2)(N-2)} = \frac{3}{2} - \frac{\varepsilon}{h} + O\Big(\frac{\varepsilon^2}{h^2}\Big), \tag{4.2.25}$$

$$a_{nn-1} = O\Big(\frac{\varepsilon^2}{h^2}\Big),\ -1 \le n \le N-3,\ a_{(N-2)(N-3)} = -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{h} + O\Big(\frac{\varepsilon^2}{h^2}\Big), \tag{4.2.26}$$

$$a_{nn+1} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{h} + O\Big(\frac{\varepsilon^2}{h^2}\Big),\ -2 \le n \le N-3. \tag{4.2.27}$$

Доказательство. Из формул (4.2.18)-(4.2.20), (4.2.5) вытекает, что для диагональных элементов матрицы A справедливо представление

$$a_{nn} = \begin{cases} \frac{1}{2} + f_1(\frac{h}{\varepsilon}) + 2N_{-3,3}(0),\ n = -2, \\ \frac{1}{2} + f_1(\frac{h}{\varepsilon}),\ -1 \le n \le N-3, \\ \frac{1}{2} + f_1(\frac{h}{\varepsilon}) + 2N_{N-1,3}(1),\ n = N-2. \end{cases} \tag{4.2.28}$$

Отсюда и из (4.2.5), (4.2.8) вытекает (4.2.23). Формулы (4.2.24)-(4.2.27) непосредственно вытекают из (4.2.18)-(4.2.20), (4.2.12). Лемма доказана.

Лемма 5 *Матрица A обратима при любых $h = 1/N \in (0,1]$, $\varepsilon > 0$ и для некоторых постоянных $C_3 > 0$, $C_4 > 0$ справедлива оценка*

$$C_3 \min\Big\{h^{-1}, 1 + \frac{h}{\varepsilon}\Big\} \le \Big\|A^{-1}\Big\|_\infty \le C_4 \min\Big\{h^{-1}, 1 + \frac{h}{\varepsilon}\Big\}. \tag{4.2.29}$$

Найдутся такие не зависящие от ε, h константы $C > 0$, $C_1 > 0$, что при $h/\varepsilon > C$ матрица A^{-1} представима в виде

$$A^{-1} = DB_1 + B_2, \tag{4.2.30}$$

где $D = diag\{d_{ii}\}$ *– диагональная матрица,* $B_1 = \{b^1{}_{ij}\}$ *– верхняя треугольная матрица, причем справедливы формулы*

$$\|B_1\|_\infty \le C_1 \min\left\{h^{-1}, 1 + \frac{h}{\varepsilon}\right\},\ \|B_2\|_\infty \le C_1,\ \|D\|_\infty \le C_1, \tag{4.2.31}$$

$$b^1{}_{ij} = (-1)^{j-i}\mu_{\varepsilon,h}^{j-i},\ j \ge i,\ \mu_{\varepsilon,h} = 1 - \frac{4\frac{\varepsilon}{h}}{1+2\frac{\varepsilon}{h}}. \tag{4.2.32}$$

Доказательство. Заметим, что в силу (4.2.9) $\sum_{i=-3}^{N-1} N''_{i,3}(x) \equiv 0$ на $[0,1]$, т.е. для матрицы СЛАУ (4.2.15) строчные суммы первой и последней строк нулевые, а у остальных строк они равны 1. Поэтому все строчные суммы матрицы A СЛАУ (4.2.17) равны 1. При этом все элементы A, кроме, быть может, $a_{(-2)(-1)}$ и $a_{(N-3)(N-2)}$ неотрицательны. Отсюда и из (4.2.28) следует, что матрица A имеет строгое диагональное преобладание с показателем преобладания $r_i(A) \ge f_1\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)$ во всех строках с номерами $i = -1, \ldots, N-3$. Для $i = -2, i = N-2$ это справедливо в силу (4.2.24). Значит, диагональное преобладание с показателем $r(A) \ge f_1\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)$ будет во всех строках A, поэтому A обратима при всех $h = 1/N \in (0,1]$, $\varepsilon > 0$.

Докажем формулы (4.2.29)-(4.2.32). Рассмотрим случаи: 1) $h/\varepsilon \le C$, 2) $h/\varepsilon > C$, где $C > 0$ достаточно большая, но не зависящая от ε и h константа.

В случае 1 заметим, что $r(A) \ge f_1(h/\varepsilon)$, а в силу (4.2.13) $f_1(x)$ монотонно убывает на $(0,+\infty)$. Поэтому будет $r(A) \ge f_1(C) = C_3 > 0$, откуда следует, что $\|A\|_\infty \le 1/C_3 = C_4$, и оценка сверху в (4.2.29) в случае 1 доказана. Оценка снизу верна, т.к. в первом случае $1 + h/\varepsilon \le 1 + C = const$.

Рассмотрим случай 2. Представим A в виде

$$A = D_1\tilde{A},\ \ D_1 = diag\{d_{-2,1}, \cdots, d_{N-2,1}\}, \tag{4.2.33}$$

$$d_{i,1} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{h},\ -2 \le i \le N-3,\ d_{N-2,1} = \frac{3}{2} - \frac{\varepsilon}{h}.$$

В силу (4.2.25)-(4.2.27) в случае 2 справедливо представление $\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3$, $\tilde{A}_s = \{\tilde{a}_{ij,s}\}$, $1 \le s \le 3$, где

$$\tilde{a}_{ij,1} = \begin{cases} 1,\ i = j, \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{h}\right)/\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{h}\right),\ j = i+1, \\ 0,\ j \ne i, i+1, \end{cases}\ \ \tilde{a}_{ij,2} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{h}\right)/\left(\frac{3}{2} - \frac{\varepsilon}{h}\right),\ i = N-2,\ j = N-3, \\ 0,\ i \ne N-2,\ j \ne N-3, \end{cases} \tag{4.2.34}$$

$$\|\tilde{A}_3\|_\infty \le C_3\,\varepsilon^2/h^2.$$

Поскольку $d_{i,1} = O^*(1)$ при $\varepsilon/h \to 0$, то формулы вида (4.2.29)-(4.2.32) в случае 2 достаточно доказать для матрицы $\tilde{A}$. Рассмотрим матрицу $\hat{A} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$. Будем искать $\hat{A}^{-1}$ из матричного уравнения $\hat{A}X = I$. Исключим в нем элемент $\hat{a}_{(N-2)(N-3)} = \tilde{a}_{(N-2)(N-3)}$, затем умножим последнюю строку на число, обратное диагональному элементу. Тогда в силу (4.2.34) матричное уравнение примет вид

$$\tilde{A}_1 X \, = \, J, \tag{4.2.35}$$

где $J = I + J_1,\ J_1 = \{e_{ij},\, -2 \le i, j \le N-2\}$,

$$e_{ij} = 0,\ i \ne N-2,\, j \ne N-3,\ \ |e_{ij}| \le C_5. \tag{4.2.36}$$

Но в силу (4.2.34) справедлива формула $\tilde{A}_1 = I - L$, где L — нильпотентная матрица, т.е. $L^s = 0$ при $s \ge N+1$. Поэтому $\tilde{A}_1^{-1}$ представима конечным рядом Неймана $\tilde{A}_1^{-1} = I + \sum_{s=1}^{N} L^s$ и ее элементы имеют вид

$$\tilde{a}_{ij,-1} \, = \, (-1)^{j-i}\, \mu_{\varepsilon,h}^{j-i},\, j \ge i,\, \mu_{\varepsilon,h} \, = \, 1 - \frac{4\varepsilon/h}{1 + 2\varepsilon/h}. \tag{4.2.37}$$

Обозначим $\tilde{A}_1^{-1} J_1 = \tilde{B}$. Тогда в силу (4.2.36) в любой строке $\tilde{B}$ будет отличен от нуля только элемент столбца с номером $N-3$. При этом в силу (4.2.36)-(4.2.37) данный элемент оценивается величиной порядка $O(1)$ при $\varepsilon/h \to 0$. Поэтому из (4.2.35)-(4.2.37) находим

$$(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)^{-1} = \hat{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1} + \tilde{A}^{-1} J_1 =$$

$$= \tilde{A}_1^{-1} + \tilde{B}, \|\tilde{A}_1^{-1}\|_\infty \le C_3 \min\left\{h^{-1}, 1 + \tfrac{h}{\varepsilon}\right\},\ \|\tilde{B}\|_\infty \le C_5. \tag{4.2.38}$$

Отсюда из (4.2.34) имеем при достаточно малых ε/h

$$\|\tilde{A}_3(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)^{-1}\|_\infty \le C_6 \frac{\varepsilon}{h}. \tag{4.2.39}$$

Поэтому

$$\tilde{A}^{-1} = (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)^{-1}(I + \tilde{A}_3(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)^{-1})^{-1} = (\tilde{A}_1^{-1} + \tilde{B})(I + \hat{B}), \|\hat{B}\|_\infty \le C_7 \frac{\varepsilon}{h}. \tag{4.2.40}$$

Из (**??**)-(4.2.40) вытекают формулы вида(4.2.30)-(4.2.32) для $\tilde{A}^{-1}$, в которых

$$D = I,\ B_1 = {\tilde{A}_1}^{-1},\ B_2 = \tilde{A}_1^{-1}\hat{B} + \tilde{B} + \tilde{B}\hat{B}. \tag{4.2.41}$$

Тем самым оценка сверху в (4.2.29) доказана.

Докажем оценку снизу в случае 2. Из (4.2.33) следует, что оценку снизу вида (4.2.29) достаточно установить для $\tilde{A}^{-1}$. Но из (4.2.37), (4.2.38), (4.2.40) следует, что $\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}_1^{-1} + B_1$, где $\|B_1\|_\infty \le C_8$, $\|\tilde{A}_1^{-1}\|_\infty = \sum_{s=0}^N \mu_{\varepsilon,h}^s \ge C_9 \min\{h^{-1}, 1 + \frac{h}{\varepsilon}\}$. Отсюда при достаточно малых $h, \varepsilon/h$ будет

$$\left\|\tilde{A}^{-1}\right\|_\infty \ge \left\|\tilde{A}_1^{-1}\right\|_\infty - \|B_1\|_\infty \ge C_{10} \min\{h^{-1}, 1 + \frac{h}{\varepsilon}\}.$$

Лемма доказана.

Докажем еще две леммы об обобщенных B-сплайнах, вытекающие из свойств матрицы A.

Лемма 6 *Найдется такая константа $C_1 > 0$, что для любых $\varepsilon > 0$, $h = 1/N \in (0,1]$ и для любого набора скаляров $\{\beta_i,\ -3 \le i \le N-1\}$, в котором*

$$\beta_{-3} = 2\beta_{-2} - \beta_{-1},\ \beta_{N-1} = 2\beta_{N-2} - \beta_{N-3}, \tag{4.2.42}$$

справедлива оценка

$$\Big\| \sum_{i=-3}^{N-1} \beta_i N_{i,3}(x) \Big\|_{C[0,1]} \ge C_1 \max_{-2\le i\le N-2} |\beta_i|. \tag{4.2.43}$$

Доказательство. Аналогично предыдущей лемме рассмотрим два случая: 1) $h/\varepsilon \le C$ и 2) $h/\varepsilon > C$, где $C > 0$ достаточно большая, но не зависящая от ε и h константа.

В случае 1 в лемме 5 было доказано, что $\|A^{-1}\|_\infty \le C_2$. При этом условия (4.2.42) соответствуют условиям $u''(x_n) = 0, n = 0, N$. Поэтому с учетом (4.2.17), (4.2.21)-(4.2.22) получаем, что $\max\limits_{-2\le i\le N-2} |\beta_i| \le C_2 \max\limits_{0\le i\le N} |u(x_i)| \le C_2 \|u(x)\|_{C[0,1]}$, где $u(x) = \sum_{i=-3}^{N-1} \beta_i N_{i,3}(x)$, откуда вытекает (4.2.43) в случае 1.

Рассмотрим случай 2. Пусть $|\beta_j| = \max\limits_{-2\le i\le N-2} |\beta_i|$. Тогда в силу (4.2.42)

$$|\beta_j| \ge \frac{1}{3} \max_{-3\le i\le N-1} |\beta_i|.$$

Поэтому для функции $u(x) = \sum_{i=-3}^{N-1} \beta_i N_{i,3}(x)$ при $N > 1$ с учетом (4.2.11) будем иметь

$$|u(\bar{x}_{j+1})| = \left| \sum_{i=j-2}^{j+1} \beta_i N_{i,3}(\bar{x}_{j+1}) \right| \ge |\beta_j| \Big(|N_{j,3}(\bar{x}_{j+1})| - \sum_{j-2\le i\le j+1, i\ne j} \left| \tfrac{\beta_i}{\beta_j} N_{i,3}(\bar{x}_{j+1}) \right| \Big) \ge$$

$$\geq |\beta_j|\Big(|N_{j,3}(\bar{x}_{j+1})| - \sum_{j-2\leq i\leq j+1,\, i\neq j} |N_{i,3}(\bar{x}_{j+1})|\Big) \geq$$

$$\geq |\beta_j|\Big(\frac{3}{4} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} + O\Big(\frac{\varepsilon}{h}\Big)\Big) = |\beta_j|\Big(\frac{1}{4} + O\Big(\frac{\varepsilon}{h}\Big)\Big),$$

где $\bar{x}_{j+1} = (x_{j+1} + x_{j+2})/2$. Выбирая C так, чтобы модуль второго слагаемого не превосходил $1/8$ при $h/\varepsilon > C$, получим (4.2.43) с константой $C_1 = 1/8$. Лемма доказана.

Лемма 7 *Совокупность* $\{\tilde{N}_{i,3}(x),\, -3 \leq i \leq N-1\}$, *где* $\tilde{N}_{i,3}(x)$ *– сужение* $N_{i,3}(x)$ *на* $[0,1]$, *при всех* $\varepsilon > 0$, $h = 1/N \in (0,1]$ *образует базис в* $SL(\Omega, 3, 1)$.

Доказательство. Линейная независимость $\{\tilde{N}_{i,3}(x),\, -3 \leq i \leq N-1\}$ вытекает из невырожденности матрицы СЛАУ (4.2.15). Аналогично [50] получаем, что $dimSL(\Omega,3,1) = dimS(\Omega,3,1) = N+3$. Лемма доказана.

4.2.3 Аппроксимационные свойства пространства $SL(\Omega, 3, 1)$

Введем вспомогательные функции. Пусть $B_i(x) \in SL(\Omega,3,1)$ – функции, определяемые из условий

$$supp\, B_i(x) \subset [0, x_3],\; B_i^{(j)}(0) = \delta_{ij},\; B_i^{(j)}(x_3) = 0,\; 0 \leq i,j \leq 2. \tag{4.2.44}$$

Лемма 8 *Справедливы оценки*

$$\|B_i(x)\|_{C[0,1]} \leq Ch^i. \tag{4.2.45}$$

Доказательство. Будем искать $B_i(x)$ в виде

$$B_i(x) = \sum_{j=-3}^{-1} \alpha_{ij} \tilde{N}_{j,3}(x),\; 0 \leq i \leq 2. \tag{4.2.46}$$

Тогда из условий (4.2.44) для коэффициентов α_{ij} получим СЛАУ $B\vec{\alpha}_i = \vec{e}_i$, где

$$B = \{b_{kj},\, -3 \leq j \leq -1,\, 0 \leq k \leq 2\},\; b_{kj} = h^k \tilde{N}_{j,3}^{(k)}(0),$$

$$\vec{\alpha}_i = \{\alpha_{ik},\, 0 \leq k \leq 2\},\; \vec{e}_i = \{e_{ik},\, 0 \leq k \leq 2\},\; 0 \leq i \leq 2,\; e_{ik} = h^i \delta_{ik}.$$

Из (4.2.5)-(4.2.7) и леммы 3 следует, что

$$b_{0j} > 0,\; j = -3, \ldots, -1,\; b_{0(-2)} \geq \frac{1}{2},\; b_{1j} < 0,\; j = -3, -2,\; b_{1(-1)} > 0,\; b_{2j} = 1,\; j = -1, -3;$$

$$b_{2(-2)} = -2,\ b_{0(-1)} - b_{0(-3)} > 0,\ b_{1(-1)} - b_{1(-3)} = 1.$$

Отсюда

$$\det B = (b_{0(-2)} + 2b_{0(-3)}) \cdot (b_{1(-1)} - b_{1(-3)}) - (b_{0(-1)} - b_{0(-3)}) \cdot (b_{1(-2)} + 2b_{1(-3)}) \geq$$
$$\geq b_{0(-2)} + 2b_{0(-3)} \geq b_{0(-2)} \geq \frac{1}{2},$$

откуда получаем, что $|\alpha_{ij}| \leq Ch^i$. Отсюда и из (4.2.46) вытекает (4.2.45). Лемма доказана.

Обозначим через $[y]$ целую часть действительного числа y.

Лемма 9 *Пусть функция $u(x,\varepsilon)$ представима в виде (4.1.2). Тогда найдется такая функция $\tilde{S}(x;u) \in SL(\Omega,3,1)$ и константа $C > 0$, что для всех $\varepsilon > 0$, $h = 1/N \in (0,1]$ будут справедливы оценки*

$$\left\|\tilde{S}^{(j)}(x;u) - u^{(j)}(x,\varepsilon)\right\|_{C[0,1]} \leq C \left\{ \begin{array}{l} \min\{h^{3-j},\, \frac{h^{4-j}}{\varepsilon}\},\ 0 < \varepsilon \leq 1 \\ h^{4-j},\ \varepsilon > 1, \end{array} \right. ,\ 0 \leq j \leq 2. \quad (4.2.47)$$

При этом для функции $r(x,\varepsilon) = u(x,\varepsilon) - \tilde{S}(x;u)$ при $h/\varepsilon > 1$ справедливы формулы

$$|r(x_j,\varepsilon) - r(x_{j+3},\varepsilon)| \leq Ch^4,\ j \in [N - 3\Big[\frac{N}{3}\Big], N-3]. \quad (4.2.48)$$

Доказательство. Поскольку в (4.1.2) $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$ и $\Phi(x) \in SL(\Omega,3,1)$, то достаточно найти $\tilde{S}(x;u)$ для случая $u(x,\varepsilon) = u(x) = q(x)$. Пусть

$$P_{i,q}(x) = \sum_{j=0}^{3} \frac{q^{(j)}(x_i)}{j!}(x - x_i)^j. \quad (4.2.49)$$

Заметим, что из формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме для $e^{(x_i-x)/\varepsilon}$ вытекает, что

$$(x - x_i)^3 = -6\varepsilon^3\Big(e^{\frac{x_i - x}{\varepsilon}} - 1 - \frac{x_i - x}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Big(\frac{x_i - x}{\varepsilon}\Big)^2\Big) + R_i(x,\varepsilon), \quad (4.2.50)$$

где

$$\|R_i^{(j)}(x,\varepsilon)\|_{C[x_i,x_{i+3}]} \leq C\frac{h^{4-j}}{\varepsilon},\ R_i^{(j)}(x_i,\varepsilon) = 0,\ 0 \leq j \leq 3. \quad (4.2.51)$$

Обозначим через $\tilde{P}_{i,q}(x,\varepsilon)$ функцию, получающуюся из $P_{i,q}(x)$ заменой в (4.2.49) $(x - x_i)^3$ выражением (4.2.50) без слагаемого $R_i(x,\varepsilon)$ при $h/\varepsilon \leq 1$ и нулем при $h/\varepsilon > 1$. Тогда, учитывая, что в силу (4.1.2) $\|P_{i,q}^{(j)}(x) - q^{(j)}(x)\|_{C[x_i,x_{i+3}]} \leq Ch^{4-j}, 0 \leq j \leq 3$ и оценку (4.2.51), получаем, что

$$\|\tilde{P}_{i,q}^{(j)}(x,\varepsilon) - q^{(j)}(x)\|_{C[x_i,x_{i+3}]} \leq C \left\{ \begin{array}{l} \max\{h^{4-j},\, \frac{h^{4-j}}{\varepsilon}\},\ \frac{h}{\varepsilon} \leq 1, \\ h^{3-j},\ \frac{h}{\varepsilon} > 1. \end{array} \right. \quad (4.2.52)$$

Определим функцию $\tilde S(x;u)$ формулой

$$\tilde S(x;u)=\begin{cases}\tilde P_{N-3i,q}(x,\varepsilon)+\sum_{k=0}^{2}(\tilde P^{(k)}_{\max\{N-3(i+1),0\},q}(x_{N-3i},\varepsilon)-q^{(k)}(x_{N-3i}))\times\\ \times B_k(x-x_{N-3i}),\ x\in[x_{N-3i},\,x_{N-3i+3}],\ 1\le i\le[\frac{N}{3}],\\ \tilde P_{0,q}(x,\varepsilon),\ x\in[x_0,x_{N-3[N/3]}],\end{cases}\tag{4.2.53}$$

где $B_k(x)$ – функции (4.2.44). Тогда $\tilde S(x;u)\in SL(\Omega,3,1)$. При этом в силу (4.2.52)

$$\left|\tilde P^{(j)}_{\max\{N-3(i+1),0\},q}(x_{N-3i},\varepsilon)-q^{(j)}(x_{N-3i})\right|\le C\begin{cases}\max\{h^{4-j},\frac{h^{4-j}}{\varepsilon}\},\ \frac{h}{\varepsilon}\le 1,\\ h^{3-j},\frac{h}{\varepsilon}>1.\end{cases},\ 0\le j\le 2.\tag{4.2.54}$$

Из (4.2.51)-(4.2.54) и (4.2.45) вытекает (4.2.47).

Докажем (4.2.48). Из определения $\tilde P_{i,q}(x,\varepsilon)$, (4.2.53) и формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме для $N-3i\le j<N-3i+3$, $h/\varepsilon>1$ имеем:

$$r(x_{j+3},\varepsilon)-r(x_j,\varepsilon)=\frac{1}{2!}\int_{x_{N-3i+3}}^{x_{j+3}}(x_{j+3}-s)^2q'''(s)ds-\frac{1}{2!}\int_{x_{N-3i}}^{x_j}(x_j-s)^2q'''(s)ds+$$

$$+\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{(2-k)!}\Big(-\int_{x_{N-3i}}^{x_{N-3i+3}}(x_{N-3i+3}-s)^{2-k}q'''(s)ds+\int_{x_{N-3i-3}}^{x_{N-3i}}(x_{N-3i}-s)^{2-k}q'''(s)ds\Big)\times$$

$$\times B_k(x_j-x_{N-3i})=\frac{1}{2!}\int_{x_{N-3i}}^{x_j}(x_j-s)^2(q'''(s+3h)-q'''(s))ds+$$

$$+\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{(2-k)!}\int_{x_{N-3i-3}}^{x_{N-3i}}(x_{N-3i}-s)^{2-k}(q'''(s+3h)-q'''(s))dsB_k(x_j-x_{N-3i}).$$

В силу ограниченности $q^{(IV)}(x)$, оценок (4.2.45) отсюда вытекает (4.2.48). Лемма доказана.

4.3 Доказательство теорем

4.3.1 Доказательство теоремы 1

Пусть $\tilde S(x;u)$ – функция, соответствующая (4.2.53). Введем в рассмотрение функцию $err(x,\varepsilon)=S(x;u)-\tilde S(x;u)$. Представим ее в виде

$$err(x,\varepsilon)=\sum_{n=-3}^{N-1}\beta_nN_{n,3}(x).\tag{4.3.1}$$

Заметим, что в узлах справедливы равенства $err(x_j,\varepsilon) = r(x_j,\varepsilon), 0 \le j \le N$, $err''(x_j,\varepsilon) = r''(x_j,\varepsilon), j = 0, N$, где $r(x,\varepsilon)$ – функция из леммы 9, $r(x,\varepsilon) = u(x,\varepsilon) - \tilde{S}(x;u)$. Тогда аналогично (4.2.16)-(4.2.17) для коэффициентов β получаем систему с матрицей A из (4.2.17):

$$A\beta = ERR \tag{4.3.2}$$

и

$$\beta_{-3} = 2\beta_{-2} - \beta_{-1} + h^2 err''(0,\varepsilon), \beta_{N-1} = 2\beta_{N-2} - \beta_{N-3} + h^2 err''(1,\varepsilon), \tag{4.3.3}$$

где $ERR = \{ERR_n\},\ -2 \le n \le N-2$,

$$ERR_n = r(x_{n+2}),\ -1 \le n \le N-3, \tag{4.3.4}$$

$$ERR_{-2} = r(0,\varepsilon) - h^2 N_{-3,3}(0) r''(0,\varepsilon), ERR_{N-2} = r(1,\varepsilon) - h^2 N_{N-1,3}(1) r''(1,\varepsilon). \tag{4.3.5}$$

Оценим вектор β, учитывая, что $u(x,\varepsilon)$ соответствует (4.1.2). Рассмотрим два случая: 1). $h/\varepsilon \le C$ и 2). $h/\varepsilon > C$, где C соответствует заданию случаев в лемме 9.

В случае 1 в силу леммы 9 имеем $\|A^{-1}\|_\infty \le C_1$, а в силу леммы 9

$$\max_{0 \le n \le N} |r(x_n)| \le C \begin{cases} \frac{h^4}{\varepsilon}, \varepsilon \in (0,1] \\ h^4, \varepsilon > 1, \end{cases}, \max_{n=0,N} h^2 |r''(x_n)| \le C \begin{cases} \frac{h^4}{\varepsilon}, \varepsilon \in (0,1] \\ h^4, \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Отсюда и из (4.3.2)-(4.3.5) находим $\max\limits_{-3 \le n \le N-1} |\beta_n| \le C \max\{h^4/\varepsilon, h^4\}$. Отсюда и из (4.2.10) вытекает оценка $|err(x,\varepsilon)| \le C \max\{h^4/\varepsilon, h^4\}$. Учитывая (4.2.47), получаем оценку (4.1.4) в случае 1.

Оценка (4.1.3) получается аналогично, если вместо $\tilde{S}(x;u)$ взять $\tilde{u}(x) \in SL(\Omega,3,1)$ – наилучшее в норме $C_h[0,1]$ приближение для $u(x)$ в $SL(\Omega,3,1)$.

Рассмотрим случай 2. В этом случае в силу леммы 9 справедливы оценки $\max\limits_{0 \le n \le N} |r(x_n,\varepsilon)| \le Ch^3$, $h^2|r''(x_n,\varepsilon)| \le Ch^3, n = 0, N$, а для матрицы A справедливы формулы (4.2.30)-(4.2.32). В силу (4.2.30)-(4.2.32) для доказательства (4.1.4) достаточно доказать оценку

$$\|B_1 ERR\|_\infty \le Ch^3, \tag{4.3.6}$$

где матрица B_1 соответствует (4.2.30). Оценим компоненту вектора $(B_1 ERR)_{-2}$. Оценки остальных компонент аналогичны. В силу (4.2.32) имеем

$$(B_1 ERR)_{-2} = ERR_{-2} + \sum_{j=-1}^{N-3} \mu_{\varepsilon,h}^{j+1} (-1)^{j+1} r(x_j,\varepsilon) + \mu_{\varepsilon,h}^{N-1} (-1)^{N-1} ERR_{N-2} =$$

$$= \sum_{j=-1}^{N-3} \mu_{\varepsilon,h}^{j+1}(-1)^{j+1} r(x_j,\varepsilon) + O(h^3). \tag{4.3.7}$$

Для эффективного применения оценки (4.2.48) представим сумму в (4.3.7) в виде трех сумм:

$$\sum_{j=-1}^{N-3} \mu_{\varepsilon,h}^{j+1}(-1)^{j+1} r(x_j,\varepsilon) = \sum_{0\le k\le (N-3)/3} \mu_{\varepsilon,h}^{3k}(-1)^{3k} r(x_{3k},\varepsilon)+$$

$$\sum_{0\le k\le (N-4)/3} \mu_{\varepsilon,h}^{3k+1}(-1)^{3k+1} r(x_{3k+1},\varepsilon)+ \sum_{0\le k\le (N-5)/3} \mu_{\varepsilon,h}^{3k+2}(-1)^{3k+2} r(x_{3k+2},\varepsilon) = \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3. \tag{4.3.8}$$

Оценим Σ_1.Применим преобразование Абеля [68, с.306]. Положим $a_k = r(x_{3k},\varepsilon)$, $b_k = (-1)^{3k}\mu_{\varepsilon,h}^{3k}$, $B_k = b_0 + b_1 + \cdots b_k$. Тогда

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{K} a_k b_k = a_K B_K - \sum_{k=1}^{K-1}(a_{k+1}-a_k)B_k = r(x_{3K},\varepsilon)B_K - \sum_{k=1}^{K-1}(r(x_{3k+3},\varepsilon)-r(x_{3k},\varepsilon))B_k.$$

Далее имеем в силу (4.2.47)-(4.2.48)

$$|r(x_{3K},\varepsilon)| \le Ch^3, |B_k| = \frac{1+(-1)^{3k}\mu_{\varepsilon,h}^{3k}}{1+\mu_{\varepsilon,h}^3} \le 1, |r(x_{3k+3},\varepsilon) - r(x_{3k},\varepsilon)| \le \begin{cases} Ch^4, k>0, \\ Ch^3, k=0. \end{cases}$$

откуда получаем, что $|\Sigma_1| \le Ch^3$. Аналогично оцениваются $|\Sigma_2|$ и $|\Sigma_3|$. Поэтому из (4.3.7)-(4.3.8) получаем оценку (4.3.6) и оценку (4.1.4) в случае 2.

Оценка (4.1.3) получается аналогично случаю 1 с учетом того, что в случае 2 $\|A^{-1}\|_\infty \le \min\{h^{-1}, 1+h/\varepsilon\}$. Теорема 1 доказана.

4.3.2 Доказательство теоремы 3

Оценку (4.1.5) достаточно доказать в случае $h/\varepsilon \ge C$, поскольку справедливо неравенство $\|S(x;u)-u(x)\|_{C[0,1]} \ge \inf\limits_{v\in SL(\Omega,3,1)} \|u-v\|_{C[0,1]}$. В этом случае в силу (4.2.29) для матрицы A^{-1} справедлива оценка $\|A^{-1}\|_\infty \ge C\min\{h^{-1}, 1+h/\varepsilon\}$. Пусть вектор $U = (u_{-2}, u_{-1}, \cdots, u_{N-2})$ таков, что $\|U\|_\infty = 1$ и

$$\|\alpha\|_\infty = \|A^{-1}U\|_\infty = \|A^{-1}\|_\infty,$$

где α соответствует (4.2.14). Определим функцию $u(x)$ как непрерывную ломаную с узлами в точках x_n из условий $u(x_n) = U_{n-2}, 0 \le n \le N$. Тогда в силу (4.2.43)

$\|S(x;u)\|_\infty \geq C_2\|\alpha\|_\infty \geq C_3 \min\{h^{-1}, 1+h/\varepsilon\}$. Отсюда при достаточно малом $h>0$ и достаточно большом $C>0$ с учетом того, что $\|u(x)\|_{C[0,1]} = \|u(x)\|_{C,h} = 1$, т.е. $\inf\limits_{v\in SL(\Omega,3,1)} \|u-v\|_{C,h} \leq 1$, имеем

$$\|S(x;u)-u(x)\|_\infty \geq C_4\|S(x;u)\|_\infty \geq C_4\cdot C_3 \min\{h^{-1}, 1+h/\varepsilon\} \geq$$

$$C_4\cdot C_3 \min\{h^{-1}, 1+h/\varepsilon\} \inf_{v\in SL(\Omega,3,1)} \|u-v\|_{C,h},$$

откуда следует (4.1.5).

Докажем оценку (4.1.6). Пусть $u_1(x) = x^3$. Через P_k обозначим множество всех многочленов степени не выше k. Рассмотрим два случая: 1) $h/\varepsilon \geq C$ и 2) $h/\varepsilon < C$, где $C>0$ – достаточно малая, но не зависящая от ε и h константа.

Рассмотрим случай 1. В [27] было показано, что для $a \geq C_1 > 0, \lambda \geq C_1 > 0$

$$\inf_{p(\tau)\in P_3} \|e^{-\lambda\tau} - p(\tau)\|_{C[0,a]} \geq C_2 > 0. \tag{4.3.9}$$

С другой стороны,

$$\inf_{p(\tau)\in P_2} \|\tau^3 - p(\tau)\|_{C[0,a]} \geq C_2 > 0. \tag{4.3.10}$$

Оценим

$$\inf_{p(x)\in P_2,\alpha\in R} \|x^3 - \alpha e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - p(x)\|_{C[0,h]} = \inf_{p(\tau)\in P_2,\alpha\in R} \|h^3\tau^3 - \alpha e^{-\frac{h}{\varepsilon}\tau} - p(\tau)\|_{C[0,1]}. \tag{4.3.11}$$

В силу неравенства (4.3.9) в случае 1 имеем

$$\|h^3\tau^3 - \alpha e^{-\frac{h}{\varepsilon}\tau} - p(\tau)\|_{C[0,1]} \geq C_2|\alpha|,$$

а в силу (4.3.10)

$$\|h^3\tau^3 - \alpha e^{-\frac{h}{\varepsilon}\tau} - p(\tau)\|_{C[0,1]} \geq C_2 h^3 - |\alpha|.$$

Отсюда и из (4.3.11) следует, что $\inf\limits_{p(x)\in P_2,\alpha\in R} \|x^3 - \alpha e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - p(x)\|_{C[0,h]} \geq C_2 h^3$. Оценка (4.1.6) доказана.

В случае 2 при достаточно малом $C>0$, применяя формулу Тейлора для $e^{-x/\varepsilon}$, имеем

$$\inf_{p(x)\in P_2,\alpha\in R} \| \, x^3 - \alpha e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - p(x) \, \|_{C[0,h]} = \inf_{p(x)\in P_2,\alpha\in R} \| \, x^3 - 6\alpha\varepsilon^3 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - p(x) \, \|_{C[0,h]} =$$

$$= \inf_{p(x)\in P_2,\alpha\in R} \| \, (1+\alpha)x^3 - \frac{1}{4}\alpha\frac{x^4}{\varepsilon} - p(x) + O\Big(\frac{x^5}{\varepsilon^2}\Big) \, \|_{C[0,h]}$$

$$= \inf_{p(y)\in P_2,\alpha\in R} \| \, \frac{1}{4}\alpha\frac{h^4}{\varepsilon}y^4 - (1+\alpha)h^3y^3 - p(y) + O\Big(\frac{h^5}{\varepsilon^2}\Big)y^5 \, \|_{C[0,1]} \geq$$

$$C_2 \min_{\alpha\in R}\{\frac{|\alpha|}{4}\frac{h^4}{\varepsilon}, |1+\alpha|h^3\} \geq C_3 \min\{\frac{h^4}{\varepsilon}, h^3\}.$$

Теорема 3 доказана.

4.3.3 Доказательство теорем 4, 5 и следствия 1

Докажем теорему 4. Обозначим через $\hat{N}_{i,k}(x)$ нормализованные полиномиальные B-сплайны степени k [50]. Из (4.2.1) следует, что для любого i

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_0^1 |N_{i,1}(x)-\hat{N}_{i,0}(x)|dx = 0, \lim_{\varepsilon\to+\infty} \| N_{i,1}(x)-\hat{N}_{i,1}(x) \|_{C[0,1]} = 0.$$

Тогда с учетом (4.2.2) и аналогичных формул для полиномиальных B-сплайнов [50] получаем, что для произвольного $k>1$, в том числе для $k=3$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \| N_{i,k}(x)-\hat{N}_{i,k-1}(x) \|_{C[0,1]} = 0, \lim_{\varepsilon\to+\infty} \| N_{i,k}(x)-\hat{N}_{i,k}(x) \|_{C[0,1]} = 0. \qquad (4.3.12)$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} N_{i,k}(x) = \hat{N}_{i,k-1}(x), \quad \lim_{\varepsilon\to+\infty} N_{i,k}(x) = \hat{N}_{i,k}(x),\ x\in[0,1].$$

В соответствии с (4.3.12) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \| N_{-3,3}(x) \|_{C[0,1]} = 0$, а в силу (4.2.7)

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} N''_{i,3}(x_j) = \lim_{\varepsilon\to\infty} N''_{i,3}(x_j) = \begin{cases} \frac{1}{h^2}, j=i+1, \\ -\frac{2}{h^2}, j=i+2, \\ \frac{1}{h^2}, j=i+3, \\ 0, j\notin[i+1,i+3]. \end{cases}$$

Поэтому при $\varepsilon\to 0+0$ СЛАУ (4.2.15) переходит в СЛАУ

$$\sum_{n=-2}^{N-1}\alpha_n\hat{N}_{n,2}(x_k) = u(x_k),\ 0\le k\le N,\ \sum_{n=-2}^{N-1}\alpha_n\hat{N}''_{n,2}(1-0) = u''(1), \qquad (4.3.13)$$

а первое уравнение из (4.2.15), вообще говоря, не удовлетворяется и в (4.3.13) отсутствует.

При $\varepsilon\to+\infty$ СЛАУ (4.2.15) переходит в СЛАУ того же вида, в котором $N_{i,3}(x)$ заменяются на $\hat{N}_{i,3}(x)$. Учитывая, что в силу леммы 5 матрица A СЛАУ (4.2.17) обратима при всех $\varepsilon\in(0,+\infty)$ и $\|A^{-1}\|_\infty \le Ch^{-1}$, с учетом (4.2.16) получаем, что при фиксированном $h=1/N$ существуют конечные пределы $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\alpha_n = \alpha_{n,0}, \lim\limits_{\varepsilon\to+\infty}\alpha_n = \alpha_{n,\infty}$, т.е. решения предельной СЛАУ (4.3.13) и соответствующей предельной СЛАУ при $\varepsilon\to+\infty$ получаются из решений СЛАУ (4.2.15) соответствующими предельными переходами. Из этого факта и (4.2.14), (4.3.12) вытекают формулы (4.1.8),(4.1.9).

При этом для СЛАУ (4.3.13) справедливы аналоги всех результатов предыдущих разделов в случае $h/\varepsilon \geq C$, которые получаются из них предельным переходом при $\varepsilon/h \to 0+0$. А при $\varepsilon \to +\infty$, как отмечено выше, СЛАУ (4.2.15) переходит в СЛАУ того же вида, в котором $N_{i,3}(x)$ заменяются на $\hat{N}_{i,3}(x)$. Поэтому оценки (4.1.10)-(4.1.13) получаются предельными переходами из (4.1.3),(4.1.4). Таким же предельным переходом из оценки (4.1.5) получается оценка (4.1.14). Теоремы 4, 5 и следствие 1 доказаны.

4.4 Результаты численных экспериментов

Зададим функцию вида (4.1.2)

$$u(x,\varepsilon) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}},\ x \in [0,1], \tag{4.4.1}$$

а также семейство быстроосциллирующих функций, определяемых формулами

$$u_N(x) = (-1)^i (x_{2i+1} - x)/h,\ x \in [x_{2i}, x_{2i+2}) \cap [0,1], 0 \leq i \leq N/2,\ x_i = i/N. \tag{4.4.2}$$

Результаты расчетов сведены в две таблицы. В таблицах приведены максимальные погрешности сплайновой интерполяции, вычисленные в узлах сгущенной сетки, получающейся из исходной расчетной сетки разбиением каждого ее сеточного интервала на 10 равных частей. В табл. 1 приведены погрешности и вычисленные порядки точности для функции (4.4.1), а в табл. 2 приведены погрешности для быстроосциллирующих ломаных (4.4.2). При этом для каждого N в табл. 2 бралась своя функция $u_N(x)$. Численные результаты из табл. 1 согласуются с оценками (4.1.4) теоремы 1. Результаты вычислений, приведенные в табл. 2, согласуются с оценкой (4.1.5) теоремы 3 и при заданном достаточно малом значении ε погрешность растет с уменьшением h со скоростью $O(h^{-1})$.

Таблица 4.1: Погрешности и наблюдаемые скорости сходимости для функции (4.4.1).

	$N = 2^2$	$N = 2^3$	$N = 2^4$	$N = 2^5$	$N = 2^6$	$N = 2^7$
$\varepsilon = 1$	$1.56 \cdot 10^{-4}$	$9.75 \cdot 10^{-6}$ 4.01	$6.05 \cdot 10^{-7}$ 4.01	$3.77 \cdot 10^{-8}$ 4.00	$2.36 \cdot 10^{-9}$ 4.00	$1.47 \cdot 10^{-10}$ 4.00
10^{-1}	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$7.18 \cdot 10^{-5}$ 4.12	$4.17 \cdot 10^{-6}$ 4.11	$2.50 \cdot 10^{-7}$ 4.06	$1.53 \cdot 10^{-8}$ 4.03	$9.46 \cdot 10^{-10}$ 4.02
10^{-2}	$3.73 \cdot 10^{-3}$	$4.33 \cdot 10^{-4}$ 3.10	$4.22 \cdot 10^{-5}$ 3.36	$3.02 \cdot 10^{-6}$ 3.81	$1.78 \cdot 10^{-7}$ 4.08	$1.03 \cdot 10^{-8}$ 4.11
10^{-3}	$3.83 \cdot 10^{-3}$	$4.83 \cdot 10^{-4}$ 2.99	$6.02 \cdot 10^{-5}$ 3.00	$7.43 \cdot 10^{-6}$ 3.01	$8.62 \cdot 10^{-7}$ 3.08	$9.21 \cdot 10^{-8}$ 3.25
10^{-4}	$3.95 \cdot 10^{-3}$	$4.83 \cdot 10^{-4}$ 3.03	$6.05 \cdot 10^{-5}$ 2.99	$7.57 \cdot 10^{-6}$ 3.00	$9.46 \cdot 10^{-7}$ 3.00	$1.18 \cdot 10^{-7}$ 3.00
10^{-5}	$3.96 \cdot 10^{-3}$	$4.86 \cdot 10^{-4}$ 3.03	$6.06 \cdot 10^{-5}$ 3.00	$7.57 \cdot 10^{-6}$ 3.00	$9.46 \cdot 10^{-7}$ 3.00	$1.18 \cdot 10^{-7}$ 3.00
10^{-6}	$3.97 \cdot 10^{-3}$	$4.86 \cdot 10^{-4}$ 3.03	$6.06 \cdot 10^{-5}$ 3.00	$7.57 \cdot 10^{-6}$ 3.00	$9.46 \cdot 10^{-7}$ 3.00	$1.18 \cdot 10^{-7}$ 3.00
10^{-7}	$3.97 \cdot 10^{-3}$	$4.86 \cdot 10^{-4}$ 3.03	$6.06 \cdot 10^{-5}$ 3.00	$7.57 \cdot 10^{-6}$ 3.00	$9.46 \cdot 10^{-7}$ 3.00	$1.18 \cdot 10^{-7}$ 3.00
10^{-8}	$3.96 \cdot 10^{-3}$	$4.86 \cdot 10^{-4}$ 3.03	$6.06 \cdot 10^{-5}$ 3.00	$7.57 \cdot 10^{-6}$ 3.00	$9.46 \cdot 10^{-7}$ 3.00	$1.18 \cdot 10^{-7}$ 3.00

Таблица 4.2: Погрешность для быстроосциллирующих функций (4.4.2).

ε N	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
1	$6.25 \cdot 10^{-1}$	$6.20 \cdot 10^{-1}$	$6.10 \cdot 10^{-1}$	$6.05 \cdot 10^{-1}$	$6.03 \cdot 10^{-1}$	$6.02 \cdot 10^{-1}$
10^{-1}	$9.94 \cdot 10^{-1}$	$8.18 \cdot 10^{-1}$	$7.03 \cdot 10^{-1}$	$6.50 \cdot 10^{-1}$	$6.25 \cdot 10^{-1}$	$6.13 \cdot 10^{-1}$
10^{-2}	2.42	3.06	1.98	1.22	$8.81 \cdot 10^{-1}$	$7.32 \cdot 10^{-1}$
10^{-3}	2.92	6.28	7.61	8.09	4.37	2.39
10^{-4}	2.99	6.92	14.5	25.6	31.5	20.0
10^{-5}	3.00	6.99	14.9	30.4	58.2	93.4
10^{-6}	3.00	7.00	15.0	31.0	62.4	122
10^{-7}	3.00	7.00	15.0	31.0	63.0	126
10^{-8}	3.00	7.00	15.0	31.0	63.0	127

Глава 5

МЕТОДЫ КОЛЛОКАЦИОННОГО ТИПА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

В данной главе будут рассмотрены коллокационные схемы для скалярных уравнений второго порядка, при этом целью работы было построение схемы четвертого порядка сходимости, равномерно по ε в C-норме.

5.1 Постановка задачи и основная теорема

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ краевую задачу

$$Lu \equiv -\varepsilon u'' + p(t)u' + q(t)u = f(t),\ u(0) = u(1) = 0,\ p(t) \geq p_0 > 0. \tag{5.1.1}$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что p, q, f — достаточно гладкие функции.

Перейдем к постановке коллокационной задачи. Разбиение Δ отрезка $[0, 1]$ определим по методике Н.С. Бахвалова [25]. Пусть $a = 1 - \frac{5\varepsilon}{\lambda_0}|\ln \varepsilon|$. Определим вспомогательную функцию

$$g(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,\ a] \\ -\frac{5\varepsilon}{\lambda_0} + a + \frac{5\varepsilon}{\lambda_0} \exp\left(\frac{\lambda_0(t-1)}{5\varepsilon}\right), & t \in (a, 1]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $g(t)$ — монотонная непрерывно дифференцируемая на $[0,\,1]$ функция. Положим $A = a + \frac{5\varepsilon}{\lambda_0}(1-\varepsilon)$. Функция $g(t)$ взаимно однозначно отображает отрезок $[0,\,1]$ в отрезок $[0,\,A]$. Построим равномерное разбиение Δ_τ отрезка $[0,\,A]$:

$$\tau_k = \frac{a\,k}{m},\ k = 0, 1, \dots, m;\ \tau_k = \tau k - 1 + \frac{A-a}{m},\ k = m+1, m+2, \dots, 2m.$$

Будем считать, что ε, m таковы, что $\varepsilon|\ln\varepsilon| \ll \frac{1}{m}$. И, наконец, определим интересующее нас разбиение $\Delta = \{t_i\ :\ t_i = g^{-1}(\tau_i),\ i = 0, 1, \dots, 2m\}$. В случае необходимости мы будем также рассматривать узлы расширенного разбиения $\overline{\Delta}$, которое получается из Δ добавлением узлов $t_i = ih$, $i = -1, -2, -3$; $t_i = 1 + (i - 2m)h_{2m-1}$, $i = 2m+1,\ 2m+2,\ 2m+3$.

Пусть $h_j = t_{j+1} - t_j$. Точки коллокации ξ_i выберем следующим образом:

$$\begin{cases} \xi_1 = 0,\ \xi_i = (t_{i-1} + t_{i-2})/2, & i = 2, 3, \dots, m+1, \\ \xi_{m+2} = t_m,\ \xi_{m+3} = (t_m + t_{m+1})/2, & \\ \xi_{m+2j} = t_{m+j} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h_{m+j},\ \xi_{m+2j+1} = t_{m+j} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h_{m+j}, & j = 2, 3, \dots, m-1. \end{cases}$$

Введем дополнительные объекты и обозначения, необходимые в этой главе. Через $\|.\|_p$ обозначается норма в $L_p[0,1]\,(p = 1, \infty)$. Через $l_1,\, l_\infty$ обозначаются пространства последовательностей с соответствующими нормами. Кроме того, мы будем рассматривать также линейное нормированное пространство функций, имеющих на $[0,1]$ разве лишь конечно число точек разрыва первого рода, обозначим его $\widetilde{C}_{[0,1]}$ и определим норму, как и в $C_{[0,1]}$.

Пусть $[a,b] \subset [0,1]$. Через $S(\Delta,k,p)|_{[a,b]}$ обозначим пространство сужений функций из $S(\Delta,k,p)$ на отрезок $[a,b]$.

Определим пробное и тестовое пространства. Пусть $h = t_m/m$. Пусть

$$E = E(\varepsilon, m) = \{u : u|_{[0,t_{m+2}]} \in S(\Delta,3,1)|_{[0,t_{m+2}]},$$

$$u|_{[t_{m+1},1]} \in S(\Delta,3,2)|_{[t_{m+1},1]},$$

$$u(0) = u(1) = 0\},\ F = \mathcal{L}E,$$

где оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L}u(t) = Lu(t) + \begin{cases} 0,\ t \notin [\xi_3, \xi_m] \\ -\frac{\varepsilon}{24}\left(u''(t-h) - 2u'(t) + u''(t+h)\right),\ t \in [\xi_3, \xi_m]. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Легко видеть, что $dimE = dimF = 3m - 1$.

Метод коллокации решения задачи (5.1.1) состоит в отыскании такой функции $u_m \in E$, что

$$[\mathcal{L}u_m(t)]|_{t=\xi_i} = f(\xi_i),\ i = 1, 2, \ldots, 3m - 1. \tag{5.1.3}$$

Теорема 1 *Найдутся такие числа* $\varepsilon_0 > 0, m_0 \in \mathbb{N}, \gamma_0 > 0, C > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $m \geq m_0$, $\varepsilon|\ln\varepsilon| \leq \gamma_0 m$, *решение* u_m *коллокационной задачи (5.1.3) существует, единственно, и*

$$\|u_\varepsilon - u_m\|_\infty \leq \frac{C}{m^4},$$

где $u_\varepsilon(t)$ *— точное решение задачи (5.1.1).*

Доказательство теоремы будет проведено позже.

5.2 Алгоритм численного решения коллокационной задачи

Решение задачи (5.1.3) будем искать в виде кубического сплайна из множества

$$W = \left\{u : u|_{[0,t_{m+2}]} \in S(\Delta, 3, 1)|_{[0,t_{m+2}]},\ u|_{[t_{m+1},1]} \in S(\Delta, 3, 2)|_{[t_{m+1},1]}\right\}.$$

Легко видеть, что линейное пространство W имеет размерность $3m + 1$. Для формулировки алгоритма построим базис $\{f_1(t),\ f_2(t), \ldots,\ f_{3m+1}(t)\}$ в пространстве W.

Положим $f_i(t) = N_{i-4,3}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m+5$, где $N_{i-4,3}(t)$ — нормализованные кубические B-сплайны (точнее говоря, их сужения на $[0, 1]$).

Для $i = m + 2,\ m + 3, \ldots,\ 2m - 1$ определим базисные функции следующим образом

$$f_{m+2(i-m-2)+6}(t) = \begin{cases} -\left(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)^3 + \left(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)^2,\ t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \\ \left(\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)^3 - \left(\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)^2,\ t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ \\ 0,\ t \notin [t_i, t_{i+2}]. \end{cases}$$

$$
f_{m+2(i-m-2)+7}(t) = \begin{cases} -\left(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)^2, \; t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \\ \left(\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)^2, \; t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ \\ 0, \; t \notin [t_i, t_{i+2}] \end{cases}
$$

и так далее.

Нетрудно убедиться, что полученные функции линейно независимы, и, следовательно, образуют базис в W.

Алгоритм отыскания решения задачи (5.1.3) состоит в следующем.

1. Ищем решение задачи (5.1.3) в виде $u_m(t) = \sum\limits_{i=1}^{3m+1} \alpha_i f_i(t)$.

2. Подставляя данное представление в (5.1.3) и в краевые условия $u_m(0) = u_m(1) = 0$, получаем для вектора $\{\alpha_i\}$ систему $3m+1$ линейных алгебраических уравнений с $3m+1$ неизвестными.

3. Решая эту систему, находим вектор α.

4. Вычисляем решение $u_m(t)$ в нужных точках.

Замечание 1.1 Из вида базисных функций вытекает, что матрица СЛАУ, возникающая в п. 2 алгоритма, в общем случае будет девятидиагональной. Для решения этой СЛАУ проще всего использовать метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, учитывающий ленточность матрицы.

Замечание 1.2 Если ставится задача нахождения решения в некоторых точках с заданной точностью, то целесообразно использовать последовательность измельчающихся сеток и апостериорный контроль погрешности.

5.3 Асимптотические свойства коллокационной задачи и технические предложения

5.3.1 Обращение операторов L и $\mathcal{L}$

Здесь и в дальнейшем особо будет выделяться случай, когда $q(t) \equiv 0$, т.е. оператор L имеет вид

$$
Lu = -\varepsilon u'' + p(t)u'. \tag{5.3.1}
$$

Теорема 1 будет доказана сначала для случая, когда L имеет вид (5.3.1), а затем — для общего случая. Целесообразность такого подхода будет обоснована в последующих разделах.

Изучим операторы L^{-1} и $\mathcal{L}^{-1}$. В случае, когда L имеет вид (5.3.1), в [32] было получено явное выражение для функции Грина этого оператора

$$G(t,\xi) = K_1(t,\xi) + K_2(t,\xi) + K_3(t,\xi),$$

$$K_1(t,\xi) = -\left(\int\limits_0^1 exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^1 p(\tau)d\tau\right]ds\right)^{-1} \int\limits_0^\xi exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^\xi p(\tau)d\tau\right]ds\times$$
$$\times\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^1 p(\tau)d\tau\right]ds,$$

$$K_2(t,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^\xi p(\tau)d\tau\right]ds,\ 0\le t\le\xi \\ \\ 0,\ \xi\le t\le 1, \end{cases} \tag{5.3.2}$$

$$K_3(t,\xi) = \begin{cases} 0,\ 0\le t\le\xi \\ \\ \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\xi exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^\xi p(\tau)d\tau\right]ds,\ \xi\le t\le 1 \end{cases}$$

Отсюда легко вытекают следующие оценки интегрального оператора с ядром $G(t,\xi)$:

$$\|G\|_{L_1\to L_\infty} \le C, \tag{5.3.3}$$

$$\|G\|_{L_1\to C^{(i)}} \le \frac{C}{\varepsilon^i},\ i=0,1, \tag{5.3.4}$$

$$\|Gu\|_{C^{(i)}} \le C\left(\sum_{k=2}^{i}\frac{1}{\varepsilon^{k-1}}\|u\|_{C^{(i-k)}} + \frac{1}{\varepsilon^i}\|u\|_{L_1}\right)\ (i=2,3,\ldots,n), \tag{5.3.5}$$

где n определяется гладкостью функций $p(t)$.

Кроме того, нам потребуются следующие свойства функции Грина, также вытекающие из (5.3.2)

$$|\tfrac{\partial^i}{\partial t^i}\tfrac{\partial^j}{\partial \xi^j}G(t,\xi)| \leq C\varepsilon^{-i-j}exp\left[\tfrac{p_0(t-\xi)}{\varepsilon}\right],\ \xi > t$$

$$\begin{gathered}|\tfrac{\partial^i}{\partial t^i}\tfrac{\partial^j}{\partial \xi^j}G(t,\xi)| \leq C\left(1+\varepsilon^{-i}exp\left[\tfrac{p_0(t-\xi)}{\varepsilon}\right]+\right.\\ \left.+\varepsilon^{-j}exp\left[\tfrac{-p_0\xi}{\varepsilon}\right]+\varepsilon^{-i-j}exp\left[\tfrac{p_0(t-\xi-1)}{\varepsilon}\right]\right),\ \xi < t,\ 0\leq i,j\leq n\end{gathered} \tag{5.3.6}$$

$$\int\limits_0^1 |G(t,\xi)-G_0(t,\xi)|d\xi \leq C\left(\varepsilon+exp\left[\tfrac{p_0(t-\xi)}{\varepsilon}\right]\right),$$

где через $G_0(t,\xi)$ обозначена функция Грина задачи Коши

$$p(t)' = f(t),\ u(0) = 0.$$

Замечание 2.1 Как было показано в [31], аналогичные оценки имеют место и для функции Грина "полного" оператора (5.1.1).

Теперь изучим оператор $\mathcal{L}^{-1}$. Областью определения $\mathcal{L}$ будем считать множество E. Тогда областью определения оператора $\mathcal{L}^{-1}$ будет множество $\mathcal{L}E = F$.

Предложение 1. При достаточно малых ε, $h\,\varepsilon/h$ оператор $\mathcal{L}^{-1}$ существует, причем справедлива оценка

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L_1\to C} \leq C. \tag{5.3.7}$$

Доказательство. В соответствии с (5.1.2) представим оператор $\mathcal{L}$ в виде $\mathcal{L} = L+M$. Тогда

$$\mathcal{L} = L(I+GM). \tag{5.3.8}$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$\|GM\|_{C\to C} \leq C\varepsilon m. \tag{5.3.9}$$

Действительно, из (5.3.2), (5.3.6) вытекает, что для $u\in E:\ \|u\|_C\leq 1$

$$|GMu(t)| = \left|-\frac{\varepsilon}{24}\int\limits_{3h/2}^{t_m-3h/2} G(t,\xi)\left[u''(\xi-h)-\ -2u''(\xi)+u''(\xi+h)\right]d\xi\right| =$$

$$= \left|\frac{\varepsilon}{24}\int\limits_{3h/2}^{t_m-3h/2}\frac{\partial}{\partial\xi}G(t,\xi)[u'(\xi-h)-2u'(\xi)+u'(\xi+h)]d\xi-\right.$$

$$-\frac{\varepsilon}{24}G(t,\xi)[u'(\xi-h)-2u'(\xi)+u'(\xi+h)]\Big|_{3h/2}^{t_m-3h/2}\Bigg| \le C\varepsilon m.$$

поскольку $\|u'(\xi)\|_{C_{[0,t_m]}} \le Cm\|u(\xi)\|_{C_{[0,t_m]}}$. Последнее следует из эквивалентности норм в пространстве сплайнов. Из последнего неравенства вытекает (5.3.9). Из него, в свою очередь, получаем, что при малых ε/h оператор $I+GM$ обратим, и $\|(I+GM)^{-1}\| \le C$. Поэтому из (5.3.8), (5.3.4) следует

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L_1\to C} = \|(I+GM)^{-1}G\|_{L_1\to C} \le$$

$$\le \|(I+GM)^{-1}\|_{C\to C}\|G\|_{L_1\to C} \le C_1.$$

Предложение 1. доказано.

Следствие 1 *Справедливы оценки*

$$\|G-\mathcal{L}^{-1}\|_{C\to C}. \tag{5.3.10}$$

Доказательство. Поскольку $\mathcal{L}^{-1}=(I+GM)^{-1}G$, то из (5.3.9), (5.3.4) имеем

$$\|G-\mathcal{L}^{-1}\|_{C\to C} \le \|G\|_{C\to C}\|I-(I+GM)^{-1}\|_{C\to C} \le C\varepsilon m\|G\|_{C\to C} \le C_1\varepsilon m,$$

и следствие доказано.

5.3.2 Асимптотические разложения решения задачи (5.1.1) и его производных

Для построения сплайн-аппроксимаций высокого порядка точного решения задачи (5.3.1) нужно предварительно изучить его структуру. С этой целью построим асимптотическое разложение этого решения. В соответствии с методом Вишика-Люстерника [44] будем искать решение $u_\varepsilon(t)$ задачи (5.3.1) в виде

$$u_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{n}\overline{u}_k(t)\varepsilon^k + \sum_{k=0}^{n}\Pi_k(\tau)\varepsilon^k + R_n(t,\varepsilon),$$

где $\tau=(t-1)/\varepsilon$. Из алгоритма построения асимптотики [44] вытекает, что функции $\Pi_k(\tau)$ являются решениями задач вид

$$\begin{cases} -\Pi_0''+p(1)\Pi_0'=0 \\ \Pi_0(-\infty)=0,\ \Pi_0(0)=-\overline{u}_0(1) \end{cases} \quad \begin{cases} -\Pi_k''+p(1)\Pi_k'=Q_k(\tau) \\ \Pi_k(-\infty)=0,\ \Pi_k(0)=-\overline{u}_k(1), \\ l\le k-1, \end{cases}$$

где Q_k — линейная комбинация функций вида $\tau^{s_j}\Pi_j(\tau)$, $j \leq k-1$. Отсюда индукцией по k получаем, что $\Pi_k(\tau)$ являются функциями вида

$$\Pi_k(\tau) = p_k(\tau) exp\left(p(1)\tau\right) = p_k\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right) exp\left(p(1)\frac{t-1}{\varepsilon}\right), \tag{5.3.11}$$

где $p_k(\tau)$ — полином, причем

$$\Pi_0(\tau) = -\overline{u}_0(1) exp\left(p(1)\frac{t-1}{\varepsilon}\right). \tag{5.3.12}$$

Положим

$$Q_n(t,\varepsilon) = L\left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k\, \overline{u}_k(t) + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \Pi_k(\tau)\right) - f(t). \tag{5.3.13}$$

Тогда из алгоритма построения асимптотики вытекают оценки

$$\|Q_n\|_1 \leq C\varepsilon^{n+1}\|Q_n\|_{C^{(i)}} \leq C\varepsilon^{n-i},\ i = 0, 1, \dots, n, \tag{5.3.14}$$

$$\left\| L\left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \overline{u}_k(t)\right) f(t)\right\|_C \leq C\varepsilon^{n+1}. \tag{5.3.15}$$

Замечание 2.2 Число членов n асимптотического ряда, которые можно построить по методу Вишика-Люстерника, зависит от гладкости функций $p(t)$, $q(t)$, $f(t)$. В дальнейшем мы считаем, что это число фиксировано и достаточно велико ($n \geq 5$).

Из (5.3.4) и (5.3.5), (5.3.13) - (5.3.15) получаем следующее утверждение.

Предложение 2. При $i = 0, 1, \dots, n$ справедливы оценки

$$\|u_\varepsilon^{(i)}(t) - \sum_{k=0}^{n} \left(\overline{u}_k(t) + \Pi_k(\tau)\right)^{(i)} \|_{C_{[0,1]}} \leq C\varepsilon^{n+1-i}. \tag{5.3.16}$$

5.3.3 Некоторые свойства разбиения Δ и асимптотических рядов

Предложение 3. Справедливо представление

$$h_i = \begin{cases} \left(\frac{5\varepsilon}{p_0}\right)/(i - m + \theta_i),\ i \geq m+1,\ 0 \leq \theta_i \leq 1 \\ \\ O\left(\varepsilon|ln\varepsilon|\right),\ i = m \\ \\ h,\ 0 \leq i \leq m-1. \end{cases} \tag{5.3.17}$$

Предложение 4. Справедливы оценки

$$exp\left(p_0\frac{t_i-1}{\varepsilon}\right)=\begin{cases} O^*((i-m)^5/m^5),\ m+1\le i\le 2m\\ O(\varepsilon^5),\ 0\le i\le m\end{cases} \tag{5.3.18}$$

Доказательство получается из определения разбиения Δ аналогично доказательству [30, предл. 15.1, с. 130] и формулы

$$exp\left(\frac{\lambda_0(t_i-1)}{\varepsilon}\right)=\left(\frac{\lambda_0}{5}\right)^2\left[(i-m)\frac{A-a}{m}+\frac{5\varepsilon}{\lambda_0}\right]^2.$$

Используя эти предложения и результаты предыдущего пункта, изучим поведение членов асимптотического разложения на различных участках разбиения Δ.

Предложение 5. Для функций $\varepsilon^k\Pi_k(\tau)$ справедливы оценки

$$\left\|\frac{d^i}{dt^i}\left(\varepsilon^k\Pi_k\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right)\right\|_{C_{[t_j,t_{j+1}]}}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^i}\begin{cases} O((j+1-m)^5/m^5),\ m\le j\le 2m-1\\ O(\varepsilon^5),\ 0\le j\le m-1.\end{cases}$$

Доказательство. При $k=0$ эти оценки вытекают из (5.3.12) и предложения 4. В случае $k\ge 1$ при $j\ge m$, $t\in[t_j,t_{j+1}]$ имеем

$$\varepsilon^k|\Pi_k(\tau)|\le C_k\varepsilon\tau^{s_k}\,e^{p(1)\tau}=$$

$$=C_k\varepsilon\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)^{s_k}exp\left(p(1)\frac{t-t_{j+1}}{\varepsilon}\right)exp\left(p(1)\frac{t_{j+1}-1}{\varepsilon}\right)\le$$

$$\le\widetilde{C}exp\left(p(1)\frac{t_{j+1}-1}{\varepsilon}\right)\le\widetilde{C}exp\left(p_0\frac{t_{j+1}-1}{\varepsilon}\right)$$

и нужная оценка вновь вытекает из предложения 4.

При $j\le m-1$ имеем $t\le t_m$ и поэтому

$$\varepsilon|\Pi_k(\tau)|\le C_k\varepsilon\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)^{s_k}exp\left(p(1)\frac{t-t_m}{\varepsilon}\right)exp\left(p(1)\frac{t_m-1}{\varepsilon}\right)=$$

$$C_k\left[\varepsilon\left(\frac{t-t_m}{\varepsilon}+O(|ln\varepsilon|)\right)^{s_k}exp\left(p(1)\frac{t-t_m}{\varepsilon}\right)\right]\times$$

$$\times exp\left(p(1)\frac{t_m-1}{\varepsilon}\right)\le C^*exp\left(p(1)\frac{t_m-1}{\varepsilon}\right)\le C_1\varepsilon^5.$$

Предложение 5 доказано.

Положим $\overline{u}_m(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \overline{u}_k \varepsilon^k$, $\Pi_n(\tau) = \sum\limits_{k+0}^{n} \Pi_k(\tau)\varepsilon^k$. В дальнейшем мы считаем, что $\overline{u}_0(1) \neq 0$, т.е. решение задачи имеет "погранслой нулевого порядка". Тогда из предложений 2, 5 получаем

Предложение 6. При $i = 0, 1, \ldots, 5$ справедливы оценки

$$\|u_\varepsilon^{(i)}(t) - \overline{u}_n^{(i)}(t)\|_{C_{[0,t_m]}} \leq C\varepsilon^{5-i}. \tag{5.3.19}$$

$$\left\|\frac{d^i}{dt^i}\Pi_n\right\|_{C_{[t_j,t_{j+1}]}} = \frac{1}{\varepsilon^i}\begin{cases} O^*((j+1-m)^5/m^5),\ m \leq j \leq 2m-1 \\ O(\varepsilon),\ 0 \leq j \leq m-1. \end{cases} \tag{5.3.20}$$

Наконец, установим еще одно полезное

Предложение 7. Справедливы оценки

$$\left|\frac{d^i}{dt^i}\Pi_n|_{t=\xi_{m+3}}\right| \leq C\varepsilon^{2,5-i}/m^{2,5},\ i = 0, 1, \ldots, 5. \tag{5.3.21}$$

Доказательство. Из доказательства предложения 6 вытекает, что оценка $\Pi_n^{(i)}(\xi_{m+3})$ сводится к оценке выражения $\varepsilon^i exp\big(p_0(\xi_{m+3} - 1)/\varepsilon\big)$, но

$$exp\left(p_0\frac{\xi_{m+3}-1}{\varepsilon}\right) = \left[exp\left(p_0\frac{t_{m+1}-1}{\varepsilon}\right)\, exp\left(p_0\frac{t_m-1}{\varepsilon}\right)\right]^{1/2}.$$

В силу предложения 5 первый из сомножителей в квадратных скобках оценивается величиной $O(h^5)$, а второй $O(\varepsilon^5)$. Предложение доказано.

5.4 О сплайн аппроксимации асимптотических рядов в норме и точках коллокации

Пусть $u_\varepsilon(t)$ — точное решение исходной задачи. Учитывая предложение 3, для изучения аппроксимации $u_\varepsilon(t)$ и его производных достаточно изучить аппроксимации функций $\overline{u}_n$, $\Pi_n(\frac{t-1}{\varepsilon})$ и их производных для достаточно большого n. Тогда требуемая аппроксимация u_ε будет получена как сумма этих двух аппроксимаций.

5.4.1 Аппроксимация функций $\overline{u}_n$

При построении аппроксимации $\overline{u}_n(t)$ можно считать, что $\overline{u}_n$ — достаточно гладкая не зависящая от ε функция, поскольку аппроксимации можно строить для $\overline{u}_k$, а потом, сложив их, получить аппроксимацию для $\overline{u}_n(t)$.

Искомую аппроксимацию обозначим через $\overline{S}(t)$. Известно (см. [50, с. 230]), что если расчетная сетка равномерна, а функция достаточно гладкая, то существует кубический сплайн из $S(\Delta, 3, 1)$, интерполирующий ее в узлах сетки и приближающий эту функцию с точностью $O(h^4)$. На $[0, t_m]$ сетка равномерна, поэтому функцию $\overline{S}(t)$ на $[0, t_m]$ определим в виде такого сплайна. При этом из формул, полученных в [50, с. 230] непосредственно следует, что

$$\|\overline{u}_n(t) - \overline{S}(t)\|_{C_{[0,t_m]}} \le \frac{C}{m^4}, \tag{5.4.1}$$

$$|\overline{u}'_n(\xi_j) - \overline{S}'(\xi_j)| \le \frac{C}{m^4},\ j = 1,\ 2, \ldots,\ m+2, \tag{5.4.2}$$

$$\overline{u}''(\xi_j) = \overline{S}''(\xi_j) - \frac{1}{24}h^2 \overline{u}_n^{IV}(\xi_j) + O\left(\frac{1}{m^4}\right),\ j = 2, 3, \ldots,\ m+1, \tag{5.4.3}$$

$$\overline{u}''_n(\xi_j) = \overline{S}''(\xi_j) + \frac{1}{12}h^2\, \overline{u}_n^{IV}(\xi_j) + O\left(\frac{1}{m^4}\right),\ j = 1, m+2. \tag{5.4.4}$$

На $[t_m, t_{m+2}]$ положим $\overline{S}(t) = P(t)$, где $P(t)$ — полином третьей степени, определяемый из условий $P^{(i)}(t_m) = \overline{S}^{(i)}(t_m)$, $i = 0, 1, 2$, $P'''(t_m) = \overline{u}'''_n(t_m)$.

Предложение 8. Справедливы оценки

$$\|\overline{S}^{(i)}(t) - \overline{u}_n^{(i)}(t)\|_{C_{[t_m, t_{m+2}]}} \le \tfrac{C}{m^{4-i}},\ i = 0, 1, 2. \tag{5.4.5}$$

Действительно, многочлен $P(t)$ отличается от многочлена Тейлора функции $\overline{u}_n(t)$ лишь выражением

$$(\overline{u}'_n(\xi_{m+2}) - \overline{S}'(\xi_{m+2}))(t - \xi_{m+2}) + (\overline{u}''_n(\xi_{m+2}) - \overline{S}''(\xi_{m+2}))(t - \xi_{m+2})^2/2,$$

которое в силу (5.4.2), (5.4.3) и того, что $t_{m+2} - t_m = O(\varepsilon|\ln\varepsilon|) = O(1/m)$, само имеет порядок $O(1/m^4)$, а его производные — порядок $O(1/m^{4-i})$, $i = 0, 1, 2$. Предложение доказано.

На $[t_{m+2}, t_{m+3}]$ положим $\overline{S} = \widetilde{P}(t)$, где $\widetilde{P}(t)$ — полином третьей степени, определяемый из условий: $\widetilde{P}^{(i)}(t_{m+2}) = \overline{S}^{(i)}(t_{m+2})$, $\widetilde{P}^{(i)}(t_{m+3}) = \overline{u}_n^{(i)}(t_{m+3})$, $i = 0, 1$.

На остальных отрезках определим $\overline{S}$ как интерполяционный эрмитов сплайн для функций $\overline{u}_n$, исходя из условий: $\overline{S}^{(i)}(t_j) = \overline{u}_n^{(i)}(t_j)$, $j = m+2, m+3, \ldots, 2m$, $i = 0, 1$.

Предложение 9. Справедливы оценки

$$\|\overline{S}^{(i)}(t) - \overline{u}_n^{(i)}(t)\|_{C_{[t_{m+2}, t_{m+3}]}} \le \frac{C}{m^{4-i}},\ i = 0, 1, 2. \tag{5.4.6}$$

Действительно, из предложения 8 и определения $\overline{S}(t)$ на $[t_{m+2}, t_{m+3}]$ вытекает, что на $[t_{m+2}, t_{m+3}]$ $\overline{S}(t)$ отличается от интерполяционного эрмитого сплайна функции $\overline{u}_n(t)$ лишь на полином $Q(t)$, определяемый условиями

$$Q^{(i)}(t_{m+2}) = \left(\overline{S}^{(i)} - \overline{u}_n^{(i)}\right)\Big|_{t=t_{m+2}},\ Q^{(i)}(t_{m+3}) = 0,\ i = 0, 1.$$

Поскольку в силу предложения 8

$$|(\overline{S} - \overline{u}_n)^{(i)}(t_{m+2})| \leq \frac{C}{m^{4-i}},$$

то из явного представления интерполяционного эрмитова сплайна [50, с. 59] вытекают оценки $\|Q^{(i)}(t)\|_{C_{[t_{m+2}, t_{m+3}]}} \leq \frac{C}{m^{4-i}}$, откуда получаем (5.4.6), если учесть, что эрмитов сплайн приближает $\overline{u}_n(t)$ с требуемой точностью. Предложение доказано.

Предложение 10. Справедливы оценки

$$\| S(t) - u_n(t)\|_{C_{[t_m,1]}} \leq \frac{C}{m^4}, \tag{5.4.7}$$

$$\| S'(t) - u_n'(t)\|_{C_{[t_{m+k}, t_{m+k+1}]}} \leq C\frac{\varepsilon^3}{k^3},\ k = 3, 4, \ldots,\ m-1, \tag{5.4.8}$$

$$| S''(\xi_s) - u_n''(\xi_s)| \leq C\frac{\varepsilon^3}{k^3},\ s = m+2k,\ m+2k+1,\ k = 3, 4, \ldots, m-1. \tag{5.4.9}$$

Доказательство непосредственно вытекает из представления интерполяционного эрмитова сплайна [50, с. 68] и того факта, что $h_{k+m} = O(\varepsilon/k)$.

Предложение 11. В точках коллокации ξ_s $(s \geq m+4)$ имеет место равенство

$$\mathcal{L}\,\bar{S}(\xi_s) - f(\xi_s) = O\Big(1/m^4 + 1/(mk)^3\Big), \tag{5.4.10}$$

$$k = 2, 3, \ldots, m-1,\ s = m+2k,\ m+2k+1.$$

Доказательство. При $s \geq m+4$, $\xi_s \geq t_{m+1}$. Поэтому в силу (5.1.2) для этих s : $\mathcal{L}\,S(\xi_s) = L\,S(\xi_s)$. Из этого факта, предложений 9, 11, оценки (5.4.1) при $n \geq 3$ и того, что $\varepsilon \leq 1/m$, получаем (5.4.4). Предложение доказано.

5.4.2 Аппроксимация функции $\Pi_n\Big(\frac{t-1}{\varepsilon}\Big)$

Искомую аппроксимацию обозначим через $z(t)$. Поскольку в силу (5.3.20) $\Pi_n(\frac{t-1}{\varepsilon})$ пренебрежимо мала на $[0, t_{m+2}]$, положим на этом отрезке $z(t) \equiv 0$. На $[t_{m+2}, t_{m+3}]$ определим $z(t)$ как кубический полином из условий

$$z^{(i)}(t_{m+2}) = 0,\ z^{(i)}(t_{m+3}) = \Pi_n^{(i)}\left((t_{m+3}-1)/\varepsilon\right),\ i = 0, 1.$$

На остальных частичных отрезках определим $z(t)$ как кубический эрмитов сплайн из условий

$$z^{(i)}(t_{m+k}) = \Pi_n^{(i)}\left((t_{m+k}-1)/\varepsilon\right),\ i=0,1,\ k=4,5,\ldots,m.$$

Оценим погрешность аппроксимации. Зафиксируем произвольный отрезок $[t_{m+k},\, t_{m+k+1}]\,(k \geq 3)$. Перейдем к переменной $\tau = (t-1)/\varepsilon$. Тогда отрезок $[t_{m+k}, t_{m+k+1}]$ будет иметь длину $\tilde{h}_{k+m} = O^*\left(\frac{1}{k}\right)$. При этом в силу (5.3.20) и оценок погрешности эрмитовой интерполяции [50, с. 68] будем иметь

$$\left\|\frac{d^i}{d\tau^i}\left(\Pi_n(\tau) - z(1+\varepsilon\tau)\right)\right\|_{C_{[\tau_{m+k},\tau_{m+k+1}]}} \leq C\left(\frac{1}{k}\right)^{4-i}\frac{k^5}{m^5},\ i=0,1,2, \tag{5.4.11}$$

причем в точках коллокации $\tau = \tilde{\xi}_{m+2k}$, $\tau = \tilde{\xi}_{m+2k+1}$ (где через $\tilde{\xi}_i$ обозначены числа $(\tilde{\xi}_i - 1)/\varepsilon$) (в силу [50, с. 68]) справедливы представления

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_n(\tau) = \frac{d}{d\tau}z(1+\varepsilon\tau) + \frac{1}{12}\lambda(1-\lambda)(1-2\lambda)\tilde{h}^3_{k+m}\Pi_n^{IV}(\tau) + O\left(\tfrac{1}{k^4}\right)\tfrac{k^5}{m^5}, \tag{5.4.12}$$

$$\begin{gathered}\frac{d^2}{d\tau^2}\Pi_n(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2}z(1+\varepsilon\tau) + \frac{4}{5!}(1-2\lambda)[1-5\lambda(1-\lambda)]\tilde{h}^3_{k+m}\Pi_n^{V}(\tau) + \\ +O\left(\frac{1}{k^4}\right)\frac{k^5}{m^5},\ \lambda = \frac{\tau-\tau_{m+k}}{\tilde{h}_{m+k}}.\end{gathered} \tag{5.4.13}$$

Замечание 3.1 На отрезке $[\tau_{m+2}, \tau_{m+3}]$ функция $z(1+\varepsilon\tau)$ отличается от тождественного нуля лишь на полином $\mathcal{E}(\tau)$, определяемый из условий $\mathcal{E}^{(i)}(\tau_{m+3}) = O(1/m^5)$, $\mathcal{E}^{(i)}(\tau_{m+2}) = 0$, $i=0,1$, который внесет погрешность не более $O(1/m^5)$ для всех производных $z(t)$. Учитывая, что и сама функция $\Pi_n(\tau)$ на $[\tau_{m+2}, \tau_{m+3}]$ в силу (5.3.17) имеет норму $O(1/m^5)$ вместе с производными, получаем оценку

$$\left\|\frac{d^i}{d\tau^i}\left(\Pi_n(\tau) - z(1+\varepsilon\tau)\right)\right\|_{C_{[\tau_{m+2},\tau_{m+3}]}} \leq \frac{C}{m^5},\ i=0,1,2. \tag{5.4.14}$$

Таким образом, мы получили, что сумма $\overline{S}(t) + z(t)$ хорошо приближает решение краевой задачи.

5.5 О коррекции сплайн-аппроксимаций

Как и в [50] при исследовании нежестких краевых задач, нам нужно построить сплайн, который не только аппроксимирует решение исходной задачи, но и удовлетворяет уравнению в точках коллокации с высокой точностью. Построенная в предыдущем параграфе аппроксимация в этом смысле не пригодна в зоне погранслоя. Поэтому сплайн $z(1+\varepsilon\tau)$ нуждается в коррекции. В этом пункте мы сначала построим скорректированный сплайн, а затем покажем, что новая аппроксимация удовлетворяет заявленным требованиям.

5.5.1 Построение скорректированного сплайна

Следуя [50], введем в рассмотрение эрмитов сплайн $H(\tau)$, $(\tau \in [\tau_{m+3}, \tau_{2m}])$, определяемый соотношениями

$$H(\tau_{m+3}) + z(1+\varepsilon\tau_{m+3}),\ H(\tau_{2m}) = z(1+\varepsilon\tau_{2m}), \tag{5.5.1}$$

$$\begin{aligned} \ddot{H}(\tilde{\xi}_{m+2k}) &= \ddot{z}(1+\varepsilon\tilde{\xi}_{m+2k}) + K_1\tilde{h}^3_{m+k}\,\Pi_n^V\left(\tau_m + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2}\right) - \\ &- p\left(t_{m+k} + \tfrac{h_{m+k}}{2}\right) K_2\,\tilde{h}^3_{m+k}\,\Pi_n^{IV}\left(\tau_{m+k} + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2}\right),\ k \geq 3, \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

$$\begin{aligned} \ddot{H}(\tilde{\xi}_{m+2k+1}) = \ddot{z}(1+\varepsilon\tilde{\xi}_{m+2k+1}) - K_1\,\tilde{h}^3_{m+k}\Pi_n^V\left(\tau_m + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2}\right) - \\ +p\left(t_{m+k} + \tfrac{h_{m+k}}{2}\right) K_2\,\tilde{h}^3_{m+k}\Pi_n^{IV}\left(\tau_{m+k} + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2}\right),\ k \geq 3, \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

где $K_1 = \frac{4}{5!}(1-2\lambda)[1-5\lambda(1-\lambda)]$, $K_2 = \frac{1}{12}\lambda(1-\lambda)(1-2\lambda)$, и $\lambda = \frac{\tau-\tau_{m+k}}{\tilde{h}_{m+k}}$; точка здесь означает дифференцирование по τ.

В [50] было показано, что такой сплайн существует и единственен. На $[0, \tau_{m+3}]$ положим $H(\tau) = z(1+\varepsilon\tau)$.

Заметим, что в силу (5.3.20) и того, что при $\tau = \frac{t-1}{\varepsilon}$, справедливы оценки

$$\|\Pi_n^{(i)}(\tau)\|_{C_{[\tau_{m+k},\tau_{m+k+1}]}} \leq C\frac{k^5}{m^5},\ i = 0, 1, \ldots, 5,\ k \geq 3. \tag{5.5.4}$$

Покажем теперь, что сплайн $H(\tau)$ близок к построенному в предыдущем разделе сплайну $z(1+\varepsilon\tau)$.

Предложение 12. Справедливы оценки

$$\|H(\tau) - z(1+\varepsilon\tau)\|_{C_{[\tau_{m+3},\tau_{2m}]}} \leq \frac{C}{m^4}, \tag{5.5.5}$$

$$\|\dot{H}(\tau) - \dot{z}(1+\varepsilon\tau)\|_{C_{[\tau_{m+k},\tau_{m+k+1}]}} \leq \frac{Ck}{m^5},\ k = 3, 4, \ldots, m-1. \tag{5.5.6}$$

Доказательство. $\Phi(\tau) = H(\tau) - z(1+\varepsilon\tau)$. Тогда

$$\Phi(\tau) = \int\limits_{\tau_{m+3}}^{\tau_{2m}} G^*(\tau,\xi)\,\ddot{\Phi}\,d\xi, \tag{5.5.7}$$

где

$$G^*(\tau,\xi) = \begin{cases} \frac{(\xi-\tau_{m+3})(\tau-\tau_{2m})}{\tau_{2m}-\tau_{m+3}},\ \xi \le \tau \\ \\ \frac{(\xi-\tau_{2m})(\tau-\tau_{m+3})}{\tau_{2m}-\tau_{m+3}},\ \xi > \tau. \end{cases} \tag{5.5.8}$$

Теперь отметим следующий факт. Функция $\ddot{\Phi}(\tau) = \ddot{z}(1+\varepsilon\tau) - \ddot{H}(\tau)$ на каждом отрезке $[\tau_{k+m}, \tau_{k+m+1}]$ является линейной и в точках $\tilde{\xi}_{m+2k}$, $\tilde{\xi}_{m+2k+1}$ принимает значения, равные по модулю и противоположные по знаку.

Поэтому

$$\int\limits_{\tau_{m+k}}^{\tau_{m+k+1}} \ddot{\Phi}(\tau)d\tau = 0,\ k = 3, 4, \ldots, m-1. \tag{5.5.9}$$

Учитывая (5.5.9), (5.5.1) - (5.5.4) и тот факт, что изменение $G^*(\tau,\xi)$ на $[\tau_{m+k}, \tau_{m+k+1}]$ не превосходит $O(\tilde{h}_{m+k})$ (см. (5.5.8)) получим, что

$$\left|\int\limits_{\tau_{m+k}}^{\tau_{m+k+1}} G^*(\tau,\xi)\,\ddot{\Phi}(\xi)\,d\xi\right| \le C\tilde{h}_{m+k} \int\limits_{\tau_{m+k}}^{\tau_{m+k+1}} |\ddot{\Phi}(\xi)|d\xi \le C_1\tilde{h}^5_{m+k}\frac{k^5}{m^5} \le \frac{C_2}{m^5}.$$

Отсюда и из (5.5.7) получаем оценку (5.5.5).

Далее заметим, что $\frac{\partial G^*}{\partial\tau} \equiv const$ на любом отрезке, содержащем точку $\tau = \xi$. Поэтому в силу (5.5.9)

$$\int\limits_{\tau_{m+s}}^{\tau_{m+s+1}} \frac{\partial G^*}{\partial\tau}(\tau,\xi)\ddot{\Phi}(\xi)d\xi = 0,\ \tau \in [\tau_{m+s}, \tau_{m+s+1}].$$

Для оценки этого интеграла при $\tau \in [\tau_{m+k}, \tau_{m+k+1}]$ заметим, что

$$\frac{\partial G^*}{\partial\tau} = \begin{cases} (\xi-\tau_{m+3})/(\tau_{2m}-\tau_{m+3}),\ \xi \le \tau \\ (\xi-\tau_{2m})/(\tau_{2m}-\tau_{m+3}),\ \xi > \tau. \end{cases}$$

Отсюда, с учетом (5.5.1) - (5.5.4)

$$|\dot{\Phi}(\tau)| = \left|\int\limits_{\tau_{m+k}}^{\tau_{m+k+1}} \frac{\partial}{\partial\tau}G^*(\tau,\xi)\ddot{\Phi}(\xi)d\xi\right| \le$$

$$\le C\tilde{h}_{m+k}\,\frac{k^5}{m^5}\int\limits_{\tau_{m+k}}^{\tau_{m+k+1}} d\tau = C\tilde{h}^4_{m+k}\frac{k^5}{m^5} \le C_1\frac{k}{m^5}.$$

Из последнего неравенства вытекает (5.5.6). Предложение доказано.

Переходя к переменной t, получаем следующие результаты.

Лемма 1 *Справедливы формулы*

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i} \left(\Pi_n \left(\tfrac{t-1}{\varepsilon} \right) - H \left(\tfrac{t-1}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{C_{[t_{m+k}, t_{m+k+1}]}} \leq$$

$$\leq C \left(\frac{1}{m^4} + \frac{k}{m^5} \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^i \right), \ k \geq 3, i = 0, 1, 2. \tag{5.5.10}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[H \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) - Z(t) \right] \Big|_{t=\xi_{m+2k}} = \frac{1}{\varepsilon^2} K_1 \tilde{h}^3_{m+k} \Pi_n^V \left(\tau_{m+k} + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2} \right) -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon^2} \, p \left(t_{m+k} + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2} \right) K_2 \, \tilde{h}^3_{m+k} \Pi_n^{IV} \left(\tau_{m+k} + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2} \right), \tag{5.5.11}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[H \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) - Z(t) \right] \Big|_{t=\xi_{m+2k+1}} = - \frac{1}{\varepsilon^2} K_1 \tilde{h}^3_{m+k} \Pi_n^V \left(\tau_{m+k} + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2} p \left(t_{m+k} + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2} \right) K_2 \tilde{h}^3_{m+k} \Pi_n^{IV} \left(\tau_{m+k} + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2} \right). \tag{5.5.12}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\Pi_n \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) - Z(t) \right] \Big|_{t=\xi_{m+2k}} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} K_1 \tilde{h}^3_{m+k} \Pi_n^V \left(\tau_{m+k} + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2} \right) + O \left(\frac{k}{m^5 \varepsilon} \right), \tag{5.5.13}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\Pi_n \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) - Z(t) \right] \Big|_{t=\xi_{m+2k+1}} =$$

$$= - \frac{1}{\varepsilon^2} K_1 \tilde{h}^3_{m+k} \Pi_n^V \left(\tau_{m+k} + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2} \right) + O \left(\frac{k}{m^5 \varepsilon} \right) \tag{5.5.14}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\Pi_n \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) - Z(t) \right] \Big|_{t=\xi_j} = \pm \frac{1}{\varepsilon^2} K_1 \tilde{h}^3_{m+k} \Pi_n^V \left(\tau_{m+k} + \tfrac{\tilde{h}_{m+k}}{2} \right) +$$

$$+ O \left(\frac{k}{m^5 \varepsilon^2} \right), \ j = m + 2k, \ m + 2k + 1. \tag{5.5.15}$$

Доказательство. Оценка (5.5.10) вытекает из (5.4.11), (5.5.2) - (5.5.6), формулы (5.5.11) и (5.5.12) — из (5.5.2), (5.5.3), а формулы (5.5.13) - (5.5.15) — из (5.4.12) и (5.4.13). Лемма 1 доказана.

Следствие 2 *Справедливы представления*

$$\mathcal{L}\left(H\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\right)\Big|_{t=\xi_j} = O\left(\tfrac{k}{m^5\varepsilon}\right),\ j = 2k+m,\ 2k+m+1,\ k \geq 3, \tag{5.5.16}$$

$$\mathcal{L}\left(H\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\right)\Big|_{t=\xi_j} = O\left(\tfrac{1}{m^5\varepsilon}\right),\ j = m+4,\ m+5, \tag{5.5.17}$$

$$\mathcal{L}\left(H\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\right)\Big|_{t=\xi_j} = 0,\ j \leq m+3. \tag{5.5.18}$$

Доказательство. При $j \geq m+4$ имеем $\mathcal{L}\left(H\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\right)\Big|_{t=\xi_j} =$

$$= L\left(H\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\right)\Big|_{t=\xi_j} = L\left(H\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right) - Z(t)\right)\Big|_{t=\xi_j} +$$

$$+ L\left(Z(t) - \Pi_n\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\right)\Big|_{t=\xi_j} + L\left(\Pi_n\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\right)\Big|_{t=\xi_j}. \tag{5.5.19}$$

Из (5.3.13) - (5.3.15) вытекает, что $L\left(\Pi_n\right) = O(\varepsilon^n)$, а из (5.5.11) - (5.5.15) следует, что члены с первыми и вторыми производными в первых двух слагаемых из (5.5.19) взаимно уничтожаются. Члены с производными нулевого порядка оцениваются с помощью (5.5.10) при $i = 0$ и (5.4.14). Поэтому при $n \geq 5$ оценка (5.5.16) получается из (5.5.19). Оценка (5.5.17) следует из (5.4.14), (5.5.19) и того, что $H\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right) = Z(t)$ при $t \in [t_{m+2}, t_{m+3}]$ по построению. Формула (5.5.18) верна, так как $H\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right) = 0$ для $t < t_{m+2}$. Следствие доказано.

Определим, наконец, скорректированную сплайн-аппроксимацию решения задачи (5.1.3) в виде $U(t) = \overline{S}(t) + H\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)$.

5.5.2 Свойства функции $U(t)$

Покажем, что $U(t)$ одновременно с высокой точностью удовлетворяет уравнению (5.1.3) и приближает точное решение задачи (5.1.1).

Лемма 2 *Пусть $W(t) = \mathcal{L}U - f(t)$. Тогда*

$$W(\xi_s) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{m^3}\right),\ s = 1, 2, m+1, m+2, m+3 \\ O\left(\frac{1}{m^4}\right),\ s = 3, 4, \ldots, m \\ O\left(\frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^3k^3} + \frac{k}{m^5\varepsilon}\right), \\ s = m+2k, m+2k+1,\ k = 2, 3, \ldots, m-1. \end{cases} \tag{5.5.20}$$

Доказательство. При $s = 3, 4, \ldots, m$ оценка (5.5.20) следует из (5.5.18), (5.3.15), (5.4.1) - (5.4.3) и того, что в силу [50, с. 233]

$$\overline{S}''(\xi_{j-1}) - 2\overline{S}''(\xi_j) + S''(\xi_{j+1}) = \overline{U}^{IV}(\xi_j)/m^2 + O(1/m^4)$$

При $s \geq m+4$ эта оценка следует из (5.3.13), (5.4.10), (5.5.16). При $s = 1, 2, m+1, m+2, m+3$ (5.5.20) получается из (5.3.13), (5.4.5), (5.5.18) и того, что $\varepsilon \ll \frac{1}{m}$. Лемма 2 доказана.

Замечание 4.1 Из (5.3.16) при $n \geq 3$, $i = 0$ (5.4.1), (5.4.5), (5.4.6), (5.3.10) и (5.3.20) вытекает оценка

$$\|U(t) - u_\varepsilon(t)\|_C \leq \frac{C}{m^4}.$$

5.6 О базисах в пространствах F

5.6.1 О роли базисов пространства F в доказательстве теоремы 1

Предположим, что нам удалось построить в тестовом пространстве F систему функций $H_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, 3m-1$ для которой

$$H_i(\xi_j) = \delta_{ij} \tag{5.6.1}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера). Очевидно, что функции $H_i(t)$ линейно независимы, и, следовательно, образуют в F базис. Этот базис мы будем называть фундаментальным.

Докажем, что из существования фундаментального базиса вытекает существование и единственность решения коллокационной задачи $u_m(t)$. Для этого введем в рассмотрение оператор $P = P(\varepsilon, m)$:

$$P_n = \sum_{i=1}^{3m-1} u(\xi_i) H_i(t). \tag{5.6.2}$$

Нетрудно убедиться, что P — проектор на F, то есть $P : \widetilde{C}_{[0,1]} \to F$ и $P^2 = P$. Этот оператор будем называть интерполяционным проектором. Как и в [30, с. 158] получаем, что коллокационная задача эквивалентна операторному уравнению $P\mathcal{L}u_m = Pf$. Но P действует на F как тождественный оператор. Поэтому последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$\mathcal{L}u_m = Pf, \tag{5.6.3}$$

которое имеет единственное решение в силу обратимости оператора $\mathcal{L}$. Тем самым однозначная разрешимость коллокационной задачи доказана.

Теперь докажем, как, имея оценки на функции фундаментального базиса, можно получить оценку погрешности решения коллокационной задачи из теоремы 1. Пусть $U(t) = \overline{S}(t) + H\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)$ — функция, построенная в предыдущем разделе. Обозначим $w(t) = \mathcal{L}\left[U(t) - u_m(t)\right]$, где $u_m(t)$ — решение коллокационной задачи. Поскольку $w \in F$, то ее можно представить в виде

$$w(t) = \sum_{i=1}^{3m-1} w(\xi_i) H_i(t) = \sum_{i=1}^{3*m-1} W(\xi_i) H_i(t), \tag{5.6.4}$$

где $W(t) = \mathcal{L}U(t) - f(t)$ — функция из леммы 2. Последнее справедливо, так как $\mathcal{L}u_m(\xi_i) = f(xi_i)$. Предположим теперь, что нам удалось получить оценки

$$\|H_i\|_1 \leq \frac{C}{m},\ i = 1, 2, \ldots, m+3, \tag{5.6.5}$$

$$\|H_{m+s}\|_1 \leq \frac{C\varepsilon}{k},\ s = 2k, 2k+1;\ k \geq 2. \tag{5.6.6}$$

Тогда в силу (5.6.4)-(5.6.6) и леммы 2 будем иметь

$$\begin{gathered}
\|w\|_1 \leq \sum_{i=1}^{3m-1} |W(\xi_i)| \|H_i\|_1 = \\
= \sum_{i=3}^{m} |W(\xi_i)| \|H_i\|_1 + \sum_{i=m+4}^{3m-1} |W(\xi_i)| \|H_i\|_1 + \\
+ \sum_{i=1,2,m+1,m+2,m+3} |W(\xi_i)| \|H_i\|_1 \leq \tfrac{C}{m^4} \sum_{i=3}^{m} \|H_i\|_1 + \\
+C \sum_{k=2}^{m-1} \left(\tfrac{k}{m^5\varepsilon} + \tfrac{1}{m^3k^3} + \tfrac{1}{m^4}\right) \left(\|H_{m+2k}\|_1 + \|H_{m+2k+1}\|_1\right) + \\
+ \tfrac{C}{m^3} \sum_{i=1,2,m+1,m+2,m+3} \|H_i\|_1 \leq \tfrac{C_1}{m^4} + \\
+C_1 \sum_{k=2}^{m-1} \left(\tfrac{1}{m^5} + \tfrac{1}{m^3k^4} + \tfrac{1}{m^5k}\right) + \tfrac{C_1}{m^4} \leq \tfrac{C_2}{m^4}.
\end{gathered} \tag{5.6.7}$$

Но поскольку $U(t) - u_m(t) = \mathcal{L}^{-1}w(t)$, а в силу предложения 1 $\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L_1 \to C} \leq C$, то из (5.6.7) получаем, что $\|U - u_m\|_C \leq \frac{C}{m^4}$, откуда с учетом замечания 12 следует утверждение теоремы 1.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 нам достаточно доказать существование в F биортогонального базиса $\{H_i\}$ и оценки (5.3.8), (5.3.6). Решению этой весьма трудной задачи в случае, когда оператор L имеет вид (5.3.1, будут посвящены этот и два последующих раздела. Тем самым будет завершено доказательство теоремы 1 в случае $q(t) \equiv 0$. При $q(t) \not\equiv 0$ построение биортогональных базисов становится очень трудной задачей. В этом случае доказательство, основанное на уже доказанном результате для "укороченного" оператора и идеях метода компактной аппроксимации [42], будет дано в последнем разделе данной главы.

Схема построения базисов $\{H_i\}$ будет следующей. Вначале мы построим в F вспомогательные базисы F_i, по своим свойствам во многом аналогичные β-базисам, описанным в [30, с. 140]. Функции $H_i(t)$ будем строить в виде разложений по этим базисам. Для коэффициентов разложений будут получены СЛАУ с коллокационными матрицами. Исследование этих СЛАУ в последующих двух разделах позволит построить функции с нужными свойствами.

5.6.2 Конструкция вспомогательных базисов в случае $q(t) \equiv 0$

Заметим вначале, что $F = DN$, где D — оператор, полученный из L заменой $u'(t) = z(t)$, а N — пространство параболических сплайнов дефекта 1 на отрезке $[0, t_{m+2}]$, дефекта 2 на отрезке $[t_{m+1}, 1]$ и, кроме этого

$$\int\limits_0^1 z(t)\,dt = 0.$$

Построим вначале базисные функции в N, а искомый базис будет получен действием на эти функции оператором D. Однако вначале построим базис в пространстве N^*, которое отличается от N тем, что функции из N^* удовлетворяют более простому условию $\int\limits_0^1 z(t)dt = 0$.

Для $i = 1, 2, \ldots, m+2$ положим

$$\mathcal{E}_i^*(t) = N_{2,i-3}(t), \tag{5.6.8}$$

где $N_{2,i}(t)$ — нормализованный параболический B-сплайн, номер i определяется номером крайнего левого узла носителя $supp\, N_{2,i} = (t_i, t_{i-3})$. Для $i = m+3$ положим

$$\mathcal{E}^*_{m+3}(t) = \begin{cases} 4\left(\frac{t-t_m}{h_m}\right)^2, \ t \in [t_m, t_{m+1}] \\ 4 - \left(4 + 8\frac{h_{m+1}}{h_m}\right)\left(\frac{t-t_{m+1}}{h_{m+1}}\right)^2 + 8\frac{t-t_{m+1}}{h_m}, \ t \in [t_{m+1}, t_{m+2}] \\ 0, \ t \notin [t_m, t_{m+2}]. \end{cases} \tag{5.6.9}$$

Пусть, далее, i_0 — достаточно большое натуральное число. Для $k = 2, 3, \ldots, i_0$ положим

$$\mathcal{E}^*_{m+2k}(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_{m+k+1})^2}{h^2_{m+k+1}}, \, t \in [t_{m+k-1}, t_{m+k}] \\ \\ \frac{(t-t_{m+k+1})^2}{h_{m+k}}, \, t \in [t_{m+k}, t_{m+k+1}] \\ \\ 0, \, t \notin [t_{m+k-1}, t_{m+k+1}] \end{cases} \tag{5.6.10}$$

$$\mathcal{E}^*_{m+2k+1}(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_{m+k})(t_{m+k+1}-t)}{h^2_{m+k}}, \, t \in [t_{m+k}, t_{m+k+1}] \\ \\ 0, \, t \notin [t_{m+k}, t_{m+k+1}] \end{cases} \tag{5.6.11}$$

Определим теперь функции $\mathcal{E}^*_{m+2k}(t)$ и $\mathcal{E}^*_{m+2k+1}(t)$ для $k = i_0+1, \ i_0+2, \ldots, \ m-1$. Положим

$$\mathcal{E}^*_{m+2k}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_{m+k+1}}^{t} \frac{(\xi_{m+2k+1}-\tau)d\tau}{\xi_{m+2k+1}-\xi_{m+2k}}, \, t \in [t_{m+k}, t_{m+k+1}] \\ \\ \alpha_{2k} H^*\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right), \, t \in [t_{m+1}, t_{m+k}] \\ \\ 0, \, t \notin [t_{m+1}, t_{m+k+1}] \end{cases} \tag{5.6.12}$$

Здесь $H^*\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \frac{d}{dt} H\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)$.

$$\mathcal{E}^*_{m+2k+1}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_{m+k+1}}^{t} \frac{(\tau-\xi_{m+2k})d\tau}{\xi_{m+2k+1}-\xi_{m+2k}}, \, t \in [t_{m+k}, t_{m+k+1}] \\ \\ \alpha_{2k} H^*\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right), \, t \in [t_{m+1}, t_{m+k}] \\ \\ 0, \, t \notin [t_{m+1}, t_{m+k+1}] \end{cases} \tag{5.6.13}$$

Коэффициенты в формулах (5.6.12), (5.6.13) выбираются таким образом, чтобы функции $\mathcal{E}^*_{m+s}(t)$ были непрерывны.

Обоснуем, почему $\mathcal{E}^*_{m+s}$ выбираются именно так. Рассмотрим, например, $D\mathcal{E}^*_{m+2k} = -\varepsilon\frac{d}{dt}\mathcal{E}^*_{m+2k} + p(t)\,\mathcal{E}^*_{m+2k}$ на отрезке $[t_{m+k}, t_{m+k+1}]$. Из того, что $h_{m+k} = O(\varepsilon/k)$, легко вывести, что

$$\|p(t)\mathcal{E}_{m+2k}(t)\|_{C_{[t_{m+k},t_{m+k+1}]}} = O(1/k).$$

Поэтому

$$D\mathcal{E}^*_{m+2k} = \frac{\xi_{m+2k+1} - t}{\xi_{m+2k+1} - \xi_{m+2k}} + O(1/k).$$

Отсюда видно, что

$$D\mathcal{E}^*_{m+2k}(\xi_{m+2k}) = 1 + O(1/k),\ D\mathcal{E}^*_{m+2k}(\xi_{m+2k+1}) = O(1/k).$$

Можно показать, что на отрезке $[t_{m+1}, t_{m+k}]$ функция $D\mathcal{E}^*_{m+2k}$ мала по норме. Таким образом, значения $D\mathcal{E}^*_{m+\nu}(\xi_s)$ близки к единице при $s = m+\nu$ и к нулю при $s \neq m+\nu$.

К сожалению, построенные функции $\mathcal{E}^*_s(t)$ не удовлетворяет ограничению $\int\limits_0^1 \mathcal{E}^*_s(t)dt = 0$. Поэтому скорректируем их следующим образом

$$\mathcal{E}_s(t) = \mathcal{E}^*_s(t) + \beta_s H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right), \tag{5.6.14}$$

где коэффициенты β_s выбираются так, чтобы

$$\int\limits_0^1 \mathcal{E}_s(t)dt = 0. \tag{5.6.15}$$

Наконец, искомые базисные функции в F определим по формуле

$$F_s(t) = D\mathcal{E}_s(t),\ 1 \leq s \leq 3m-1. \tag{5.6.16}$$

5.6.3 Изучение вспомогательного базиса

Результаты этого пункта носят технический характер и нужны для удобства изучения коллокационных матриц в последующих разделах.

Предложение 13. Справедливы оценки

$$|\alpha_{2k}| \leq C\tfrac{m^5}{k^6},\ |\alpha_{2k+1}| \leq C\tfrac{m^5}{k^6},\ k \geq i_0 + 1. \tag{5.6.17}$$

Доказательство. Из (5.6.12) получаем, что

$$\mathcal{E}^*_{m+2k}(t_{m+k}) = O^*\left(\tfrac{h_{m+k}}{\varepsilon}\right) = O^*(1/k),$$

а из (5.3.20), (5.5.10) следует, что $H^*\left(\frac{t_{m+k+1}}{\varepsilon}\right) = O^*\left(\frac{k^5}{m^5}\right)$, откуда и получаются оценки (5.6.17). Предложение доказано.

Предложение 14. Справедливы оценки

$$\beta_{2k+m} = O(1/k),\ \beta_{2k+m+1} = O(1/k),\ k \geq 2. \tag{5.6.18}$$

Доказательство. Пусть $k \geq i_0 + 1$. Напомним, что $H^*\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \frac{d}{dt} H\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)$ и H — аппроксимация Π_n, для которой справедливы оценки (5.3.20) и (5.5.10). Поэтому H^* аппроксимирует $\varepsilon\frac{d\Pi_n}{dt}$ и удовлетворяет неравенству

$$\left\| \varepsilon \frac{d}{dt}\Pi_n\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right) - H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\right\|_{C_{[t_{m+n},t_{m+n+1}]}} \leq C\frac{p^2}{m^5}. \tag{5.6.19}$$

В силу (5.3.20)

$$\varepsilon \frac{d}{dt}\Pi_n\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right) = O\left(\tfrac{p^5}{m^5}\right)\ \ (t_{m+p} \leq t \leq t_{m+p+1}).$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{t_{m+k}}^{t_{m+1}} H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)dt\right| = \left|\sum_{p=1}^{k-1}\int\limits_{t_{m+p}}^{t_{m+p+1}} H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)dt\right| \leq$$
$$\leq C\sum_{p=1}^{k-1}\tfrac{p^5}{m^5}\,h_{m+p} \leq C_1\tfrac{\varepsilon}{m^5}\sum_{p=1}^{k-1}p^4 \leq C_2\varepsilon\tfrac{k^5}{m^5}.$$

Отсюда и из (5.6.17) получаем

$$\int\limits_{t_{m+1}}^{t_{m+k}} \alpha_s H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)dt = O^*\left(\tfrac{\varepsilon}{k}\right).$$

Заметим, что

$$\int\limits_{t_{m+k}}^{t_{m+k+1}} |\mathcal{E}^*_{m+2k}(t)|dt = O\left(\tfrac{\varepsilon}{k^2}\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_0^1 \mathcal{E}^*_{m+2k}(t)dt = O\left(\tfrac{\varepsilon}{k}\right). \tag{5.6.20}$$

Далее

$$\begin{gathered}\int\limits_0^1 H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)dt = \int\limits_{t_{m+1}}^1 H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)dt = \\ \int\limits_{t_{m+1}}^1 \varepsilon\tfrac{d\Pi_n}{dt}\,dt + \int\limits_{t_{m+1}}^1 \left[H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right) - \varepsilon\tfrac{d\Pi_n}{dt}\right]dt.\end{gathered} \tag{5.6.21}$$

Оценим первый интеграл в правой части. С учетом (5.6.19) имеем

$$\left|\int\limits_{t_{m+1}}^{1}\left[H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)-\varepsilon\tfrac{d\pi_n}{dt}\right]dt\right| \le \sum_{p=1}^{m-1}\int\limits_{t_{m+p}}^{t_{m+p+1}}\left|H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)-\varepsilon\tfrac{d\pi_n}{dt}\right|dt \le$$

$$\le \sum_{p=1}^{m-1}\tfrac{C}{m^5}p^2h_{m+p} \le C\tfrac{\varepsilon}{m^5}\sum_{p=1}^{m-1}p \le C_1\tfrac{\varepsilon}{m^3}. \tag{5.6.22}$$

Наконец, в силу (5.3.20)

$$\int\limits_{t_{m+1}}^{1}\varepsilon\frac{d\Pi_n}{dt}dt = \varepsilon\left[\Pi_n(1)-\Pi_n(t_{m+1})\right] = O^*(\varepsilon).$$

Из этого и (5.6.21), (5.6.22) получаем, что

$$\int\limits_0^1 H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)dt = O^*(\varepsilon). \tag{5.6.23}$$

Из (5.6.14), (5.6.15), (5.6.22), (5.6.23) получаем (5.6.18) для $k \ge i_0+1$. Аналогично получается оценка для $1 \le k \le i_0$. Предложение доказано.

Предложение 15. Справедлива оценка

$$|\beta_{m+3}| = O\left(|\ln\varepsilon|\right). \tag{5.6.24}$$

Доказательство следует из (5.6.23), (5.6.15) и того, что

$$\|\mathcal{E}^*_{m+3}(t)\|_1 = O(\varepsilon|ln\varepsilon|)$$

(см. (5.6.9)).

Предложение 16. Справедливы оценки

$$|\beta_s| = O\left(\tfrac{1}{m\varepsilon}\right),\ s \le m+2. \tag{5.6.25}$$

Доказательство вытекает из (5.6.23), (5.6.15) и того, что

$$\|N_{2,s}\|_1 = O(1/m)$$

(см. (5.6.8)).

Таким образом, мы получили оценки всех коэффициентов β_s в формулах (5.6.14).

Перейдем теперь к изучению базиса.

$$F_s = D\mathcal{E}_s = D\mathcal{E}_s^* + \beta_s DH^* \left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)$$

в пространстве F. Пусть $S(t) = DH^* \left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \mathcal{L} H \left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)$.

Предложение 17. Справедлива оценка

$$\|S(t)\|_{C_{[t_{m+k}, t_{m+k+1}]}} \le C \frac{k^3}{m^5}. \tag{5.6.26}$$

Доказательство вытекает из (5.5.10) и того, что

$$\mathcal{L}\Pi_n \left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon^n)\, (n \ge 5).$$

Предложение 18. Справедливы представления

$$F_s(t) = p(t) N_{2,s-3}(t) + \delta_s(t,\varepsilon) + \nu_s(t,\varepsilon),\ s \le m+2, \tag{5.6.27}$$

$$supp\, \delta_s(t,\varepsilon) \subset [t_{m+2}, t],$$

$supp\, \nu_s(t,\varepsilon) \subset [t_{s-4}, t_{s+1}]$ при $s \le m-1$ и $supp\, \nu_s(t,\varepsilon) \subset [t_{s-4}, t_s]$, при $m \le s \le m+2$,

$$\|\delta_s(t,\varepsilon)\|_{C_{[t_{m+k}, t_{m+k+1}]}} \le C \frac{k^3}{\varepsilon m^6} \le \frac{C_1}{\varepsilon m^3}, \tag{5.6.28}$$

$$\|\nu_s(t,\varepsilon)\|_C \le \varepsilon m. \tag{5.6.29}$$

Доказательство. Имеем

$$F_s(t) = D\mathcal{E}_s(t) = D\mathcal{E}_s^*(t) + \beta_s DH^* \left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right).$$

Но поскольку для $s \le m+2$, то $\mathcal{E}_s^* = N_{2,s-3}(t)$, то из последнего получаем

$$F_s(t) = p(t) N_{2,s-3}(t) + \beta_s DH^* \left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right) - \varepsilon N'_{2,s-3} -$$

$$- \begin{cases} 0,\ t \notin [\xi_3, \xi_m] \\ -\frac{\varepsilon}{24}\left[N'_{2,s-3}(t-h) - 2N'_{2,s-3}(t) + N'_{2,s-3}(t+h)\right],\ t \in [\xi_3, \xi_m]. \end{cases} \tag{5.6.30}$$

Положим $\delta_s(t,\varepsilon) = \beta_s DH^* \left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)$, а через $\nu_s(t,\varepsilon)$ обозначим два последних слагаемых в (5.6.30). Тогда оценка (5.6.28) вытекает из (5.6.25), (5.6.26), а оценка (5.6.29) — из неравенства $|N'_{2,s-3}| \le Cm$, $t \in [0, t_m]$. Предложение доказано.

Совершенно аналогично из (5.6.10), (5.6.11), (5.6.18) получаем

Предложение 19. Справедливы представления

$$F_{m+2k} = D\mathcal{E}^*_{m+2k}(t) + \delta_{m+2k}(t,\varepsilon), \tag{5.6.31}$$

$$F_{m+2k+1} = D\mathcal{E}^*_{m+2k+1}(t) + \delta_{m+2k+1}(t,\varepsilon), \tag{5.6.32}$$

$$supp\,\delta_s(t,\varepsilon) \subset [t_{m+1},1],\ \|\delta_s(t,\varepsilon)\|_{C_{[t_{m+p},t_{m+p+1}]}} \le C\frac{p^3}{m^5k}, \tag{5.6.33}$$

$$p = 2,3,\dots,m-1;\ k = 2,3,\dots,i_0.$$

Из (5.6.9), (5.6.24) вытекает следующее утверждение

Предложение 20. Справедливо представление

$$F_{m+3}(t) = p(t)\mathcal{E}^*_{m+3}(t) + \delta_{m+3}(t,\varepsilon) + \nu_{m+3}(t,\varepsilon) \tag{5.6.34}$$

$$supp\,\delta_{m+3} \subset [t_{m+2},1],\ \ supp\,\nu_{m+3} \subset [t_m,t_{m+2}]$$

$$\|\delta_{m+3}\|_{C_{[t_{m+k},t_{m+k+1}]}} \le C|\ln\varepsilon|\frac{k^3}{m^5}, \tag{5.6.35}$$

$$\|\nu_{m+3}\|_{C_{[t_m,t_{m+1}]}} \le \frac{C}{|\ln\varepsilon|}. \tag{5.6.36}$$

Изучим оставшиеся базисные функции.

Предложение 21. Справедливы представления

$$F_{m+s} = \begin{cases} \frac{t-t_{m+s}}{\xi_{m+2k+1}-\xi_{m+2k}} + O(1/k),\ t\in[t_{m+k},t_{m+k+1}] \\[2ex] \delta_s(t,\varepsilon),\ t\in[t_{m+2},t_{m+k}]\cup[t_{m+k+1},1] \\[2ex] 0,\ t\le t_{m+2}, \end{cases} \tag{5.6.37}$$

$$\|\delta_s(t,\varepsilon)\|_{C_{[t_{m+p},t_{m+p+1}]}} \le C\begin{cases} \frac{1}{k^3},\ p\le k \\[2ex] \frac{1}{m^2},\ p\ge k+1 \end{cases} \tag{5.6.38}$$

$$s = 2k, 2k+1;\ \ k = i_0+1,\dots,m-1.$$

Доказательство. Из (5.6.12), (5.6.14) при $t\in[t_{m+k},t_{m+k+1}]$ имеем

$$F_{m+2k+1}(t) = \frac{t-\xi_{m+2k}}{\xi_{m+2k+1}-\xi_{m+2k}} - p(t)\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_{m+k+1}}^{t}\frac{(\tau-\xi_{m+2k})d\tau}{\xi_{m+2k+1}-\xi_{m+2k}} =$$

$$= \frac{t-\xi_{m+2k}}{\xi_{m+2k+1}-\xi_{m+2k}} + O\left(\frac{h_{m+k}}{\varepsilon}\right) = \frac{t-\xi_{m+2k}}{\xi_{m+2k+1}-\xi_{m+2k}} + O(1/k),$$

так как в силу предложения 3 $h_{m+k} = O\left(\frac{\varepsilon}{2k}\right)$. Представление (5.6.37) для $t \in [t_{m+k}, t_{m+k+1}]$ доказано. Для $F_{m+2k}(t)$ доказательство аналогично.

Положим

$$\delta_s(t,\varepsilon) = D\left(\alpha_s H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\Big|_{[t_{m+2},t_{m+k}]} + \beta_s H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\right) =$$

$$= \alpha_s D H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)|_{[t_{m+2},t_{m+k}]} + \beta_s H^*\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right).$$

Тогда из предложения 17 при $p \le k$ имеем

$$\|\delta_s(t,\varepsilon)\|_{C_{[t_{m+p},t_{m+p+1}]}} \le C\frac{p^3}{m^5}(\alpha_s + \beta_s),$$

откуда в силу (5.6.17), (5.6.18) при $s = 2k$ или $s = 2k+1$

$$\|\delta_s(t,\varepsilon)\|_{C_{[t_{m+p},t_{m+p+1}]}} \le \frac{C}{k^3} + C\frac{k^2}{m^5} \le \frac{C_1}{k_3},$$

и оценка (5.6.38) для случая $p \le k$ доказана.

В случае $p \ge k+1$ слагаемое с α_s отсутствует, и поэтому

$$\|\delta_s(t,\varepsilon)\|_{C_{[t_{m+p},t_{m+p+1}]}} \le C\frac{p^3}{m^5}\beta_s \le C\frac{p^3}{m^5 k} \le \frac{C}{m^2}.$$

Предложение 21 доказано.

В дальнейшем нам будут нужны оценки функции $F_s(t)$ в норме пространства $L_1[0,1]$.

Предложение 22. Имеют место следующие оценки

$$\|F_s(t)\|_1 \le \begin{cases} \frac{C}{m},\ 1 \le s \le m+3 \\ C\frac{\varepsilon}{k},\ s = m+2k, m+2k+1;\ k > 2, \end{cases} \tag{5.6.39}$$

где C, вообще говоря, зависит от i_0, но не зависит от ε и m.

Доказательство. Вначале установим неравенство (5.6.39) для $1 \le s \le m+2$. В силу (5.6.28), (5.6.29) и того, что $h_{p+m} = O\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)$ (см. предложение 3) имеем

$$\|\nu_s\|_1 \le C(t_{s+1} - t_{s-4})\varepsilon m \le C_1\varepsilon, \tag{5.6.40}$$

$$\|\delta_s\|_1 = \sum_{p=2}^{m-1}\int_{t_{m+p}}^{t_{m+p+1}} |\delta_s(t,\varepsilon)| dt \le$$

$$\le \frac{C_1}{\varepsilon m^3}\sum_{p=2}^{m-1}\int\limits_{t_{m+p}}^{t_{m+p+1}} dt \le \frac{C_2}{m^3}\sum_{p=2}^{m-1}\frac{1}{p} \le \frac{C_3}{m^3}(m-2) \le \frac{C_4}{m^2}. \tag{5.6.41}$$

Из (5.6.27), (5.6.28), (5.6.40), (5.6.41) и того, что $\|N_{2,s-3}\|_1 = O(1/m)$, получаем оценку (5.6.39) для $1 \le s \le m+2$. Для $s = m+3$ эта оценка устанавливается аналогичным образом с помощью (5.6.34) - (5.6.36). Установим неравенство (5.6.39) для F_{m+2k}, $k = 2, 3, \ldots, i_0$. Воспользовавшись (5.6.31) - (5.6.34), имеем

$$\|F_{m+2k}\|_1 \le \|D\mathcal{E}^*_{m+2k}\|_1 + \|\delta_s\|_1. \tag{5.6.42}$$

Далее, в силу (5.6.33) аналогично (5.6.41) получаем

$$\|\delta_{m+2k}\|_1 \le \frac{C}{m^5 k}\sum_{p=2}^{m-1} p^3 \frac{\varepsilon}{p} \le \frac{C_1\varepsilon}{m^2 k} \le C_1\frac{\varepsilon}{k}. \tag{5.6.43}$$

Наконец, в силу (5.6.10) и определения оператора D имеем

$$\begin{gathered}\|D\mathcal{E}^*_{m+2k}\|_1 \le \varepsilon\|\mathcal{E}^{*\prime}_{m+2k}\|_1 + \|p(t)\mathcal{E}^*_{m+2k}\|_1 \le \\ \le 2\varepsilon + C(h_{m+k-1} + h_{m+k}) \le C\varepsilon \le C\tfrac{i_0\varepsilon}{k} \le C_1\tfrac{\varepsilon}{k}.\end{gathered} \tag{5.6.44}$$

Из (5.6.42)-(5.6.44) получаем (5.6.39) для $F_{m+2k}\,(k = 2, 3, \ldots, i_0)$. Аналогично получается неравенство для F_{m+2k+1} $(k = 2, 3, \ldots, i_0)$.

Для $s = m+2k, m+2k+1$; $k \ge i_0 + 1$ оценка (5.6.39) получается из (5.6.37), (5.6.38) так же, как и для других s. Предложение 22 доказано.

Замечание 5.1 В дальнейшем ради краткости будем считать, что в формулах (5.6.27), (5.6.34) $p(t) \equiv 1$. Это предложение не ограничивает общности, поскольку $p(t) \ge p_0 > 0$, $p(t) = p(t_s) + O(1/m)$ для $t \in supp\, B_{2,s-3}$, и нужное представление может быть получено умножением функций $F_s(t)$ на нормирующий множитель $1/p(t_s)$. При этом свойства функций $F_s(t)$, очевидно, не изменяется.

Наконец, вычислим значения функций $D\mathcal{E}^*_s(t)$, $s = m+2k, m+2k+1$; $2 \le$

$k \le i_0$ в точках коллокации. Пусть $t_1 = 0.5 + \sqrt{3}/6$, $t_2 = 0.5 - \sqrt{3}/6$. Тогда

$$
\begin{aligned}
D\mathcal{E}^*_{m+2k}(\xi_{m+2k}) &= \tfrac{2\varepsilon t_1}{h_{m+k}} + p(\xi_{m+2k})t_1^2,\\
D\mathcal{E}^*_{m+2k}(\xi_{m+2k+1}) &= \tfrac{2\varepsilon t_2}{h_{m+k}} + p(\xi_{m+2k+1})t_2^2,\\
D\mathcal{E}^*_{m+2k}(\xi_{m+2k-1}) &= -\tfrac{2\varepsilon t_1}{h_{m+k-1}} + p(\xi_{m+2k-1})t_1^2,\\
D\mathcal{E}^*_{m+2k}(\xi_{m+2k-2}) &= -\tfrac{2\varepsilon t_2}{h_{m+k-1}} + p(\xi_{m+2k-2})t_2^2,\\
D\mathcal{E}^*_{m+2k+1}(\xi_{m+2k}) &= -\tfrac{\varepsilon\sqrt{3}}{3h_{m+k}} + \tfrac{p(\xi_{m+2k})}{6},\\
D\mathcal{E}^*_{m+2k+1}(\xi_{m+2k+1}) &= \tfrac{\varepsilon\sqrt{3}}{3h_{m+k}} + \tfrac{p(\xi_{m+2k+1})}{6}.
\end{aligned}
\tag{5.6.45}
$$

5.7 Структура коллокационной матрицы

Матрицу $\Phi = \|F_j(\xi_i)\|$ будем называть коллокационной. При построении фундаментальных базисов будут возникать СЛАУ с коллокационной матрицей. Поэтому ее надо хорошо изучить. В настоящем разделе мы докажем обратимость Φ и некоторых ее блоков, а также получим оценки этих блоков.

Для изучения коллокационной матрицы разобьем индексы на три группы:

$$I_1 = \{1, 2, \ldots, m+3\}$$

$$I_2 = \{m+4, \ldots, m+2i_0+1\}$$

$$I_3 = \{m+2i_0+1, \ldots, 3m-1\}.$$

В соответствии с этим введем три группы точек коллокации и базисных функций

$$\begin{cases} \Gamma_j = \{\xi_i\}, \quad i \in I_j,\ j = 1,2,3; \\ T_j = \{F_i\}, \quad i \in I_j,\ j = 1,2,3. \end{cases}$$

Тогда коллокационную матрицу F можно представить в виде

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{pmatrix}. \tag{5.7.1}$$

Сразу же заметим, что блоки Φ_{12}, Φ_{13} — нулевые. Рассмотрим матрицу Φ_{11}. Из предложения 18 и замечания 5.1 вытекает, что она имеет вид

$$\Phi_{11} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 01/2 & & & & & & & & \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 & & & & & & & \\ & 1/8 & 3/4 & 1/8 & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & 1/8 & 3/4 & 1/8 & & \\ & & & & & & 1/8 & 5/8 & 1/4 & \\ & & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & 3/4 & 1 \end{pmatrix} + E_{11}, \tag{5.7.2}$$

где E_{11} — трехдиагональная матрица, элементы e_{ij} которой удовлетворяют оценкам

$$|e_{ij}| \leq C\left(\varepsilon m + |\ln\varepsilon|^{-1} + \frac{1}{m}\right). \tag{5.7.3}$$

Отсюда без труда получим, что при малых ε, $1/m$, εm матрица Φ_{11} обратима, и

$$\|\Phi_{11}^{-1}\|_{l_p \to l_p} \leq C,\, p = 1, \infty. \tag{5.7.4}$$

В силу (5.6.33), (5.6.45) матрица Φ_{22} имеет вид

$$\Phi_{22} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}^{22} & \Phi_{12}^{22} \\ \Phi_{21}^{22} & \Phi_{22}^{22} \end{pmatrix} + E_{22} \tag{5.7.5}$$

$$\Phi_{11}^{22} = \begin{pmatrix} \frac{2\varepsilon t_1}{h_{m+2}} + p(\xi_{m+4})t_1^2 & -\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3h_{m+2}} + \frac{p(\xi_{m+4})}{6} \\ \frac{2\varepsilon t_2}{h_{m+2}} + p(\xi_{m+4})t_2^2 & \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3h_{m+2}} + \frac{p(\xi_{m+4})}{6} \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{12}^{22} = \begin{pmatrix} -\frac{2\varepsilon t_2}{h_{m+2}} + p(\xi_{m+4})t_2^2 & 0 \\ -\frac{2\varepsilon t_1}{h_{m+2}} + p(\xi_{m+4})t_1^2 & 0 \end{pmatrix};\ \Phi_{21}^{22} = 0, \tag{5.7.6}$$

$$\Phi_{22}^{22} = \begin{pmatrix} \frac{2\varepsilon t_1}{h_{m+2}} + p(\xi_{m+4})t_1^2 & -\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3h_{m+2}} + \frac{p(\xi_{m+4})}{6} \\ \frac{2\varepsilon t_2}{h_{m+2}} + p(\xi_{m+4})t_2^2 & \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3h_{m+2}} + \frac{p(\xi_{m+4})}{6} \end{pmatrix} ESC$$

где

$$\|E_{22}\|_{l_p \to l_p} \leq \frac{C}{m^2},\, p = 1, \infty. \tag{5.7.7}$$

Таким образом, матрица Φ_{22} является блочно-двухдиагональной с блоками 2×2. Более того, обратные матрицы к блокам, стоящим на главной диагонали, равномерно ограничены по ε, m и i_0. Имеет место

Предложение 23. При достаточно малых ε и $1/m$ матрицы Φ_{22} обратимы, причем

$$\|\Phi_{22}^{-1}\|_{l_p \to l_p} \leq C i_0,\, p = 1, \infty, \tag{5.7.8}$$

где C не зависит от i_0.

Для доказательства нужно воспользоваться блочным методом Гаусса.

Рассмотрим матрицу Φ_{23}. Ее элементы определяются значениями функций $\delta_{m+2k}(t,\varepsilon)$, $\delta_{m+2k+1}(t,\varepsilon)$, $k \geq i_0+1$ в точках коллокации группы Γ_2. Поэтому из (5.6.38) вытекает, что матрица Φ_{23} имеет вид

$$\Phi_{23} = \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{i_0^3} + \frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{(i_0+1)^3} + \frac{1}{m^2}\right) & \dots & O\left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^3}\right) \\ O\left(\frac{1}{i_0^3} + \frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{(i_0+1)^3} + \frac{1}{m^2}\right) & \dots & O\left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^3}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O\left(\frac{1}{i_0^3} + \frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{(i_0+1)^3} + \frac{1}{m^2}\right) & \dots & O\left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^3}\right) \end{pmatrix}. \tag{5.7.9}$$

Учитывая, что число строк матрицы Φ_{23} равно $O(i_0)$, получаем

$$\|\Phi_{23}\|_{l_p \to l_p} \leq C\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{i_0^2}\right),\, p = 1, \infty. \tag{5.7.10}$$

Рассмотрим теперь матрицу Φ_{33}. Из предложения 21 следует, что она имеет вид

$$\Phi_{33} = I +$$

$$\begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{i_0} + \frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{i_0} + \frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{(i_0+1)^3} + \frac{1}{m^2}\right) & \dots & O\left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^2}\right) \\ O\left(\frac{1}{i_0} + \frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{i_0} + \frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{i_0+1} + \frac{1}{m^2}\right) & \dots & O\left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^2}\right) \\ O\left(\frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{i_0+1} + \frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{i_0+1} + \frac{1}{m^2}\right) & \dots & O\left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^2}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O\left(\frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{m^2}\right) & \dots & O\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}\right) \end{pmatrix} \tag{5.7.11}$$

где I — единичная матрица. При малых $1/i_0$, ε, $1/m$ матрица Φ_{33} имеет строгое диагональное преобладание по строкам и столбцам и поэтому

$$\|\Phi_{33}^{-1}\|_{l_p \to l_p} \leq C,\, p = 1, \infty. \tag{5.7.12}$$

Замечание 6.1 Элементы матрицы Φ_{32} определяют лишь функциями $\delta_{m+2k}, \delta_{m+2k+1}$ $(2 \leq k \leq i_0)$ и поэтому в силу (5.6.33) имеют оценку $O\left(\frac{1}{m^2}\right)$. Далее, элементы матрицы Φ_{21} и Φ_{31} определяются лишь функциями $\delta_s\,(s = 1, 2, \ldots, m+3)$, и в силу (5.6.28), (5.6.35) имеют место оценки $O\left(\frac{1}{m^3\varepsilon} + \frac{|\ln\varepsilon|}{m^2}\right) = O\left(\frac{1}{m^3\varepsilon}\right)$.

Таким образом, блоки коллокационной матрицы изучены. Приведем в заключение, некоторые важные следствия. Пусть

$$\widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{pmatrix}.$$

Предложение 24. При достаточно малых ε, $1/m$, $1/i_0$, εm матрица $\widetilde{\Phi}$ обратима, и

$$\|\widetilde{\Phi}^{-1}\|_{l_p \to l_p} \leq C,\ p = 1, \infty. \tag{5.7.13}$$

Более того, для элементов $\phi_{i,j-1}$ матрицы $\widetilde{\Phi}^{-1}$ справедливы оценки имеет место оценка

$$|\phi_{i,j-1}| \leq \frac{C}{(1 + |i-j|)^2}. \tag{5.7.14}$$

Доказательство. Обратимость матрицы $\widetilde{\Phi}$ и оценки (5.7.13) вытекают из (5.7.12), (5.7.7), (5.7.9), (5.7.11) и неравенства

$$\|\Phi_{32}\|_{l_p \to l_p} \leq \frac{C}{m},$$

которое вытекает из замечания 6.1.

Заметим далее, что из оценок блоков матрицы $\widetilde{\Phi}$ вытекает, что элементы ϕ_{ij} матрицы $\widetilde{\Phi}$ удовлетворяют оценкам вида (5.7.14). Но тогда (см. [38]) из (5.7.13) вытекает, что и элементы матрицы $\widetilde{\Phi}^{-1}$ удовлетворяют аналогичным оценкам. Предложение доказано.

Предложение 25. При достаточно малых ε, εm, $1/m$, $1/i_0$ матрица Φ обратима.

Это утверждение следует из (5.7.11) и предложения 24.

5.8 Завершение доказательства теоремы 1 в случае "укороченного" оператора

Как было показано ранее, для доказательства теоремы 1 достаточно установить существование в тестовых пространствах F биортогональных базисов $\{H_i\}$, элементы которых удовлетворяют оценкам (5.6.5), (5.6.6). Будем искать функции $H_i(t)$ в виде

$$H_i(t) = \sum_{k=1}^{3m-1} l_k^i\, F_k(t). \tag{5.8.1}$$

Пусть $\mathcal{L}_i = \left(l_1^i, l_2^i, \ldots, l_{3m-1}^i\right)$, e_i — единичный орт размерности $3m-1$. Тогда из условий биортогональности $H_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ получаем, что столбец $\mathcal{L}_i$ будет решением системы

$$\Phi \mathcal{L}_i = e_i, \tag{5.8.2}$$

где Φ — коллокационная матрица, изученная в предыдущем разделе. Из ее обратимости вытекает однозначная разрешимость системы (5.8.2). Получим оценки элементов векторов $\mathcal{L}_i$.

Поскольку $\Phi_{12} = 0$, $\Phi_{13} = 0$, то при $i \geq m+4$ получаем $l_1^i = \ldots = l_{m+3}^i = 0$. Пусть $\mathcal{L}^* = \left(l_{m+4}^i, \ldots, l_{3m+1}^i\right)^T$ — столбец оставшихся компонент; тогда этот столбец будет решением системы

$$\widetilde{\Phi} \mathcal{L}_i^* = e_i^*, \tag{5.8.3}$$

e_i^* — "обрезанный орт". Из предложения 24 получаем, что для компонент решения системы (5.8.3) справедливы оценки

$$|l_i^j| \leq \frac{C}{(1+|j-i|)^2},\ i \geq m+4, \tag{5.8.4}$$

так как $\mathcal{L}_i^*$ есть i-й столбец матрицы Φ^{-1}. При этом

$$\mathcal{L}_i = (0,\, \mathcal{L}_i^*)^T,\ i \geq m+4. \tag{5.8.5}$$

Пусть теперь $i < m+4$. Тогда представим вектор $\mathcal{L}_i$ в виде $\mathcal{L}_i = (\mathcal{L}_i^{**}, \mathcal{L}_i^*)^T$ ($dim\, \mathcal{L}_i^{**} = m+3$). Для вектора $\mathcal{L}_i^{**}$ получим систему

$$\Phi_{11} \mathcal{L}_i^{**} = e_i^{**},\ \ \mathcal{L}_i^{**} = (l_1^i, \ldots, l_{m+3}^i)^T\ \ 1 \leq i \leq m+3 \tag{5.8.6}$$

откуда в силу () имеем

$$\sum_{j=1}^{m+3} |\, l_j^i \,| \leq C. \tag{5.8.7}$$

Для отыскания $\mathcal{L}_i^*$ имеем систему

$$\widetilde{\Phi} \mathcal{L}_i^* = -\begin{pmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{pmatrix} \mathcal{L}_i^{**},$$

причем правая часть этой системы в силу (5.8.7) и замечания 6.1 оценивается в $\|.\|_1$ величиной порядка $O(\frac{1}{\varepsilon m^2})$. Таким образом

$$\|\mathcal{L}_i^*\|_1 \leq \frac{C}{\varepsilon m^2}. \tag{5.8.8}$$

Таким образом, получены оценки векторов $\mathcal{L}_i$. Оценим функции $H_i(t)$. При $i \geq m+4$ из (5.8.4), (5.8.5) и предложений 24, 22 имеем

$$\|H_{m+2k}\|_1 \leq \sum_{p=m+4}^{3m-1} |l_p^{m+2k}| \|F_p\| \leq$$

$$\leq C \sum_{p=m+4}^{3m-1} \frac{\varepsilon}{(1+|p-m-2k|)^2(p-m)}.$$

Из последней оценки и неравенства

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q(1+|q-k|)^2} \leq \frac{C}{k}$$

вытекает неравенство (5.6.6). Для доказательства последнего неравенства сумму следует разбить на три части:

$$0 \leq q \leq [k/2],\ [k/2] < q \leq k,\ q \geq k+1.$$

При $i \leq m+3$, учитывая (5.8.7), (5.8.8) и предложение 22, получаем

$$\|H_i\|_1 \leq \sum_{k=1}^{m+3} |l_k^i| \max_{k \leq m+3} \|F_k\|_1 + \sum_{k=m+4}^{3m-1} |l_k^i| \max_{k \geq m+4} \|F_k\|_1 \leq$$
$$\leq \tfrac{C}{m} + \tfrac{C_1}{m^2 \varepsilon}\varepsilon \leq \tfrac{C_2}{m},$$

и доказаны неравенства (5.6.5). Тем самым теорема 1 доказана в частном случае.

5.9 Доказательство теоремы 1 в общем случае

Как уже отмечалось ранее, построение и изучение биортогональных базисов в случае $q(t) \not\equiv 0$ становится трудной задачей и применение использованной выше техники в общем случае весьма затруднительно. Однако хорошо известно, что во многих случаях свойства дифференциальных уравнений и их дискретизаций определяются свойствами членов, содержащих старшие производные. Точнее говоря, если некоторое утверждение справедливо для "укороченного" оператора, а исходный оператор обратим, то это утверждение или его аналог имеет место и для последнего. При исследовании нежестких задач эта идея лежит в основе ставшего уже классическим метода компактной аппроксимации [42]. Мы докажем теорему 1 в общем случаем, сочетая идеи метода компактной аппроксимации и технику интерполяционных проекторов, разработанную в данной книге.

5.9.1 Схема доказательства теоремы 1

Рассмотрим коллокационную задачу (5.1.3) в общем случае. Запишем ее в виде

$$\mathcal{L}\left[U(\xi_i) - u_m(\xi_i)\right] = w(\xi_i),\ i = 1, 2 \ldots, 3m-1, \tag{5.9.1}$$

где в силу леммы 2

$$w(\xi_s) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{m^3}\right),\ s = 1, 2, m+1, m+2, m+3 \\ O\left(\frac{1}{m^4}\right),\ s = 3, 4, \ldots, m \\ O\left(\frac{k}{\varepsilon m^5} + \frac{1}{m^3 k^3} + \frac{1}{m^4}\right),\ s = m+2k, m+2k+1; \\ k = 2, 3, \ldots, m-1. \end{cases} \tag{5.9.2}$$

Перепишем уравнения (5.9.1) в виде

$$\mathcal{L}^*(U - u_m)|_{t=\xi_i} = [q(u_m - U) + w]|_{t=\xi_i},\ 1 \le i \le 3m-1, \tag{5.9.3}$$

где $\mathcal{L}^*$ — оператор (5.1.2) в случае $q(t) \equiv 0$. Такой оператор рассматривался в предыдущих параграфах. Используя проектор P, введенный ранее и обозначая $V_m = U - u_m$, получим, что система (5.9.3) эквивалентна следующему операторному уравнению в пространстве F

$$\mathcal{L}^* V_m = -PV_m + Pw.$$

Применяя к обеим частям последнего уравнения оператор $(\mathcal{L}^*)^{-1}$, перейдем к эквивалентному уравнению

$$\left[I - (\mathcal{L}^*)^{-1} Pq\right] U_m = W_m, \tag{5.9.4}$$

где $W_m = (\mathcal{L}^*)^{-1} w$.

Заметим, что из (5.9.2) аналогично (5.6.7) следует, что $\|w\|_1 \le \frac{C}{m^4}$. Поэтому, учитывая, что в силу предложения 1

$$\|(\mathcal{L}^*)^{-1}\|_{L_1 \to C} \le C,$$

получаем оценку

$$\|W_m\|_C \le \frac{C}{m^4}. \tag{5.9.5}$$

Из (5.9.4), (5.9.5) и замечания 4.1 вытекает, что для доказательства теоремы 1 достаточно установить обратимость оператора $I - (\mathcal{L}^*)^{-1}Pq$ и оценку

$$\|(I - (\mathcal{L}^*)^{-1}Pq)^{-1}\|_{C\to C} \le C\,\Big(P = P(\varepsilon, m), \mathcal{L}^* = \mathcal{L}^*(\varepsilon, m)\Big) \tag{5.9.6}$$

Доказывать (5.9.6) будем от противного. Предположим, что найдутся такие последовательности чисел $\varepsilon_n \to 0$, $m_n \to \infty$ $(\varepsilon_n|\ln\varepsilon_n|m_n \to 0)$ и функций ζ_n $(\|\zeta_n\|_C = 1)$, что

$$\|\zeta_n - \big(\mathcal{L}^*(\varepsilon, m)\big)^{-1}P(\varepsilon_n, m_n)\, q\zeta_n\|_{C_{[0,1]}} \to 0. \tag{5.9.7}$$

В стандартных для применения метода компактной аппроксимации ситуациях операторы $P(\varepsilon_n, m_n)$ оказываются равномерно ограниченным в норме $C \to C$, а операторы $(\mathcal{L}^*(\varepsilon_n, m_n))^{-1}$ в каком-нибудь смысле сходятся при $n \to \infty$ к компактному предельному оператору. В результате последовательность $(\mathcal{L}^*(\varepsilon_n, m_n))^{-1}P(\varepsilon_n, m_n)q\zeta_n$ оказывается компактной (т.е. из нее можно выделить сходящуюся в $C_{[0,1]}$ подпоследовательность). Извлекая сходящуюся подпоследовательность, в пределе получаем, что $\zeta^* - G_0\, q\, \zeta_i^* = 0$, где ζ^* — предел последовательности. Если предельный оператор $(I - G_0 q)$ обратим, то в силу $\|\zeta^*\|_{C_{[0,1]}} = 1$ последнее приводит к противоречию.

В нашем случае в рамках этой схемы не выполнено два условия. Во-первых, операторы $P(\varepsilon_n, m_n)$ не удовлетворяют, вообще говоря, свойству равномерной ограниченности в $C_{[0,1]}$ (Это можно получить из представления (5.6.2) и того, что $\|H_i\|_{C_{[0,1]}}$ могут стремиться при $\varepsilon \to 0$ к бесконечности). Во-вторых, не выполнено условие сходимости $\mathcal{L}^{-1}(\varepsilon_n, m_n)$ к предельному компактному оператору. Операторы $\mathcal{L}^{-1}(\varepsilon_n, m_n)$ при малых ε_n, $1/m_n$ оказываются близкими к интегральным операторам $G = \mathcal{L}^{-1}$, ядра которых $G_\varepsilon(t, \xi)$ при фиксированном ξ не удовлетворяют условию равностепенной непрерывности равномерно по ε. В результате теорема Арцела не работает, и получить компактность последовательности $(\mathcal{L}(\varepsilon_n, m_n))^{-1}P(\varepsilon_n, m_n)q\zeta_n$ не удается.

Заметим однако, что, во-первых, источником неограниченности проекторов $P(\varepsilon_n, m_n)$ являются значения функций $H_i(t)$ при $t \in [t_{m_n+1}, 1]$. Если рассмотреть "обрезанные" проекторы

$$\mathcal{P}(\varepsilon_n, m_n)u = \sum_{i=1}^{3m-1} u(\xi_i)H_i^*(t) \equiv \sum_{i=1}^{m+3} u(\xi_i)H_i^*(t) \tag{5.9.8}$$

(где $H_i^*(t)$ — сужения $H_i(t)$ на $[0, t_{m_n-1}]$, $H_i^*(t) \equiv 0$ при $i \geq m+4$ в силу (5.6.2), (5.8.5) и предложений 18, 20) то, как будет показано, они уже равномерно ограничены в норме из $C_{[0,t_{m_n+1}]}$ в $C_{[0,t_{m_n+1}]}$. Во-вторых, сужение функций $(\mathcal{L}(\varepsilon_n, m_n))^{-1}P(\varepsilon_n, m_n)q\zeta_n$ на отрезок $[0, 1-\delta]$ для любого $\delta > 0$ уже обладают свойством равностепенной непрерывности, т. е. источник особенности сосредоточен в сколь угодно малой окрестности точки $t = 1$.

Сочетание этих фактов с идеей компактной аппроксимации позволяет доказать теорему 1. В последующих пунктах исследуются необходимые свойства проектора (5.9.8) и завершается доказательство теоремы.

5.9.2 Свойства проекторов $\mathcal{P}(\varepsilon, m)$

Обозначим сужения функций $H_i(t)$ на отрезок $[0, t_{m+1}]$ через H_i^* $(1 \leq i \leq m+3)$.

Предложение 26. Существует такое $q \in (0,1)$, что справедливы оценки

$$\|H_i^*\|_{C_{[t_s,t_{s+1}]}} \leq Cq^{|s-i|},\ 0 \leq s \leq m,\ 1 \leq i \leq m+3. \qquad (5.9.9)$$

Доказательство. Поскольку при $s \geq m+4$ $F_s(t) \equiv 0$ на $[0, t_{m+1}]$ (см. предложения 18, 20), то из (5.6.2) будем иметь

$$H_i^* = \sum_{k=1}^{m+3} l_k^i\, F_k^*(t), \qquad (5.9.10)$$

где через $F_k^*(t)$ обозначены сужения функций $F_k(t)$ на $[0, t_{m+1}]$.

Отметим, что вектор $\mathcal{L}_i^{**} = (l_1^i, l_2^i, \ldots, l_{m+1}^i)^T$ — решение системы

$$\Phi_{11}\mathcal{L}_i^{**} = e_i, \qquad (5.9.11)$$

где Φ_{11} — трехдиагональная матрица, и $\|\Phi^{-1}\|_{l_1 \to l_1} \leq C$ в силу (5.8). Поэтому из результатов Демко [5] для элементов $\phi_{i,j-1}$ матрицы Φ_{11}^{-1} будем иметь оценку

$$|\phi_{i,j-1}| \leq Cq^{|i-j|},\ \ 0 \leq q \leq 1. \qquad (5.9.12)$$

Из (5.9.11), (5.9.12) получаем

$$|l_k^i| \leq Cq^{|k-i|}. \qquad (5.9.13)$$

Наконец, отметим, что в силу предложений 18, 20

$$\|F_k^*\|_{C_{[0,t_{m+1}]}} \leq C. \qquad (5.9.14)$$

Поэтому из (5.9.10), (5.9.13), (5.9.14) получаем

$$\|H_i^*\|_{C_{[t_s,t_{s+1}]}} \leq C_1 \sum_{k=s-2}^{s} q^{|k-i|} \leq C_1 q^{|s-i|}. \tag{5.9.15}$$

Предложение доказано.

Определим проектор $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\varepsilon, m)$ равенством (5.9.8). Мы будем рассматривать его как оператор в пространстве $C_{[0,t_{m+1}]}$. Отметим, что функции F_i, а, значит, и H_i непрерывны на $[0, t_{m+1}]$, и поэтому $\mathcal{P}$ действительно действует в $C_{[0,t_{m+1}]}$, в то время как P действует в $\widetilde{C}_{[0,1]}$.

Из предложений 18, 20 и определения функций (см. (5.6.2)) вытекает следующее утверждение.

Предложение 27. Оператор $\mathcal{P}$ переводит пространство $C_{[0,t_{m+1}]}$ в линейную оболочку $\mathcal{L}(F_1^*, F_2^*, \ldots, F_{m+3}^*)$ функций

$$F_i^* = p(t)N_{2,i-3}(t) + \nu_i(t),\ 1 \leq i \leq m+3, \tag{5.9.16}$$

где

$$supp\,\nu_s \subset \begin{cases} [t_{s-4}, t_{s+1}]\,,\ s \leq m-1 \\ \\ [t_{s-4}, t_s]\,,\ m \leq s \leq m+2. \end{cases}$$

$$\|\nu_s\|_C \leq C(\varepsilon m + 1/|\ln\varepsilon|).$$

Предложение 28. Существует такая константа $C > 0$, что при всех ε и m : $\varepsilon\, m|\ln\varepsilon| \ll 1$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{P}\|_{C\to C} \leq C. \tag{5.9.17}$$

Доказательство непосредственно вытекает из (5.9.14) и (5.9.8), (5.9.10).

Предложение 29. Пусть $\zeta(t)$ — произвольная функция из $C_{[0,1]}$, а $\zeta_m(t)$ — ее сужение на $[0, t_{m+1}]$. Тогда

$$\|\mathcal{P}(\varepsilon, m)\zeta_m - \zeta_m\|_{C_{[0,t_{m+1}]}} \to 0 \tag{5.9.18}$$

при $\varepsilon \to 0,\ m \to \infty, \varepsilon\, m|\ln\varepsilon| \to 0$.

Доказательство. Имеем

$$\|\mathcal{P}(\varepsilon, m)\zeta_m - \zeta_m\|_{C_{[0,t_{m+1}]}} =$$

$$= \|\mathcal{P}(\varepsilon, m)(\zeta_m - \zeta_m^*) -$$

$$-(\zeta_m - \zeta_m^*)\|_{C_{[0,t_{m+1}]}} \leq$$

$$\leq \Big(1 + \|\mathcal{P}\|_{C\to C}\Big)\|\zeta_m - \zeta_m^*\|_{C_{[0,t_{m+1}]}}$$

для любой $\zeta_m^* \in \mathcal{L}(F_1^*, \ldots, F_{m+3}^*)$. Поэтому, учитывая (5.9.17), для доказательства (5.9.18) достаточно установить, что

$$\inf_{\zeta^* \in \mathcal{L}(F_1^*, \ldots, F_{m+3}^*)} \|\zeta - \zeta^*\|_{C_{[0,t_{m+1}]}} \to 0 \tag{5.9.19}$$

при $\varepsilon \to 0$, $m \to \infty : \varepsilon m |\ln \varepsilon| \to 0$.

Поскольку множество гладких функций плотно в $C_{[0,1]}$, то (5.9.19) достаточно установить для гладкой функции $\zeta(t)$. Представим ζ_m в виде $\zeta_m = p(t)\kappa(t)$. Будем искать ее аппроксимацию в $\mathcal{L}(F_1^*, \ldots, F_{m+3}^*)$ в виде

$$\zeta_m^* = \sum_{i=1}^{m+3} \beta_i F_i^* = \sum_{i=1}^{m+3} \beta_i \big(\nu_i(t, \varepsilon) + p(t) N_{2,i-3}(t)\big). \tag{5.9.20}$$

Так как $\zeta(t)$ и $p(t)$ достаточно гладкие и $p(t) \geq p_0 > 0$, то гладкой будет и функция $\kappa(t)$. Поэтому в силу теоремы К.де Бора (см. раздел 1.1.5) найдется такой набор констант $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+3}$, что

$$\|\kappa(t) - \sum_{i=1}^{m+3} \beta_i N_{2,i-3}\|_{C_{[0,t_{m+1}]}} \leq \frac{C}{m}, \tag{5.9.21}$$

причем в силу равномерной линейной независимости B-сплайнов.

$$\max_i |\beta_i| \leq C_1. \tag{5.9.22}$$

Из (5.9.20)-(5.9.22), (5.9.16) получаем оценку

$$\|\zeta^* - \zeta_m\|_{C_{[0,t_{m+1}]}} = \left\| \sum_{i=1}^{m+3} \beta_i(\nu_i + p(t)N_{2,i-3}) - p(t)\kappa \right\|_{C_{[0,t_{m+1}]}} \leq$$

$$\leq \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^{m+3} \beta_i \nu_i \right\|_{C_{[0,t_{m+1}]}} + \|p\|_{C_{[0,t_{m+1}]}} \left\| \sum_{i=1}^{m+3} \beta_i N_{2,i-3} - \kappa \right\|_{C_{[0,t_{m+1}]}} \leq$$

$$\leq C_1 \left(\varepsilon m + 1/|ln\varepsilon| + 1/m\right).$$

Тем самым доказана оценка (5.9.19), а вместе с ней и предложение 29.

Предложение 30. Пусть при $m \to \infty$ последовательность функций $\zeta_m \in C_{[0,t_{m+1}]}$ такова, что $\|\zeta_m\|_C \leq 1$, причем для некоторой последовательности $\delta_m \to 0$, $\varepsilon_m m|\ln\varepsilon_m| \to 0$

$$\|\zeta_m\|_{C_{[0,t_{m+1}-\delta_m]}} \to 0. \tag{5.9.23}$$

Тогда

$$\|\mathcal{P}(\varepsilon_m, m)\zeta_m\|_1 \to 0.$$

Доказательство. Поскольку точки ξ_i при $1 \leq i \leq m+3$ равномерно распределены на отрезке $[0, t_{m+1}]$, то из (5.9.23) и неравенства $|\zeta_m(\xi_i)| \leq 1$ вытекает, что при $m \to \infty$

$$\tfrac{1}{m+3}\sum_{i=1}^{m+3}|\zeta_m(\xi_i)| \to 0.$$

Отсюда и из (5.9.14), (5.9.2) получаем

$$\|\mathcal{P}(\varepsilon, m)\zeta_m\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{m+3}\zeta_m(\xi_i)H_i^*\right\|_1 \leq \sum_{i=1}^{m+3}|\zeta_m(\xi_i)|\|H_i^*\|_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+3}|_m(\xi_i)|\left(\sum_{s=0}^{m}\int_{t_s}^{t_{s+1}}|H_i^*(t)dt\right) \leq C_1\sum_{i=1}^{m+3}|\zeta_m(\xi_i)|\sum_{s=0}^{m}h_s q^{|s-i|} \leq$$

$$\leq \tfrac{C_2}{m}\sum_{i=1}^{m+3}|\zeta_m(\xi_i)|\sum_{s=0}^{m}q^{|s-i|} \leq$$

$$\leq \tfrac{C_3}{m}(m+3)\tfrac{1}{m+3}\sum_{i=1}^{m+3}|\zeta_m(\xi_i)| \leq \tfrac{C_4}{m+3}\sum_{i=1}^{m+3}|\zeta_m(\xi_i)| \to 0.$$

при $m \to \infty$, и предложение доказано.

Введем в рассмотрение еще один вспомогательный проектор. Пусть

$$\mathcal{P}u = \begin{cases} \mathcal{P}\tilde{u}(t),\ t \in [0, t_{m_n+1}] \\ \\ 0,\ t \in (t_{m_n+1}, 1], \end{cases} \tag{5.9.24}$$

где $\tilde{u}(t)$ — сужение функции $u(t) \in C_{[0,1]}$ на отрезок $[0, t_{m+1}]$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\varepsilon_n, m_n)$ — оператор (5.9.8).

Предложение 31. Пусть $\|\zeta_n\|_C = 1$, $\varepsilon_n \to 0$, $m_n \to \infty$, $\varepsilon_n m_n|\ln\varepsilon_n| \to 0$. Тогда при $n \to \infty$

$$\left\|(\mathcal{L}^*(\varepsilon_n, m_n))^{-1}(P(\varepsilon_n, m_n) - \mathcal{P}^*(\varepsilon_n, m_n)q\zeta_n\right\|_{C_{[0,1]}} \to 0. \tag{5.9.25}$$

Доказательство. Пусть $\kappa_n = (P(\varepsilon_n, m_n) - \mathcal{P}^*(\varepsilon_n, m_n))q\zeta_n$. Тогда из (5.9.24) вытекает, что

$$\kappa_n = \begin{cases} P(\varepsilon_n, m_n)q\zeta_n(t),\ t \in [t_{m_n+1}, 1] \\ \\ 0,\ t \notin [t_{m_n+1}, 1]. \end{cases}$$

Учитывая (5.6.2), отсюда получаем

$$\|\kappa_n\|_{\widetilde{C}_{[0,1]}} = \|P(\varepsilon_n, m_n)q\zeta_n\|_{\widetilde{C}_{[t_{m_n+1},1]}} = \left\|\sum_{i=1}^{3m-1} q\zeta_n(\xi_i)H_i\right\|_{\widetilde{C}_{[t_{m_n+1},1]}} \tag{5.9.26}$$

Но из (5.8.1), (5.8.7), (5.8.8) и неравенств

$$\|F_k\|_{\widetilde{C}} \leq C\,(k \geq m+4),\ \|F_k\|_{\widetilde{C}} \leq C(1 + \tfrac{m_n^3}{\varepsilon_n})\,(k \leq m+3)$$

вытекающих из предложений 18, 20, получаем оценки

$$\|H_i\|_{\widetilde{C}_{[0,1]}} \leq C[1 + \tfrac{1}{m_n^2 \varepsilon_n})].$$

Так как $\|\zeta_n\|_C = 1$, то отсюда и из (5.9.26) имеем

$$\|\kappa_n\|_{\widetilde{C}_{[0,1]}} \leq C_1(3m-1)(1 + \tfrac{1}{m_n^2\varepsilon_n}) \leq C_2(m_n + \tfrac{1}{m_n\varepsilon_n}). \tag{5.9.27}$$

Учитывая, что $mes\, supp\, \kappa_n = 1 - t_{m_n+1} = O(\varepsilon_n \ln m_n)$ и из (5.9.27) получаем при $n \to \infty$

$$\|\kappa_n\| \leq C_2 \varepsilon_n \ln m_n \left(m_n + \tfrac{1}{m_n\varepsilon_n}\right) = C_2\left(\varepsilon_n m_n \ln m_n + \tfrac{\ln m_n}{m_n}\right) \to 0.$$

В силу предложения 1 $\|(\zeta^*)^{-1}\|_{L_1 \to C} \leq C$. Поэтому из последнего равенства вытекает (5.9.25). Предложение 31 доказано.

5.9.3 Завершение доказательства теоремы 1

Вернемся к доказательству теоремы. Мы закончили тем, что от противного предположили справедливость формулы (5.9.7). Из (5.9.7), в частности, вытекает, что

$$\left\|\zeta_n - (\mathcal{L}^*(\varepsilon_n, m_n))^{-1}P(\varepsilon_n, m_n)q\zeta_n\right\|_{C_{[0,t_{m_n+1}]}} \to 0. \tag{5.9.28}$$

Очевидно, имеем

$$\begin{gathered}(\mathcal{L}^*(\varepsilon_n, m_n))^{-1}P(\varepsilon_n, m_n)q\zeta_n = (\mathcal{L}^*(\varepsilon_n, m_n))^{-1}\mathcal{P}^*(\varepsilon_n, m_n)q\zeta_n + \\ + (\mathcal{L}^*(\varepsilon_n, m_n))^{-1}(P(\varepsilon_n, m_n) - \mathcal{P}^*(\varepsilon_n, m_n))q\zeta_n,\end{gathered} \tag{5.9.29}$$

где $\mathcal{P}^*$ — оператор (5.9.24).

Из (5.9.7), (5.9.29), (5.9.25) следует, что при $n \to \infty$

$$\left\|\zeta_n - (\mathcal{L}^*(\varepsilon_n, m_n))^{-1}\mathcal{P}^*(q\zeta_n)\right\|_{C_{[0,1]}} \to 0. \tag{5.9.30}$$

Отметим еще одно свойство функции ζ_n.

Предложение 32. Найдутся такие числа $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $\nu_0 > 0$, что для всех n

$$\|\zeta_n\|_{C_{[0,1-\delta]}} \geq \nu_0. \tag{5.9.31}$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда последовательности $q\zeta_n$ будут удовлетворять условиям предложения 30, и в силу этого и (5.9.24) будем иметь $\|\mathcal{P}^*q\zeta_n\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда в силу предложения 1 $\|\mathcal{L}^{*-1}\mathcal{P}^*q\zeta_n\|_{C_{[0,1]}} \to 0$ при $n \to \infty$. Но последнее противоречит (5.9.30) и тому, что $\|\zeta_n\|_C = 1$. Предложение доказано.

Далее заметим, что из (5.9.18), (5.9.24) и того, что $\|\zeta_n\|_C = 1$, вытекает оценка $\|\mathcal{P}^*q\zeta_n\|_{C_{[0,1]}} \leq C$; отсюда в силу (5.9.30) и следствия 1 при $n \to \infty$ имеем

$$\|\zeta_n - G\mathcal{P}^*(\varepsilon_n, m_n)q\zeta_n\|_{C_{[0,t_{m_n+1}]}} \to 0. \tag{5.9.32}$$

Обозначим через $\tilde{\zeta}_n$ и $\tilde{q}$ сужения функций ζ_n и q на отрезок $[0, t_{m_n+1}]$, через $G^*_{\varepsilon_n}$ — интегральный оператор с ядром

$$G(t,\xi) = G_{\varepsilon_n}(t,\xi),\ (0 \leq t \leq t_{m_n+1},\ 0 \leq \xi \leq t_{m_n+1}).$$

Тогда из (5.9.32), (5.9.24) при $n \to \infty$ имеем

$$\|\tilde{\zeta}_n - G^*_{\varepsilon_n}\mathcal{P}(\varepsilon_n, m_n)\tilde{q}\tilde{\zeta}_n\|_{C_{[0,t_{m_n+1}]}} \to 0. \tag{5.9.33}$$

Так как в силу (5.9.18) $\|\mathcal{P}(\varepsilon_n, m_n)\tilde{q}\,\tilde{\zeta}_n\|_C \leq C$, то из оценок (5.3.6) функции Грина $G_{\varepsilon_n}(t,\xi)$ получаем

$$\left\|\frac{d}{dt}(G^*_{\varepsilon_n}\mathcal{P}\,\tilde{q}\,\tilde{\zeta}_n)\right\|_{C_{[0,t_{m_n}]}} \leq C. \tag{5.9.34}$$

Поскольку при $n \to \infty\, t_{m_n} \to 1$, то в силу (5.9.34) и теоремы Арцела последовательность функций

$$\mu_n(t) = G^*_{\varepsilon_n}\mathcal{P}(\varepsilon_n, m_n)\tilde{q}\,\tilde{\zeta}_n(t) \tag{5.9.35}$$

будет компактной в $C_{[0,1-\delta]}$ при любом $\delta \in (0, 1/2)$. Без ограничения общности будем считать, что последовательность μ_n сходится в $C_{[0,1-\delta]}$ к функции $\mu_\delta(t)$, причем, если $\delta_1 < \delta_2$, то $\mu_{\delta_1}(t) \equiv \mu_{\delta_2}(t)$ для $t < 1 - \delta_2$. Выберем две последовательности $\delta_n \to 0$: $1 - \delta_n \le t_n$, $\nu_n \to 0$ и сформируем подпоследовательность $\mu_{k_n} \in C_{[0,1-\delta_n]}$: $\|\mu_{k_n} - \mu_{\delta_n}\|_{C_{[0,1-\delta_n]}} \le \nu_n$. Без ограничения общности можно считать, что при $n \to \infty$

$$\|\mu_n - \mu_{\delta_n}\|_{C_{[0,1-\delta_n]}} \le \nu_n \to 0. \qquad (5.9.36)$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем функцию

$$\mu \in L_\infty[0,1] \bigcap C[0, 1-\delta]$$

для любого $\delta \in (0, 1/2)$, $\mu(t) \equiv \mu_\delta(t)$ для $t \in [0, 1-\delta]$.

Предложение 33. Функция $\mu(t)$ отлична от тождественного нуля на отрезке $[0, 1)$. **Доказательство.** Предположим противное, т.е. $\mu(t) \equiv 0$. Тогда в силу (5.9.36) и того, что $\mu(t) = \mu_{\delta_n}(t)$ для $t \in [0, 1-\delta_n]$ для любого $\delta \in (0, 1/2)$ получаем

$$\|\mu_n\|_{C_{[0,1-\delta]}} \to 0. \qquad (5.9.37)$$

Далее из (5.9.33), (5.9.35), (5.9.36) следует, что $\|\tilde{\zeta}_n\|_{C_{[0,1-\delta]}} \to 0$. Поэтому, учитывая, что $\tilde{\zeta}_n$ — сужение ζ_n, получаем для любого $\delta \in (0, 1/2)$

$$\|\zeta_n\|_{C_{[0,1-\delta]}} \to 0. \qquad (5.9.38)$$

Последнее противоречит предложению 32. Предложение 33 доказано.

Заметим теперь, что в силу (5.9.35)

$$\|\mu - G^*_{\varepsilon_n}(q\zeta)\|_{C_{[0,1-\delta_n]}} \le \|\mu - \mu_n\|_{C_{[0,1-\delta_n]}} +$$

$$+ \|G^*_{\varepsilon_n}\mathcal{P}(\varepsilon_n, m_n) q\,(\zeta_n - \mu)\|_{C_{[0,1-\delta_n]}} + \qquad (5.9.39)$$

$$+ \|G^*_{\varepsilon_n}(\mathcal{P}(q\,\zeta) - q\,\zeta)\|_{C_{[0,1-\delta_n]}}.$$

Поскольку $\mu = \mu_{\delta_n}(t)$ на $[0, 1-\delta_n]$, то, учитывая (5.9.36) имеем

$$\|\mu(t) - \mu_n(t)\|_{C_{[0,1-\delta_n]}} \to 0\,(n \to \infty). \qquad (5.9.40)$$

Затем, в силу предложения 1

$$\|G^*_\varepsilon \mathcal{P}(\varepsilon_n, m_n)(q\,(\tilde{\zeta}_n - \mu))\|_{C_{[0,1-\delta_n]}} \le$$

$$\leq C\|\mathcal{P}(\varepsilon_n, m_n)(q(\tilde{\zeta}_n - \mu))\|_{L_1[0,1-\delta_n]}. \tag{5.9.41}$$

Из (5.9.33), (5.9.35), (5.9.40) $\|\zeta_n - \mu\|_{C_{[0,1-\delta_n]}} \to 0$. Поэтому из предложения 30 $\|\mathcal{P}(\varepsilon_n, m_n)(q\,(\tilde{\zeta}_n - \mu))\|_{L_1[0,1-\delta_n]} \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, в силу (5.9.41) при $n \to \infty$

$$\|G^*_{\varepsilon_n}\mathcal{P}(\varepsilon_n, m_n)(q\,(\tilde{\zeta}_n - \mu))\|_{C_{[0,1-\delta_n]}} \to 0. \tag{5.9.42}$$

Наконец, в силу предложений 1, 29 при $n \to \infty$

$$\|\mu(t) - G^*(q\mu)(t)\|_{C_{[0,1-\delta_n]}} \to 0. \tag{5.9.43}$$

Осталось лишь заметить, что при $t \in [0, 1-\delta_n] \subset [0, t_{m_n+1}]$ из (5.3.7), (5.3.18)

$$\int\limits_0^1 |G_{\varepsilon_n}(t,\xi) - G_0(t,\xi)|d\xi \leq$$

$$\leq C\left(\varepsilon_n + exp\left(p_0\tfrac{t_{m_n+1}-1}{\varepsilon}\right)\right) \leq C(\varepsilon_n + 1/m_n^5).$$

Поэтому, учитывая (5.9.44) и замечание 1 имеем

$$\mu(t) = G_0(q\mu)(t), \tag{5.9.44}$$

причем $\mu(t) \not\equiv 0$. Но оператор $I - G_0 q$ обратим в $L_\infty[0,1]$, так как $G_0(t,\xi)q(\xi)$ — вольтеррово ядро. Таким образом (5.9.6) доказано, и доказательство теоремы 1 завершено.

Глава 6

МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ГАЛЁРКИНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В настоящей главе мы рассмотрим метод конечных элементов (м.к.э.) Галеркина для нелинейных задач вида

$$-\varepsilon u'' + p(t,u)u' + q(t,u) = 0,\ u(0) = u(1) = 0 \tag{6.0.1}$$

и линейных задач вида

$$-\varepsilon u'' + p(t,\varepsilon)u' + q(t,\varepsilon)u = f(t),\ u(0) = u(1) = 0. \tag{6.0.2}$$

При этом производные коэффициентов задачи (6.0.2) могут при $\varepsilon \to 0$ иметь особенности в зоне погранслоя.

Хорошо известно (см., например, [69, с. 291], [13]), что обычный вариант м.к.э. для линейных краевых задач вида (6.0.2), основанный на кусочно-линейных функциях на квазиравномерной сетке, при $\varepsilon \to 0$ перестает сходится. При этом могут возникать так называемые "паразитные осцилляции", в результате чего приближенное решение не имеет ничего общего с точным на всем отрезке $[0, 1]$, а не только в зоне погранслоя.

Для задач вида (6.0.2) с гладкими равномерно по ε коэффициентами имеется довольно много работ, посвященных методу конечных элементов Галеркина. В основном, они посвящены различным модификациях метода шарнирных элементов (м.ш.э.), предложенного в [64, 24]. С помощью м.ш.э. построены схемы, сходящиеся с первым порядком в C-норме и со вторым порядком в узлах разбиения равномерно по ε.

Суть м.ш.э. состоит в использовании равномерных, либо квазиравномерных сеток и функций вида $C_i + \exp(p(t_i)(t - t_i)/\varepsilon)$ вместо линейных на каждом интервале разбиения (t_{i-1}, t_i). Однако в области пограничного слоя такие функции при $h_i \geq \varepsilon$ хорошо приближают решение лишь тогда, когда функция p не зависит от u и ограничена равномерно по ε вместе с первой производной. В связи с этим, м.ш.э. строго обоснован лишь для случая, когда $p = p(t)$ и является гладкой функцией.

В настоящей главе предлагается вариант м.к.э., пригодный для решения задач вида (6.0.1), а также линейных задач вида (6.0.2), когда коэффициенты могут иметь особенности при малых $\varepsilon > 0$. Он основан на обычных кусочно-линейных функциях на неравномерной сетке Н.С.Бахвалова. Число узлов этой сетки не зависит от ε, а оценки погрешности получены в C-норме и имеют второй порядок точности равномерно по ε. В [30, §39] приведены результаты численного эксперимента по сравнению эффективности м.к.э. и м.ш.э.

В основе доказательства априорных оценок, как и в других главах, лежит метод галеркинских проекций и биортогональных базисов.

6.1 Постановки задач и основные результаты

6.1.1 Исходные задачи

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ линейные уравнения

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + p(t, \varepsilon)u' + q(t, \varepsilon)u = f(t), \tag{6.1.3}$$

$$M_\varepsilon v = -\varepsilon v'' + (p(t, \varepsilon)v)' + q(t, \varepsilon)v = g(t), \tag{6.1.4}$$

нелинейное уравнение

$$-\varepsilon w'' + p(t, w)w' + q(t, w) = 0, w(0) = w(1) = 0 \tag{6.1.5}$$

и краевые условия

$$u(0) = u(1) = 0, v(0) = v(1) = 0, w(0) = w(1) = 0. \tag{6.1.6}$$

В (6.1.3) и (6.1.4) предположим, что $p(t,\varepsilon) \in C^4[0,1]$, $q(t,\varepsilon) \in C^2[0,1]$, $f(t) \in C[0,1]$, $g(t) \in C[0,1]$, причем

$$|q^{(i)}(t,\varepsilon)| \le C\Big(1+\varepsilon^{-i}\exp\big(p_0\tfrac{t-1}{\varepsilon}\big)\Big), i=0,1,2,\ 0<C_1\le p_0\le C_2,$$

$$p(t,\varepsilon) \ge p_0 > 0,\ |p^{(i)}(t,\varepsilon)| \le C\left(1+\varepsilon^{-i}\exp\left(p_0\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\right),\ i=\overline{0,4}. \tag{6.1.7}$$

Относительно задачи (6.1.5) предположим, что $q(t,w)$ и $p(t,w)$ — четырежды непрерывно дифференцируемые по совокупности аргументов в прямоугольнике $[0,1]\times[-M,M]$ функции ($M>0$ — достаточно большое число), $p(t,w)\ge p_0>0$, а задача Коши $p(t,w)w'+q(t,w)=0$ имеет решение $w_0(t)$, определенное на всем отрезке $[0,1]$.

При сделанных предположениях из результатов [16] вытекает, что для достаточно малых $\varepsilon>0$ задача (6.1.5)-(6.1.6) имеет в некоторой окрестности $w_0(t)$ единственное решение $w_\varepsilon(t)$, причем

$$|w_\varepsilon^{(i)}(t,\varepsilon)| \le C(1+\varepsilon^{-i}\exp(p_0(t-1)/\varepsilon)), i=0,1,2,3,4. \tag{6.1.8}$$

В следующем разделе докажем, что аналогичные результаты справедливы и для линейных задач (6.1.3), (6.1.6) и (6.1.4), (6.1.6).

6.1.2 Постановки галеркинских задач и основные теоремы

Перейдем к описанию м.к.э. Разбиение Δ отрезка $[0,1]$ выберем, как в главе 3 с параметром разбиения $-2/p_0$, а не $5/p_0$. Предположим, что

$$\varepsilon|\ln(\varepsilon)| \le C/m. \tag{6.1.9}$$

Приближенные решения u_m, v_m, w_m задач (6.1.3)-(6.1.6) будем искать в пространстве пробных функций

$$E = \{u \in C[0,1]:\ u(0)=u(1)=0,\ u(t)=$$

$$= A_i + B_i(t-t_i),\ t\in[t_i,t_{i+1}], i=0,1,\cdots,2m-1\}.$$

Введем пространство, которое будем называть пространством тестовых функций. Пусть

$$f_i(t) = \begin{cases} 1,\ t\in[t_{i-1},t_i] \\ 0, t\bar{\in}[t_{i-1},t_i], i=1,2,\cdots,m, \end{cases} \tag{6.1.10}$$

$$f_{m+1}(t) = \begin{cases} 1,\ t \in [t_m, t_{m+1}] \\ (t_{m+2} - t)/(t_{m+2} - t_{m+1}),\ t \in [t_{m+1}, t_{m+2}] \\ 0,\ t\bar{\in}[t_m, t_{m+2}], \end{cases} \qquad (6.1.11)$$

$$f_{m+1}(t) = \begin{cases} (t - t_{i-1})/(t_i - t_{i-1}),\ t \in [t_{i-1}, t_i] \\ (t_{i+1} - t)/(t_{i+1} - t_i),\ t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0,\ t\bar{\in}[t_{i-1}, t_{i+1}], i = m+2, m+3, \cdots, 2m-1. \end{cases} \qquad (6.1.12)$$

Тестовое пространство определим как линейную оболочку функций $f_i(t)$.

Предлагаемый вариант метода Галеркина для задачи (6.1.3), (6.1.6) состоит в отыскании такой функции $u_m(t) \in E$, что

$$-\varepsilon u'_m(t_i + 0) + \varepsilon u'_m(t_{i-1} + 0) + (pu'_m + qu_m, f_i) = (f.f_i), i = 1, \cdots, m, \qquad (6.1.13)$$

$$\varepsilon u'_m(t_m + 0) + (\varepsilon u'_m, f'_{m+1} + (pu'_m + qu_m, f_{m+1}) = (f, f_{m+1}), \qquad (6.1.14)$$

$$(\varepsilon u'_m, f'_i) + (pu'_m + qu_m, f_i) = (f.f_i), i = m+2, m+3, \cdots, 2m-1. \qquad (6.1.15)$$

Здесь $(,)$ означает скалярное произведение в $L_2[0,1]$. Аналогично ставится м.к.э.-задача для (6.1.4), (6.1.6).

Основным результатом для линейных задач является следующее утверждение.

Теорема 1 *Найдутся такие числа* $\varepsilon_0 > 0$, m_0 *— натуральное,* $\gamma_0 > 0$, $C_1 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], m \geq m_0 :\ \varepsilon|\ln(\varepsilon)| \leq \gamma_0$ *существуют единственные решения* $u_m(t)$ *задачи (6.1.13)-(6.1.15) и* $v_m(t)$ *соответствующей задачи для (6.1.4),(6.1.6), причем*

$$\| u_m - u_\varepsilon \|_{C[0,1]} \leq C_1 \inf_{u \in E} \| u - u_\varepsilon \|_{C[0,1]}, \qquad (6.1.16)$$

$$\|v_m - v_\varepsilon\|_{C[0,1} \leq C_1 \inf_{u \in E} \|v - v_\varepsilon\|_{C[0,1]}. \qquad (6.1.17)$$

Если $p(t, \varepsilon)$, $q(t, \varepsilon)$, $f(t)$ *— достаточно гладкие функции, ограниченные в* $C[0,1]$ *равномерно по* ε *вместе со своими производными до второго порядка, то*

$$\|u_m - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq C_1/m^2,\ \|v_m - v_\varepsilon\|l_{C[0,1]} \leq C_1/m^2. \qquad (6.1.18)$$

Для нелинейной задачи (6.1.5)-(6.1.6) галеркинская задача ставится следующим образом. Найти такую функцию $w_m \in E$, что

$$-\varepsilon w'_m(t_i + 0) + \varepsilon w'_m(t_{i-1} + 0) + (pw'_m + qw_m, f_i) = (f, f_i), i = 1, 2, \cdots, m, \qquad (6.1.19)$$

$$\varepsilon w'_m(t_m + 0) + (\varepsilon w'_m, f'_{m+1}) + (pw'_m + qw_m, f_{m+1}) = (f, f_{m+1}), \qquad (6.1.20)$$

$$(\varepsilon w'_m, f'_i) + (pw'_m + qw_m, f_i) = (f, f_i), i = m+2, m+3 \cdots, 2m-1. \qquad (6.1.21)$$

Теорема 2 *Найдутся такие числа ε_0, m_0 — натуральное, $\gamma_0 > 0$, $C_1 > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $m \geq m_0$: $\varepsilon m|\ln(\varepsilon)| \leq \gamma_0$, задача (6.1.19)-(6.1.21) имеет единственное решение $w_m(t)$, для которого*

$$\|w_\varepsilon(t) - w_m(t)\|_{C[0,1]} \leq C_1/m^2. \tag{6.1.22}$$

Доказательству этих теорем будут посвящены последние разделы главы.

6.2 Рекомендации к численному решению галеркинских задач и сравнение с методом шарнирных элементов

Численная реализация предложенных методов отличается исключительной простотой. Выберем в $E(\varepsilon, m)$ базис, состоящий из B-сплайнов $N_{1,0}, N_{1,2}, \cdots, N_{1,2m-2}$. Будем искать решение задачи (6.1.3), (6.1.6) в виде

$$u_m(t) = \sum_{i=0}^{2m-2} \alpha_i N_{1,i}(t). \tag{6.2.23}$$

Подставляя это представление в задачу (6.1.11) и учитывая финитность функций $N_{1,i}(t)$ и $f_j(t)$, получим для вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2m-2})^T$ СЛАУ с трехдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки. Элементы этой матрицы и векторы правых частей являются скалярными произведениями в $L_2[0,1]$ функций $N_{1,i}, f_{1,j}$ и их производных, умноженных на коэффициенты задач (6.1.3), (6.1.4). Для вычисления соответствующих интегралов можно использовать, например, формулу Симпсона на последовательности сгущающихся сеток, покрывающих носитель функции $N_{1,i}$. Можно показать, что матрицы СЛАУ имеют обратные с нормой $O(m)$, поэтому для получения точности $O(1/m^2)$ эти интегралы следует вычислять с точностью $O(1/m^3)$.

В случае нелинейной задачи (6.1.14) возникающая алгебраическая система будет нелинейной. Для ее решения можно применять метод Ньютона. При этом на каждой итерации метода Ньютона возникает СЛАУ с трехдиагональной матрицей относительно коэффициентов разложения вычисляемого приближения по B-сплайнам первой степени. Эта система решается методом прогонки.

6.3 Некоторые свойства решений линейных задач и их функций Грина

Данный параграф носит вспомогательный характер. Вначале изучим свойства решений задач (6.1.3), (6.1.6) и (6.1.4), (6.1.6).

Лемма 1 *При достаточно малых $\varepsilon > 0$ существуют единственные решения $u_\varepsilon(t)$, $v_\varepsilon(t)$ задач (6.1.3), (6.1.6) и (6.1.4), (6.1.6), причем справедливы оценки*

$$|u_\varepsilon^{(i)}(t)| \leq C(1+\varepsilon^{-i}\exp(p_0(t-1)/\varepsilon)),\ i=0,1 \tag{6.3.24}$$

и аналогичные оценки для $v_\varepsilon(t)$. Если $p(t,\varepsilon)$, $q(t,\varepsilon)$, $f(t)$ — гладкие функции класса C^2, ограниченные вместе с производными до второго порядка равномерно по ε, то эти оценки справедливы и для $i=2$.

Доказательство. Отметим сразу, что в случае гладких равномерно по ε коэффициентов существование решения и неравенства (6.3.24) для $i = 0,1,2$ вытекают из результатов асимптотического анализа, приведенного в [30, гл. 5].

Докажем существование решений и оценки (6.3.24) в общем случае. Введем "укороченные операторы"

$$\tilde{L}_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + p(t,\varepsilon)u', \tilde{M}_\varepsilon v = -\varepsilon v'' + p(t,\varepsilon)v'. \tag{6.3.25}$$

Для оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ в [30, гл. 5] было приведено явное представление функции Грина $G(t,\xi)$ и оценки ее производных. Из этого представления и оценок непосредственно вытекают неравенства (6.3.24) для "укороченного" оператора $\tilde{L}_\varepsilon$. Для доказательства в общем случае применим к обеим частям уравнения (6.1.3) оператор $\tilde{G}$. Тогда уравнение (6.1.3) сведется к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода

$$u(t) + \int_0^1 \tilde{G}(t,\xi)q(\xi)u(\xi)d\xi = \int_0^1 \tilde{G}(t,\xi)f(\xi)d\xi.$$

Заметим, что из оценок (см. (5.3.6) в главе 5) функции Грина $\tilde{G}(t,\xi)$ вытекает, что она может быть представлена в виде $\tilde{G}(t,\xi) = G_1(t,\xi)+G_2(t,\xi)$, где G_1 — верхнее треугольное ядро, причем для $g_2(t,\xi)$ справедливы оценки

$$\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G_2(t,\xi)d\xi\right| \leq C\varepsilon. \tag{6.3.26}$$

Их этих оценок следует, что при малых $\varepsilon > 0\,\tilde{G}(t,\xi)$ есть сумма вольтеррова (верхнего треугольного) и малого ядра. Хорошо известно, что ряд Неймана для итерированных вольтерровых ядер сходится быстрее любой геометрической прогресии (этот факт лежит в основе одного из доказательств теоремы существования и единственности решения задачи Коши). С учетом этого из оценок (6.3.27) легко получить, что ряд Неймана для ядра $\tilde{G}(t,\xi)q(\xi)$ при малых $\varepsilon > 0$ будет сходиться, и для его суммы(резольвенты ядра) $R(t,\xi)$ будут справедливы такие же оценки, как и для $\tilde{G}(t,\xi)$. Но функции Грина G и $\tilde{G}$ для "полного" и "укороченного" оператора L, очевидно, связаны соотношениями

$$G(t,\xi) = G(\tilde{t},\xi) + \int_0^1 R(t,s)G(\tilde{s},\xi)ds.$$

Поэтому для функции Грина $G(t,\xi)$ справедливы такие же оценки, как и для $\tilde{G}$. Из этих оценок вытекают неравенства (6.3.24).

Доказательство для задачи (6.1.4), (6.1.6) получается совершенно аналогично, если учесть, что оператор M_ε сопряжен к оператору $\tilde{N}_\varepsilon v = -\varepsilon v'' - p(t,\varepsilon)v' + q(t,\varepsilon)v$, который после замены $t' = 1 - t$ превращается в оператор вида (6.1.3). А для функций Грина G и G^* исходного и сопряженного оператора оператора справедливо соотношение $G(t,\xi) = G^*(\xi,t)$. Лемма доказана.

Замечание 1. В процессе доказательства леммы мы установили что для функций Грина $G(t,\xi)$ и $H(t,\xi)$ задач (6.1.3), (6.1.6) и (6.1.4), (6.1.6) справедливы оценки вида (5.3.6) (см. главу 5).

Изучим теперь некоторые свойства решений уравнений

$$\tilde{L}_\varepsilon^* u = -\varepsilon u'' - (p(t,\varepsilon)u)' = 0,\ \ \tilde{M}_\varepsilon^* v = -\varepsilon v'' - p(t,\varepsilon)v' = 0. \tag{6.3.27}$$

Пусть

$$u_i(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_i} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t p(\tau,\varepsilon)d\tau\right]ds,$$

$$u(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t p(\tau,\varepsilon)d\tau\right]ds, \tag{6.3.28}$$

$$v_i(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{1} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_i}^s p(\tau,\varepsilon)d\tau\right]ds, v(t,\varepsilon) = 1. \tag{6.3.29}$$

Нетрудно видеть, что функции (6.3.28) и (6.3.29) — решения уравнений (6.3.27), первого и второго соответственно.

Обозначим через $\hat{u}_i(t,\varepsilon)$, $\hat{u}(t,\varepsilon)$, $\hat{v}_i(t,\varepsilon)$ непрерывные, кусочно-линейные с изломами в узлах t_j функции, интерполирующие функции (6.3.28) и (6.3.29) в этих узлах.

Лемма 2 *Для* $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \geq i \geq m+1$ *справедливы оценки*

$$|u_i(t,\varepsilon) - \hat{u}_i(t,\varepsilon)| \leq \tfrac{C}{(k-m)^2},\ |v_i(t,\varepsilon)\hat{v}_i(t,\varepsilon)| \leq \tfrac{C}{(k-m)^2}. \tag{6.3.30}$$

Для $t \in [t_{m+1}, 1]$ имеют место оценки

$$|u(t,\varepsilon) - \hat{u}(t,\varepsilon)| \leq \tfrac{C}{m^2}. \tag{6.3.31}$$

Доказательство. В силу формулы для остаточного члена линейной интерполяции (см. [30, с. 187, (21.20)] имеем при $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$|u_i(t,\varepsilon) - \hat{u}_i(t,\varepsilon)| \leq Ch_k^2 \max_{s\in[t_k,t_{k+1}]} |u_i''(s)|. \tag{6.3.32}$$

Но в силу предложения 3 (см. гл. 5) $h_k = O(\varepsilon/(k-m))$, а из первой формулы (6.3.28) вытекает, что $\max\limits_{s\in[t_k,t_{k+1}]} |u_i''(s)| \leq C/\varepsilon^2$. Тем самым первая из оценок (6.3.30) доказана. Вторая получается точно так же. Для доказательства формулы (6.3.31) достаточно установить, что при $t \in [t_{m+1}, 1]$

$$|u''(t,\varepsilon)| \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \exp(p_0(t-1)/\varepsilon). \tag{6.3.33}$$

Если эта оценка будет установлена, в силу $\exp(p_0(t-1)/\varepsilon) \leq C(k-m)^2/m^2$ из (6.3.32), (6.3.33) получим (6.3.31). Поскольку $u''(t,\varepsilon) = -(p(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon))'$, то для доказательства (6.3.33) достаточно доказать, что

$$|u'(t,\varepsilon)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \exp\Big(p_0(t-1)/\varepsilon\Big). \tag{6.3.34}$$

Докажем эту оценку. Имеем

$$u'(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t p(t,\varepsilon) \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t p(\tau,\varepsilon)d\tau\right] ds. \tag{6.3.35}$$

Далее в силу формулы конечных приращений и оценок $p^{(i)}(t,\varepsilon)$ при $i = 0, 1$

$$\int_0^t \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t p(\tau,\varepsilon)d\tau\right] ds = \int_0^t \exp\left(p(t,\varepsilon)\tfrac{s-t}{\varepsilon}\right) ds +$$

$$+\int_0^t \exp\left(p(t,\varepsilon)\tfrac{s-t}{\varepsilon}\right)\left(\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t (p(\tau,\varepsilon) - p(t,\varepsilon))d\tau\right] - 1\right) ds = I_1 + I_2, \tag{6.3.36}$$

$$I_2 \le \frac{C}{\varepsilon}\int_0^t \exp\left(p(t,\varepsilon)\tfrac{s-t}{\varepsilon}\right)\int_s^t |p(\tau,\varepsilon)-p(t,\varepsilon)|\,d\tau ds \le$$

$$\le C_1\int_0^t \exp\left(p(t,\varepsilon)\tfrac{s-t}{\varepsilon}\right)\sup_{x\in[0,1]}|p'((x,\varepsilon)|\times$$

$$\times\tfrac{(s-t)^2}{\varepsilon}ds \le C_2\exp(p_0(t-1)/\varepsilon)\int_0^t (\frac{s-t}{\varepsilon})^2\exp(p_0\frac{s-t}{\varepsilon})ds \le$$

$$\le C_3\,\varepsilon\exp\left(p_0(t-1)/\varepsilon\right), \tag{6.3.37}$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{p(t,\varepsilon)} + O\left(\exp(-p_0 t/\varepsilon)\right). \tag{6.3.38}$$

Подставляя (6.3.36) в (6.3.35) и учитывая (6.3.37), (6.3.38), получаем (6.3.34). Лемма доказана.

Лемма 3 *Пусть i_0 — некоторое не зависящее от ε и m натуральное число. Тогда для $t\in[t_k,t_{k+1}], k=m+1,m+2,\cdots,m+i_0$ справедливы оценки*

$$|u'(t,\varepsilon)| \le C/(\varepsilon m^2),\ |\hat{u}'(t,\varepsilon)| \le C/(\varepsilon m^2). \tag{6.3.39}$$

Доказательство. Первая оценка (6.3.39) получается из (6.3.34) и того, что $\exp(p_0(t-1)/\varepsilon) \le C(k-m)^2/m^2 \le C_1/m^2$. Для доказательства второй оценки заметим, что, в силу теоремы Ролля, на любом отрезке $[t_k,t_{k+1}]$ найдется такая точка ξ_k, что $u'(\xi_k,\varepsilon)-\hat{u}'(\xi_k,\varepsilon)=0$, и вторая оценка следует из первой. Лемма доказана.

Обозначим через $\tilde{G}^*(t,\xi)$ и $\tilde{H}^*(t,\xi)$ функции Грина операторов (6.3.27) с краевыми условиями (6.1.6). Пусть $g_i(t,\varepsilon)$ и $\tilde{h}_i(t,\varepsilon)$ — непрерывные кусочно-линейные функции, интерполирующие $\tilde{G}^*(t,t_i)$ и $\tilde{H}^*(t,t_i)$ в узлах сетки.

Лемма 4 *Справедливы оценки*

$$|g_i(t,\varepsilon)-\tilde{G}(t,t_i)| \le \begin{cases} C/m^2,\ t\in[t_{m+1},t_i], \\ C/(k-m)^2,\ t\in[t_k,t_{k+1}],\ k\ge i\ge m+1 \end{cases} \tag{6.3.40}$$

и аналогичные оценки для $\tilde{h}(t,\varepsilon)-\tilde{H}^*(t,t_i)$.

Доказательство. Явный вид функции Грина $\tilde{G}(t,\xi)$ для оператора L_ε, сопряженного к L_ε^*, получен в главе 5, формулы (5.3.2). С учетом того, что $\tilde{G}^*(t,\xi)=\tilde{G}(\xi,t)$, из этих формул вытекает представление

$$\tilde{G}^*(t,\xi) = \begin{cases} A_i u(t,\varepsilon),\ t\le t_i, 0<A_i\le C, \\ B_i u(t,\varepsilon)+D_i u(t,\varepsilon),\ t\ge t_i, 0<C_1\le B_i\le C_2,\ |D_i|\le C. \end{cases} \tag{6.3.41}$$

Из этого представления и леммы 2 получаем оценки (6.3.40). Доказательство для $H^*(t, t_i)$ аналогично. Лемма доказана.

Следствие 1 *Пусть* i_0 *— некоторое не зависящее от* ε *и* m *натуральное число. Тогда для* $i = m+1, m+2, \cdots, m+i_0$; $t \in [t_i, t_{m+i_0}]$

$$\frac{\partial G^*(t.t_i)}{\partial t} \leq -C_1\varepsilon, C_1 = C_1(i_0) > 0. \tag{6.3.42}$$

Доказательство. Из вида функции $u_i(t, \varepsilon)$ (см.(6.3.28)) следует, что

$$u_i'(t, \varepsilon) \geq \frac{C}{\varepsilon} \exp(\frac{C_2}{\varepsilon}(t_i - t)), t \in [t_i, t_{m+i_0}], \tag{6.3.43}$$

где $C_2 = \max\limits_{t \in [0,1]} p(t), C > 0$. Отсюда, учитывая, что в силу того, что $t_{m+i_0} - t_i \geq C_3\varepsilon$, получаем неравенство

$$u_i'(t, \varepsilon) \leq -C_1\varepsilon, t \in [t_i, t_{m+i_0}].$$

Из этого неравенства и (6.3.39), (6.3.41) вытекает (6.3.42). Следствие доказано.

6.4 О галеркинских проекторах

Для доказательства основных результатов необходимо развить метод галеркинских проекций Нитше и Натерера [11] на случай семейства уравнений, зависящих от параметра.

6.4.1 Определение и простейшие свойства галеркинских проекторов

Вначале приведем абстрактную схему определения проекторов в линейных нормированных пространствах. Пусть в л.н.п. $E_\varepsilon\,(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ выбраны подпространства D_ε. Через D_ε' обозначим множество всех линейных (не обязательно непрерывных) на D_ε функционалов. Выберем в D_ε и D_ε' конечномерные подпространства одинаковой размерности E_ε^* и Ψ_ε^* соответственно. Поставим следующую задачу:
для любого $u \in D_\varepsilon$ найти $v \in E_\varepsilon^*$ такую, что для любого $\psi \in \Psi_\varepsilon^*$

$$< v - u, \psi >= 0. \tag{6.4.44}$$

Лемма 5 *Пусть* $\{\beta_j\}$ *— базис в* E_ε^**. Если для него существует биортогональный базис* $\{\lambda_i\}$*,* $\lambda_i \in \Psi_\varepsilon^*$ *(т.е.* $<\beta_j, \lambda_i>= \delta_{ij}$*), то задача (6.4.44) будет иметь единственное решение, для которого справедливо представление*

$$v = \sum_{i=1}^{n_k} < u, \lambda_i > \beta_i \tag{6.4.45}$$

(n_k *— размерность* E_ε^**).*

Доказательство. Из (6.4.45) и определения биортогональных функционалов вытекает, что v удовлетворяет (6.4.44) при $\psi = \lambda_j$ для любого j. Но $\{\lambda_j\}$ — базис в Ψ_ε^*, значит, (6.4.44) выполняется для произвольного $\psi \in \Psi_\varepsilon^*$. Итак, v — решение задачи (6.4.45). Для доказательства единственности заметим, что если искать v в виде $v = \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i \beta_i$, то подставляя это представление в (6.4.44) вместо v, а вместо ψ подставляя $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n_k}$, получим для коэффициентов α_i систему с единичной матрицей, которая имеет единственное решение. Лемма доказана.

В соответствии с леммой 5 определим линейный оператор $P_\varepsilon = P_\varepsilon^k : D_\varepsilon \to E_\varepsilon^k$ формулой

$$P_\varepsilon u = \sum_{i=1}^{n_k} < u, \lambda_i > \beta_i. \tag{6.4.46}$$

Непосредственная проверка показывает, что $P_\varepsilon P_\varepsilon = P_\varepsilon$, т.е. P_ε — проектор.

Предположим, что проектор $P_\varepsilon = P_\varepsilon^k$ существует для некоторого семейства пар индексов $KE = \{(k, \varepsilon)\}$ и при любых $(k, \varepsilon) \in KE$ является линейным ограниченным в E_ε оператором.

Определение 1. Проектирование с помощью проекторов P_ε^k будем называть квазиоптимальным на KE, если найдется такая константа $C > 0$, что для любой пары $(k, \varepsilon) \in KE$

$$\|P_\varepsilon^*\|_{E_\varepsilon \to E_\varepsilon} \leq C. \tag{6.4.47}$$

Лемма 6 *Пусть проектирование с помощью проекторов* P_ε^k *квазиоптимально на на* KE *с константой* C*. Тогда для любого* $u \in D_\varepsilon$

$$\left\| u - P_\varepsilon^k u \right\|_{E_\varepsilon} \leq (1 + C) \inf_{\tilde{u} \in E_\varepsilon^k} \|u - \tilde{u}\|_{E_\varepsilon}.$$

Действительно,

$$\|u - P_\varepsilon^k u\| = \|u - \tilde{u} - P_\varepsilon^k (u - \tilde{u})\| \leq$$

$$\leq \|u - \tilde{u}\| + \|P_\varepsilon^k\|_{E_\varepsilon \to E_\varepsilon} \|(u - \tilde{u})\|$$

для любого $\tilde{u} \in E_\varepsilon^k$, что и требовалось доказать.

Пользуясь абстрактной схемой, введем понятие галеркинского проектора и квазиоптимальности метода Галеркина.

Пусть в л.н.п. E_ε рассматривается семейство линейных операторов $\{L_\varepsilon, (0 < \varepsilon \leq \varepsilon)\}$, имеющих области определения $D(L_\varepsilon)$, и семейство конечномерных пространств линейных на E_ε функционалов

$$\{\Phi_\varepsilon^k, (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0), k = 1, 2, \cdots\}$$

с базисами $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n_k}\}$ $(\phi_i = \phi_i(k, \varepsilon))$. Определим на $D(L_\varepsilon)$ линейные функционалы $\kappa_i = \kappa_i(k, \varepsilon)$, полагая $< u, \kappa_i >=< L_\varepsilon u, \phi_i >$. Предположим, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функционалы κ_i могут быть линейно продолжены на некоторое более широкое подпространство D_ε. Продолженные функционалы обозначим ψ_i, а их линейную оболочку — Ψ_ε^k.

В нашем случае L_ε – это оператор (6.1.3) (или (6.1.4)),

$$E_\varepsilon = \{u \in C[0, 1] : u' \in L_\infty[0, t_m], u(0) = u(1) = 0\}$$

— пространство с нормой

$$\| u \|_\varepsilon = \varepsilon \| u' \|_{L_\infty[0, t_m]} + \| u \|_{C[0,1]},$$

где $t_m = 1 - \frac{2}{p_0}\varepsilon|\ln(\varepsilon)|$ — узел разбиения Δ, отделяющий погранслой. Функционалы ϕ_i определим соотношениями $< v, \phi_i >= \int_0^1 v(t) f_i(t) dt$, где $f_i(t)$ — функции (6.1.10)-(6.1.12). Тогда

$$< u, \kappa_i >= \int_0^1 (L_\varepsilon u)(t) f_i(t) dt. \tag{6.4.48}$$

В качестве подмножества D_ε выберем подмножество функций из E_ε, имеющих кусочно-непрерывные справа ограниченные на $[0, 1]$ производные с конечным числом точек разрыва первого рода. Такой выбор D_ε обусловлен желанием искать приближенное решение в виде линейной комбинации B-сплайнов первой степени, которые очень удобны в численной реализации, но не входят в $D(L_\varepsilon)$.

Осуществляя в (6.4.48) интегрирование по частям, получим, что функционалы κ_i линейно продолжаются до функционалов на всем D_ε, действие которых задается левыми частями формул (6.1.13)-(6.1.15). Эти функционалы обозначим ψ_i, а их линейную оболочку — Ψ_ε^k. Теперь вернемся к нашей абстрактной схеме.

Выберем в D_ε семейство конечномерных подпространств $\{E_\varepsilon^*\}$ размерности n_k. Для каждого $u \in D_\varepsilon$ поставим задачу отыскания такого элемента $v \in E_\varepsilon^*$, что для любого $\psi \in \Psi^k_\varepsilon$ выполняется соотношение (6.4.44). Эту задачу будем называть галеркинской задачей для оператора L_ε, а элемент v — галеркинской проекцией элемента u.

В дальнейшем, говоря, что P^k_ε существует, автоматически имеем в виду, что соответствующая задача (6.4.44) имеет единственное решение при любом u из D_ε.

Определение 2. Метод Галеркина (6.4.44) будем называть квазиоптимальным на KE, если найдется такая константа $C > 0$, что для любой пары $(k, \varepsilon) \in KE$ галеркниский проектор существует, и справедливо неравенство (6.4.47).

6.4.2 Дальнейшие свойства галеркинских проекторов

В этом пункте мы установим утверждения, позволяющие сводить исследование галеркинских проекторов для операторов общего вида к аналогичной задаче для более простых операторов. Эти утверждения являются "количественными аналогами" некоторых общих идей метода компактной аппроксимации.

Функционалы, введенные в начале параграфа с помощью оператора L_ε, будем обозначать ψ_{L_ε}. Функционалы ψ, вводимые аналогичным образом с помощью других операторов L, будем обозначать ψ_L. Всюду предполагается, что функционалы ψ_L определены на D_ε, т.е. там же, где и ψ_{L_ε}. Через I обозначим тождественный оператор.

Лемма 7 *Пусть оператор L_ε имеет вид $L_\varepsilon = L_{\varepsilon,0} + L_{\varepsilon,1}$ и выполнен набор условий*

1. *Операторы L_ε и $L_{\varepsilon,0}$ обратимы, причем L_ε^{-1}, $L_{\varepsilon,0}^{-1}$, $(L_{\varepsilon,0}^{-1}L_\varepsilon)$, $(L_{\varepsilon,0}^{-1}L_{\varepsilon,1})$ — непрерывные, определенные на всем D_ε операторы;*

2. *$(L_{\varepsilon,0}^{-1}L_{\varepsilon,1})D_\varepsilon \subset D_\varepsilon$, $(L_{\varepsilon,0}^{-1}L_\varepsilon)D_\varepsilon \subset D_\varepsilon$, и для любого $u \in D_\varepsilon$*

$$< u, \psi_{L_\varepsilon} >=< [I + (L_{\varepsilon,0}^{-1}L_{\varepsilon,1})]u, \psi_{L_{\varepsilon,0}} >, \tag{6.4.49}$$

$$labelgl6-41.7 < (L_{\varepsilon,0}^{-1}L_\varepsilon)u, \psi_{L_{\varepsilon,0}} >=< u, \psi_{L_\varepsilon} >; \tag{6.4.50}$$

3. *Галеркинский проектор $P^k_{\varepsilon,0}$ для $L_{\varepsilon,0}$ существует;*

4. *Оператор $I + P^k_{\varepsilon,0}(L_{\varepsilon,0}^{-1}L_{\varepsilon,1})$ обратим.*

Тогда существует галеркинский проектор P^k_ε для оператора L_ε, и справедливо представление

$$P^k_\varepsilon = [I + P^k_{\varepsilon,0}(L_{\varepsilon,0}^{-1}L_{\varepsilon,1})]^{-1}P^k_{\varepsilon,0}(L_{\varepsilon,0}^{-1}L_\varepsilon). \tag{6.4.51}$$

Доказательство. Покажем вначале, что для оператора (6.4.51)

$$< P_\varepsilon^k u - u, \psi_{L_\varepsilon} >= 0$$

для любого $\psi_{L_\varepsilon} \in \Psi_\varepsilon^k$, т.е. $P_\varepsilon^k u$ — решение задачи (6.4.51) для оператора L_ε. Из (**??**)-(**??**) имеем для любого $u \in D_\varepsilon$

$$< P_\varepsilon^k u, \psi_{L_\varepsilon} >=< [I + (L_{\varepsilon,0}^{-1} L_{\varepsilon,1})] P_\varepsilon^k u, \psi_{L_{\varepsilon,0}} >=$$

$$=< P_{\varepsilon,0}^k [I + (L_{\varepsilon,0}^{-1} L_{\varepsilon,1})] P_\varepsilon^k u, \psi_{L_{\varepsilon,0}} >=$$

$$=< [I + P_{\varepsilon,0}^k (L_{\varepsilon,0}^{-1} L_{\varepsilon,1})] P_\varepsilon^k u, \psi_{L_{\varepsilon,0}} >=$$

$$=< P_{\varepsilon,0}^k (L_{\varepsilon,0}^{-1} L_\varepsilon) u, \psi_{L_{\varepsilon,0}} >=< (L_{\varepsilon,0}^{-1} L_\varepsilon) u, \psi_{L_{\varepsilon,0}} >=< u, \psi_{L_\varepsilon} >,$$

что и требовалось. Осталось доказать, что найденное решение единственное. Рассмотрим задачу (6.4.44) для L_ε при $u = 0$. В силу (6.4.49) она равносильна отысканию такого $u \in E_\varepsilon^k$, что

$$< [I + (L_{\varepsilon,0}^{-1} L_{\varepsilon,1})] u, \psi_{L_{\varepsilon,0}} >= 0$$

для любого $\psi_{L_{\varepsilon,0}}$.

Из определения $P_{\varepsilon,0}^k$ вытекает, что любое решение этой задачи удовлетворяет соотношению $u = -P_{\varepsilon,0}^k (L_{\varepsilon,0}^{-1} L_{\varepsilon,1}) u$. Отсюда, в силу предположения 4, $u = 0$.

Итак, однородная задача имеет нулевое решение. Значит, любая неоднородная задача имеет единственное решение. Лемма доказана.

Лемма 8 *Предположим, что* $L_\varepsilon = L_{\varepsilon,0} + L_{\varepsilon,1}$, *выполнены предположения 1.-3. леммы 7, причем*

$$\| (L_{\varepsilon,0}^{-1} L_\varepsilon) \|_{E_\varepsilon \to E_\varepsilon} \le C, \ \| (L_{\varepsilon,0}^{-1} L_{\varepsilon,1}) \|_{E_\varepsilon \to E_\varepsilon} \le C. \tag{6.4.52}$$

Пусть метод Галеркина (6.4.44) квазиоптимален для оператора $L_{\varepsilon,0}$ *на некотором множестве*

$$KE = \{(k, \varepsilon), k = k_0, k_0 + 1, \dots; \ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0\}.$$

Пусть, наконец, найдется такая константа $C_1 > 0$, *что для любого элемента* $u \in D_\varepsilon$, *для которого выполнено* $\|u\|_{E_\varepsilon} \le 1$ *и любой пары* $(k, \varepsilon) \in KE$ *существует такой элемент* $v \in E_\varepsilon^k$, *что*

$$\|v - (L_{\varepsilon,0}^{-1} L_\varepsilon) u\|_{E_\varepsilon} \le C_1 \gamma(k, \varepsilon), \tag{6.4.53}$$

где $\gamma(k,\varepsilon)\to 0$ при $k\to\infty$ равномерно по ε таким, что $(k,\varepsilon)\in KE$.
Тогда найдется такой номер $k_1\geq k_0$, что для всех пар $(k,\varepsilon)\in KE$ таких, что $k\geq k_1$, существует галеркинский проектор P^k_ε для оператора L_ε. При этом метод Галеркина (6.4.44) квазиоптимален для L_ε на множестве $KE_1=\{(k,\varepsilon)\in KE: k\geq k_1\}$.

Доказательство. Из (6.4.53) и квазиоптимальности метода Галеркина для $L_{\varepsilon,0}$ вытекает, что

$$\|^k_{\varepsilon,0}(L^{-1}_{\varepsilon,0}L_{\varepsilon,1})-L^{-1}_{\varepsilon,0}L_{\varepsilon,1}\|_{E_\varepsilon\to E_\varepsilon}\to 0 \tag{6.4.54}$$

при $k\to\infty$ равномерно по ε. Поскольку в силу (6.4.52)

$$\|(I+L^{-1}_{\varepsilon,0}L_{\varepsilon,1})^{-1}\|_{E_\varepsilon\to E_\varepsilon}=\|(L^{-1}_{\varepsilon,0}L_\varepsilon)\|_{E_\varepsilon\to E_\varepsilon}\leq C_1,$$

то из (6.4.54) вытекает, что, начиная с некоторого $k_1\geq k_0$ оператор $I+P^k_{\varepsilon,0}(L^{-1}_{\varepsilon,0}L_{\varepsilon,1})$ обратим, причем

$$\|(I+P^k_{\varepsilon,0}(L^{-1}_{\varepsilon,0}L_{\varepsilon,1}))^{-1}\|_{E_\varepsilon\to E_\varepsilon}\leq C_1. \tag{6.4.55}$$

Поэтому, в силу леммы 7, для $k\geq k_1$ оператор P^k_ε существует, и справедливо представление (6.4.51). Наконец, из (6.4.51), (6.4.52), (6.4.54) и квазиоптимальности метода Галеркина для $L_{\varepsilon,0}$ вытекает оценка $\|P^k_\varepsilon\|_{E_\varepsilon\to E_\varepsilon}\leq C$. Лемма доказана.

6.5 Доказательство теоремы 1

Покажем, что галеркинская задача (6.1.11) укладывается в рамки абстрактной схемы, предложенной в предыдущем разделе.

Пусть $E_\varepsilon=\{u\in C[0,1]: u'\in L_\infty[0,\phi_\varepsilon], u(0)=u(1)=0\}$ — пространство с нормой $\|u\|_\varepsilon=\varepsilon\|u'\|_{L_\infty[0,\phi_\varepsilon]}+\|u\|_{C[0,1]}$, введенное ранее, L_ε — оператор (6.1.3), D_ε — множество функций из E_ε, имеющих кусочно непрерывные справа ограниченные на $[0,1]$ производные с конечным числом точек разрыва первого рода. Определим функционалы ψ_i, $i=0,1,\cdots,2m-1$ на функциях из D_ε выражениями, стоящими в левых частях формул (6.1.13)-(6.1.15). Их линейную оболочку по-прежнему будем обозначать $F(\varepsilon,m)$. Нетрудно убедиться, что точное решение уравнения (6.1.3) удовлетворяет (6.1.11). Поэтому задача (6.1.13)-(6.1.15) эквивалентна галеркинской задаче (6.4.44) для оператора L_ε.

Выберем в $E(\varepsilon,m)$ базис из нормализованных B-сплайнов первой степени $N_{1,0}$, $N_{1,1},\dots,$ $N_{1,2m-1}$. Если нам удастся построить в $F(\varepsilon,m)$ биортогональный базис

$\{\lambda_j\}$, $\lambda_j = \lambda_j(m,\varepsilon)$, то, согласно лемме 5, будет доказано существование проектора $P_\varepsilon = P(\varepsilon, m)$ и представление

$$P_\varepsilon u = \sum_{i=1}^{2m-1} < u, \lambda_i > N_{1,i-1}. \tag{6.5.56}$$

Заметим также, что, поскольку на $[0, \phi_\varepsilon)$ разбиение Δ равномерно с шагом $h = O^*(1/m) \geq C\varepsilon$, то

$$\|N'_{1,i}\|_{L_\infty[0,\phi_\varepsilon]} \leq C/h \leq C/\varepsilon.$$

Отсюда, с учетом финитности B-сплайнов, получаем, что для любого набора скаляров $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{2m-2}$

$$\left\| \sum_{i=1}^{2m-1} \alpha_i N_{1,i-1} \right\|_\varepsilon \leq \max_i |\alpha_i|. \tag{6.5.57}$$

Из этого факта, в свою очередь, следует, что если для любого $u \in E_\varepsilon$ справедливы оценки

$$| < u, \lambda_i > | \leq C_1 \parallel u \parallel_\varepsilon, \; i = 1, 2, \cdots, 2m-1,$$

где C не зависит от u и i, то $\|P_\varepsilon\|_{E_\varepsilon \to E_\varepsilon} \leq C_2$, т.е. метод Галеркина квазиоптимален. Таким образом, доказав существование биортогонального базиса $\{\lambda_i\}$ и оценки (6.5.57), мы докажем однозначную разрешимость галеркинской задачи и неравенства (6.1.16) -(6.1.17). Для доказательства оценок (6.1.18) нужно будет дополнительно изучить аппроксимационные свойства пространств $F(\varepsilon, m)$.

Систему функционалов $\{\lambda_i\}$ будем строить для случая, когда операторы (6.1.3) имеют вид (6.3.25), т.е. $q(t,\varepsilon) \equiv 0$. Для доказательства в общем случае воспользуемся леммами 7 и 8.

Вначале мы построим вспомогательные функционалы μ_i, которые образуют "почти биортогональные базис", а искомые функционалы λ_i будем искать в виде линейных комбинаций ν_i. Ниже мы формально определим μ_i, а целесообразность такого определения будет видна из леммы 9 и ее доказательства.

Для $i = 1, 2 \cdots, m$ положим

$$\mu_i(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j^i f_j(t), \tag{6.5.58}$$

где $f_j(t)$ — функции (6.1.10)-(6.1.12),

$$\alpha_j^i = \left[h^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} p(t,\varepsilon)dt\right]^{-1},\ j = i, i-1, \ldots, 1,\ h = \phi_\varepsilon/m. \tag{6.5.59}$$

Для $i = m+1, m+2, \cdots, 2m-1$ положим

$$\mu_i(t,\varepsilon) = \begin{cases} g_i(t,\varepsilon), & t \in [t_{m+1}, 1], \\ g_i(t_{m+1},\varepsilon), & t \in [t_m, t_{m+1}], \\ (g_i(t_{m+1},\varepsilon)/\alpha_m)\mu_m(t,\varepsilon), & t \in [0, t_m]. \end{cases} \tag{6.5.60}$$

Здесь $g_i(t,\varepsilon)$ — функции из леммы 4. Очевидно, что функции (6.5.60) непрерывны при $t = t_m,\ t_{m+1}$.

Поскольку каждая из функций $\mu_i(t,\varepsilon)$ — линейная комбинация функций (6.1.10)-(6.1.12), то $\mu_i(t,\varepsilon)$ однозначно определяет линейный функционал $\mu_i = \mu_i(t,\varepsilon)$ на D_ε. Следующая лемма показывает, что функционалы μ_i близки к биортогональным.

Лемма 9 *Справедливы оценки*

$$\langle N_{1,i-1}, \mu_i\rangle \geq C > 0, \tag{6.5.61}$$

$$|\langle N_{1,j-1}, \mu_i\rangle| \leq C_1\varepsilon,\ i \leq m,\ j \neq i, i+1, \tag{6.5.62}$$

$$|\langle N_{1,i}, \mu_i\rangle| \leq C_1\varepsilon m, i \leq n-1, |\langle N_{1,m}, \mu_m >\rangle| \leq \tfrac{C}{|\ln(\varepsilon)|}, \tag{6.5.63}$$

$$|\langle N_{1,j-1}, \mu_i\rangle| \leq$$

$$\leq \begin{cases} C_2 \max\{\varepsilon, \frac{1}{m^2}\}, & j < i,\ j \neq m, m+1,\ i \geq m+1, \\ \frac{C_3}{(j-m)^2}, & j \geq i+1 \geq m+2, \end{cases} \tag{6.5.64}$$

$$|\langle N_{1,j-1}, \mu_i\rangle| \leq \tfrac{C}{m},\ j = m, m+1,\ i \geq m+1,\ i \neq j. \tag{6.5.65}$$

Доказательство. Докажем (6.5.62). Непосредственный подсчет показывает, что

$$\langle N_{1,j-1}, \mu_i\rangle = \varepsilon m(-\alpha_{j+1}^i + 2\alpha_j^i - \alpha_{j-1}^i)$$

для $j < i \leq m$. Но из формул (6.5.59), ограниченности и гладкости $p(t,\varepsilon)$ на $[0, t_m]$ (см. формулы (6.1.7)) следует, что

$$\max_{i,j}\left|\alpha_j^i\right| \leq C,\ \max_{i,j}\left|\alpha_j^i - \alpha_{j-1}^i\right| \leq C/m. \tag{6.5.66}$$

Поэтому $-\alpha^i_{j+1}+2\alpha^i_j-\alpha^i_{j-1}\le C_1/m$ и оценка (6.5.62) доказана при $j<i\le m$. Для $j\ge i+1$ имеем $<N_{1,j-1},\mu_i^{m,\varepsilon}>=0$ в силу дизъюнктивности носителей. Тем самым оценка (6.5.62) доказана полностью.

Докажем (6.5.63). При $j=i+1, i\le m$ имеем

$$|\langle N_{1,i},\mu_i\rangle|=|\langle N_{1,i},\alpha_i^j f_i\rangle|\le C\varepsilon/h_i,$$

т.к. $\left|\alpha_i^i\right|\le const$ в силу (6.5.66). Учитывая, что $h_i=O^*(1/m)$ для $i\le m-1$, а $h_m=O^*(\varepsilon|\ln(\varepsilon)|)$, из последнего неравенства получаем (6.5.63).

Для доказательства следующей оценки установим вначале вспомогательное тождество

$$\left(\varepsilon w',\frac{\partial G^*_\varepsilon}{\partial t}(t,t_i)\right)+(p(t,\varepsilon)w',G^*_\varepsilon(t,t_i))=w(t_i), \tag{6.5.67}$$

которое справедливо для любой $w\in D_\varepsilon$.

Действительно, для любой $w\in C[0,1]:\ w(0)=w(1)=0$ имеем

$$w(t_i)=\int_0^1 G_\varepsilon(t_i,t)(L_\varepsilon w)(t)dt=\int_0^1 G^*_\varepsilon(t,t_i)(L_\varepsilon w)(t)dt,$$

откуда интегрированием по частям получаем (6.5.67). Если теперь $w(t)\in D_\varepsilon$ — произвольная кусочно-дифференцируемая функция, то подберем для нее последовательность функций

$$w_n(t)\in C_2[0,1]:\ \|w_n-w\|_{C[0,1]}\to 0,\ \|w_n'-w'\|_{L_1[0,1]}\to 0.$$

Поскольку для $w_n(t)$ тождество (6.5.67) выполняется, то в пределе получим это тождество и для $w(t)$.

Теперь докажем (6.5.64) для $j\ge m+2$. В этом случае $supp\,N_{1,j-1}\subset[t_m,1]$, и в силу (6.1.14), (6.1.15), (6.5.60), с учетом того, что $q(t,\varepsilon)\equiv 0$, имеем

$$\langle N_{1,j-1},\mu_i\rangle=\left(\varepsilon N'_{1,j-1},g_i'\right)+\left(p(t,\varepsilon)N'_{1,j-1},g_i\right). \tag{6.5.68}$$

С другой стороны, в силу (6.5.67)

$$\left(\varepsilon N'_{1,j-1},\tfrac{\partial G^*_\varepsilon}{\partial t}(t,t_i)\right)+\left(p(t,\varepsilon)N'_{1,j-1},G^*_\varepsilon(t,t_i)\right)=N_{1,j-1}(t_i)=\delta_{i,j}. \tag{6.5.69}$$

Из (6.5.68), (6.5.69) имеем при $j\ge m+2$

$$\langle N_{1,j-1},\mu_i\rangle=\left(\varepsilon N'_{1,j-1},\,g_i'-\tfrac{\partial G^*_\varepsilon}{\partial t}(t,t_i)\right)+$$

$$+\Big(p(t,\varepsilon)N'_{1,j-1}, g_i - G^*_\varepsilon(t,t_i)\Big) + \delta_{i,j}. \qquad (6.5.70)$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $g_i(t_k) = G^*_\varepsilon(t_k,t_i)$, получаем, что первый член в правой части (6.5.70) равен нулю, т.е.

$$\langle N_{1,j-1}, \mu_i \langle = \Big(p(t,\varepsilon)N'_{1,j-1}, g_i - G^*_\varepsilon(t,t_i)\Big) + \delta_{i,j}. \qquad (6.5.71)$$

Из (6.5.71), (6.3.40) вытекает оценка (6.5.64) для $j \geq m+2$, $j \neq i$. В случае $j \leq m+1$ будет $supp\, N_{1,j-1} \subset [0,t_m]$, и оценка (6.5.64) получается аналогично (6.5.62), т.к. $\mu_i(t,\varepsilon) = \left[\frac{g_i(t_{m+1},\varepsilon)}{\alpha_m}\right] \mu_m(t,\varepsilon)$ при $t \in [0,t_m]$ (см.(6.5.60)). Тем самым оценка (6.5.64) полностью доказана.

Докажем оценку (6.5.65). Из (6.1.15) и явной формулы для B-сплайна первой степени имеем

$$\langle N_{1,i}, \mu_i \rangle = h^{-1}_{m+1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \Big(\varepsilon\mu'_i + p(t,\varepsilon)\mu_i\Big) dt +$$

$$+ h^{-1}_{m+2} \int_{t_{m+1}}^{t_{m+2}} \Big(\varepsilon\mu'_i + p(t,\varepsilon)\mu_i\Big) dt.$$

Но в силу (6.5.60) и леммы 3 функция $\varepsilon\mu'_i + p(t,\varepsilon)\mu_i$ при $i \geq m+2$ имеет на $[t_m, t_{m+2}]$ изменение не более, чем $O(h)$, т.е.

$$|\langle N_{1,i}, \mu_i \rangle| \leq C/m.$$

Тем самым оценка (6.5.65) доказана для $j = m+1$. Для $j = m$ доказательство аналогично.

Докажем (6.5.61). Для $i \leq m$ в силу (6.5.58), (6.5.59), (6.1.10)-(6.1.15) прямой выкладкой получаем, что $\langle N_{1,i}, \mu_i^{m,\varepsilon} \rangle = 1 + O(\varepsilon m)$, откуда, с учетом того, что $\varepsilon|\ln(\varepsilon)| \leq C/m$, при малых ε следует (6.5.61).

Для $i \geq m+2$ поступим следующим образом. Зафиксируем некоторое достаточно большое, но не зависящее от ε и m число i_0. Для $m+2 \leq i \leq m+i_0$ имеем

$$\langle N_{1,i-1}, \mu_i \rangle = \tfrac{\varepsilon}{h_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} g'_i(t,\varepsilon) dt + \tfrac{1}{h_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(t,\varepsilon) g_i(t,\varepsilon) dt -$$

$$- \tfrac{\varepsilon}{h_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} g'_i(t,\varepsilon) dt - \tfrac{1}{h_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} p(t,\varepsilon) g_i(t,\varepsilon) dt = I_1 + I_2 - I_3 - I_4. \qquad (6.5.72)$$

Из леммы 3, представления (6.3.41) и того, что $g_i(t,\varepsilon)$ интерполирует $G^*_\varepsilon(t,t_i)$, имеем

$$|g'_i(t,\varepsilon)| \leq C\Big(1/(\varepsilon m^2) + 1\Big),\ t \in [t_{i-1}, t_i], \qquad (6.5.73)$$

откуда

$$I_1 \le C\big(\varepsilon + 1/m\big). \tag{6.5.74}$$

Для I_2, I_4, учитывая, что в силу оценок (6.1.7) функция $p(t,\varepsilon)$ на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ длины $h_i = O^*\big(\varepsilon/(i-m)\big)$, имеет изменение порядка $O(1/m)$, получаем

$$I_2 = \frac{p(t,\varepsilon)}{h_{i-1}}\Big(1 + O(1/m)\Big)\int_{t_{i-1}}^{t_i} g_i(t,\varepsilon)dt,$$

$$I_2 = \frac{p(t,\varepsilon)}{h_i}Big(1 + O(1/m)\Big)\int_{t_i}^{t_{i+1}} g_i(t,\varepsilon)dt. \tag{6.5.75}$$

Далее в силу следствия 1 из леммы 4

$$g_i'(t,\varepsilon) \le -C_1/\varepsilon,\ t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{6.5.76}$$

Из (6.5.73), (6.5.76), непрерывности при $t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$ функции $g_i(t,\varepsilon)$ получаем, что

$$\tfrac{1}{h_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i} g_i(t,\varepsilon)dt - \tfrac{1}{h_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g_i(t,\varepsilon)dt > 0,$$

откуда в силу (6.5.75) и неравенства $|g_i(t,\varepsilon)| \le C$, вытекающего из оценок функции Грина $|G^*_\varepsilon(t,\xi)| \le C$ и леммы 4 следует, что

$$I_2 - I_4 \ge O(1/m). \tag{6.5.77}$$

Наконец, из (6.5.76) следует, что

$$-I_3 \ge C > 0. \tag{6.5.78}$$

Из (6.5.72), (6.5.74), (6.5.77), (6.5.78) получаем оценки (6.5.61) для $m+1 \le i \le m + i_0$. Для $i \ge m + i_0$ из (6.5.71) при $j = i$ и леммы 4 имеем

$$|\langle N_{1,i-1}, \mu_i\rangle| \ge 1 - \left|\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} p(t,\varepsilon)N'_{1,i-1}\left[g_i(t,\varepsilon) - G^*_\varepsilon(t,t_i)\right]dt\right| \ge$$

$$\ge 1 - \frac{C}{i_0^2}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} |N'_{1,i-1}(t)|dt \ge 1 - \frac{C_1}{i_0^2},$$

где $_1$ не зависит от i_0. Отсюда при достаточно большом i_0 получаем оценку (6.5.61). Лемма доказана.

Докажем теперь, что построенные функционалы $\mu_i^{m,\varepsilon}$ равномерно ограничены по норме E_ε, т.е. имеют место аналоги неравенств (6.5.57).

Лемма 10 *Для любых $u \in D_\varepsilon$ справедливы оценки*

$$|\langle u, \mu_i\rangle| \le C\|u\|_\varepsilon,\ i = 1, 2, \cdots, 2m-1, \tag{6.5.79}$$

где C не зависит от u, i_0.

Доказательство. Вначале докажем (6.5.77) при $i \le m$. В этом случае в силу (6.5.58) и определения функционалов f_i при $i \le m$ имеем

$$| < u, \mu_i > | = \left|\sum_{j=1}^{i} \alpha_j^i < u, f_j >\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{j=1}^{i} \alpha_j^i \Big[- \varepsilon u'(t_j+0) + \varepsilon u'(t_{j-1}+0)\Big]\right| +$$

$$+ \left|\sum_{j=1}^{i} \alpha_j^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} p(t,\varepsilon) u'(t) dt\right| =$$

$$= \left|\alpha_i^i \varepsilon u'(t_0+0) + \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon u'(t_j+0)(\alpha_{j+1}^i - \alpha_j^i) - \alpha_i^i \varepsilon u'(t_i+0)\right| +$$

$$+ \left|\sum_{j=1}^{i} \alpha_j^i \Big[p(t,\varepsilon)u(t)\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} p'(t,\varepsilon)u(t)dt\Big]\right|. \tag{6.5.80}$$

Далее в силу (6.5.66) для первого модуля в правой части (6.5.80) имеем

$$\left|\alpha_i^i \varepsilon u'(t_0+0) + \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon u'(t_j+0)\big(\alpha_{j+1}^i - \alpha_j^i\big) - \alpha_i^i \varepsilon u'(t_i+0)\right| \le$$

$$\le C\varepsilon \parallel u' \parallel_{Ł_\infty[0,t_m]} \le C \parallel u \parallel_\varepsilon . \tag{6.5.81}$$

Для оценки второго модуля заметим, что, аналогично (6.5.79), с учетом гладкости $p(t,\varepsilon)$ на $[0, t_m]$ (см. (6.1.7))

$$\left|\sum_{j=1}^{i} \alpha_j^i \Big[p(t,\varepsilon)u(t_j) - p(t_{j-1},\varepsilon)u(t_{j-1})\Big]\right| =$$

$$= \left|-\alpha_0^i p(t_0,\varepsilon)u(t_0) + + \sum_{j=1}^{i-1} \big(\alpha_j^i - \alpha_{j+1}^i\big) p(t_j,\varepsilon)u(t_j) + \alpha_i^i p(t_i,\varepsilon)u(t_i)\right| \le$$

$$\le C \parallel u \parallel_{C[0,1]} \le C \parallel u \parallel_\varepsilon . \tag{6.5.82}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{i} \alpha_j^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} p'(t,\varepsilon)u(t)dt\right| \le$$

$$\le C \sum_{j=1}^{i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |u(t)|dt \le C \parallel u \parallel_{C[0,1]} \le C \parallel u \parallel_{\varepsilon} . \qquad (6.5.83)$$

Из (6.5.80)-(6.5.83) вытекают оценки (6.5.79) для $i \le m$.

Для $i \ge m+1$ в силу (6.5.60) имеем

$$| < u, \mu_i > | = \Big| g_i(t_{m+1},\varepsilon)/\alpha_m < u, \mu_m > +$$

$$+ g_i(t_{m+1},\varepsilon) \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(t,\varepsilon)u'(t)dt +$$

$$+ \int_{t_{m+1}}^{1} \varepsilon u'(t) g_i(t)dt + \int_{t_{m+1}}^{1} p(t,\varepsilon)u'(t)g_i(t,\varepsilon)dt\Big| . \qquad (6.5.84)$$

Как уже отмечалось в доказательстве леммы 9, $|g_i(t,\varepsilon)| \le C$, а $\alpha_m \ge C_1 > 0$ в силу (6.5.59) и отделенности $p(t,\varepsilon)$ от нуля. Поэтому в силу уже доказанного для $i \le m$

$$\left|\tfrac{g_i(t_{m+1},\varepsilon)}{\alpha_m} < u, \mu_i >\right| \le C \parallel u \parallel_{\varepsilon} . \qquad (6.5.85)$$

Далее, интегрируя по частям, имеем

$$\left| g_i(t_{m+1},\varepsilon) \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(t,\varepsilon)u'(t)dt \right| \le$$

$$\le C \left| \Big[p(t,\varepsilon)u(t)\Big]_{t_m}^{t_{m+1}} - \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(t,\varepsilon)u'(t)dt \right| \le$$

$$\le C_1 \left(\parallel u \parallel_C + \int_{t_m}^{t_{m+1}} \Big[1 + \tfrac{1}{\varepsilon}\exp\left(p_0 \tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\Big] dt \parallel u \parallel_C \right) \le$$

$$\le C_2 \parallel u \parallel_C \le C_3 \parallel u \parallel_{\varepsilon} . \qquad (6.5.86)$$

Оценим два последних члена в (6.5.84). Добавляя и отнимая тождество (6.5.67) при $w(t) = u$, имеем

$$\left| \int_{t_{m+1}}^{1} \varepsilon u'(t) g_i(t)dt + \int_{t_{m+1}}^{1} p(t,\varepsilon)u'(t)g_i(t,\varepsilon)dt \right| =$$

$$= \Big| u(t_i) - \int_0^{t_{m+1}} \varepsilon u'(t) \tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i)dt -$$

$$- \int_0^{t_{m+1}} p(t,\varepsilon)u'(t)G^*(t,t_i)dt + \int_0^{t_{m+1}} \varepsilon u'(t)\left(g_i'(t,\varepsilon) - \tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i)\right)dt + +$$

$$+\int_0^{t_{m+1}} p(t,\varepsilon)u'(t)\Big(g_i(t,\varepsilon)-G^*(t,t_i)\Big)dt\Big|. \qquad (6.5.87)$$

Оценим последовательно все слагаемые в правой части (6.5.87).

$$\left|\int_0^{t_{m+1}} \varepsilon u'(t)\tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i)dt\right| \le \int_0^{t_m} |\cdots|dt + \int_{t_m}^{t_{m+1}} |\cdots|dt. \qquad (6.5.88)$$

Из оценок функции Грина (5.3.6) из главы 5 следует, что при $i \ge m+1$

$$\varepsilon^{1-j}\int_0^{t_m} \left|\tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i)\right| dt \le C,\ j=1,2;\ \sup_{t\in[t_m,t_{m+1}]} \left|\tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i)\right| \le C/\varepsilon. \qquad (6.5.89)$$

Поэтому

$$\left|\int_0^{t_{m+1}} \varepsilon u'(t)\tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i)dt\right| \le$$

$$\le \varepsilon \parallel u \parallel_{L_\infty[0,t_m]} \int_0^{t_m} \left|\tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i)\right| dt \le C_1 \parallel u \parallel_\varepsilon, \qquad (6.5.90)$$

$$\left|\int_{t_m}^{t_{m+1}} \varepsilon u'(t)\tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i)dt\right| = \left|\Big[\varepsilon u(t)\tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i)\Big]_{t_m}^{t_{m+1}} -\right.$$

$$\left. -\int_{t_m}^{t_{m+1}} \varepsilon u(t)\tfrac{\partial^2 G^*}{\partial t^2}(t,t_i)dt\right| \le C_1 \parallel u \parallel_\varepsilon . \qquad (6.5.91)$$

Далее, с учетом (6.5.87), неравенства $|G^*(t,t_i)| \le C$, оценок (6.1.7) для функции $p(t,\varepsilon)$ имеем

$$\left|\int_0^{t_{m+1}} p(t,\varepsilon)u'(t)G^*(t,t_i)dt\right| =$$

$$= \left|\Big[p(t,\varepsilon)u(t)G^*(t,t_i)\Big]_0^{t_{m+1}} - \int_0^{t_{m+1}} u(t)\tfrac{d}{dt}\Big(p(t,\varepsilon)G^*(t,t_i)\Big)dt\right| \le$$

$$\le C \parallel u \parallel_{C[0,1]} \left|(1+\int_0^{t_{m+1}} \Big[1+\frac{1}{\varepsilon}\Big(\exp(p_0\tfrac{t-1}{\varepsilon})+\exp(p_0\tfrac{t-t_i}{\varepsilon})\Big)\Big]dt)\right| \le$$

$$\le C_1 \parallel u \parallel_{C[0,1]} \le C_1 \parallel u \parallel_\varepsilon . \qquad (6.5.92)$$

Для оценок двух последних интегралов в (6.5.87) заметим, что в силу теоремы Ролля и того, что $g_i(t,\varepsilon)$ линейно интерполирует $G^*(t,t_i)$ на каждом частичном отрезке $[t_j,t_{j+1}]$,

$$g_i'(t,\varepsilon) = \tfrac{\partial G^*}{\partial t}(\xi_j,t_i),\ t\in[t_j,t_{j+1}],\ \xi_j\in[t_j,t_{j+1}], j=m+1,\cdots,2m-1, \qquad (6.5.93)$$

а в силу оценок (5.3.6)(см. гл. 5) функции Грина

$$\left|\tfrac{\partial^2 G^*}{\partial t^2}(t,t_i)\right| \le \frac{C}{\varepsilon^2}\left[\exp\left(p_0\tfrac{|t-t_i|}{\varepsilon}\right)+\exp\left(p_0\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\right]+C_1. \qquad (6.5.94)$$

Из (6.5.93), (6.5.94), теоремы Лагранжа о конечных приращениях, оценок сингулярной экспоненты в узлах сетки Δ имеем

$$\left|g_i'(t,\varepsilon)-\tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i)\right|\le\sup_{s\in[t_j,t_{j+1}]}\left|\tfrac{\partial^2 G^*}{\partial t^2}(s,t_i)\right|h_j\le$$

$$\le\tfrac{C_2}{\varepsilon(j-m)}\left(\exp\left(p_0\frac{|t_j-t_i|}{\varepsilon}\right)+\exp\left(p_0\frac{t_j-1|}{\varepsilon}\right)\right)\le$$

$$\le\frac{C_3}{\varepsilon}\begin{cases}\frac{i-m}{(j-m)^2}, & j\ge i,\\ \frac{j-m}{m^2}-\frac{1}{(i-m)^2}, & i\ge j.\end{cases}\tag{6.5.95}$$

Кроме того, в силу леммы 4

$$\left|g_i(t,\varepsilon)-G^*(t,t_i)\right|\le\begin{cases}\frac{1}{(i-m)^2},\ j\le i,\\ \frac{1}{(j-m)^2},\ j>i,\end{cases}\ t\in[t_j,t_{j+1}],\ j\ge m+1.\tag{6.5.96}$$

Перейдем к оценкам двух последних интегралов в (6.5.87). Интегрируя по частям и используя (6.5.92), (6.5.93), получаем

$$\left|\int_0^{t_{m+1}}\varepsilon u'(t)(g_i'(t,\varepsilon)-\tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i))dt\right|=$$

$$=\Bigg|\left[\sum_{j=m+1}^{2m-1}\varepsilon u(t)(g_i'(t,\varepsilon)-\tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i))\right]_{t_j}^{t_{j+1}}+\int_0^{t_{m+1}}\varepsilon u(t)\tfrac{\partial^2 G^*}{\partial t^2}(t,t_i))dt\Bigg|\le$$

$$\le C\varepsilon\parallel u\parallel_\varepsilon\Big(\sum_{j=m+1}^{2m-1}\Big(\sum_{j=m+1}^{2m-1}\Big|g_i'(t,\varepsilon)-$$

$$-\tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i)\Big|_{t_j}^{t_{j+1}}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_{m+1}}^1\left[\exp\left(p_0\tfrac{|t_j-t_i|}{\varepsilon}\right)+\exp\left(p_0\tfrac{t_j-1|}{\varepsilon}\right)\right]dt)\le C_1\parallel u\parallel_\varepsilon.\tag{6.5.97}$$

$$\left|\int_0^{t_{m+1}}p(t,\varepsilon)u'(t)\big(g_i(t,\varepsilon)-G^*(t,t_i)\big)dt\right|=$$

$$=\Big|\big[p(t,\varepsilon)u(t)(g_i(t,\varepsilon)-G^*(t,t_i))\big]_{t_{m+1}}^1-$$

$$-\int_0^{t_{m+1}}u(t)\tfrac{d}{dt}\Big[p(t,\varepsilon)(g_i(t,\varepsilon)-G^*(t,t_i))\Big]dt\Big|\le$$

$$\le C\parallel u\parallel_\varepsilon\Big(1+\sum_{j=m+1}^{2m-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\Big|g_i'(t,\varepsilon)-\tfrac{\partial G^*}{\partial t}(t,t_i)\Big|dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_{m+1}}^{1}\exp\left(p_0\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)dt\Big) \le C_1 \parallel u \parallel_\varepsilon . \qquad (6.5.98)$$

Тем самым все необходимые оценки проведены, и из (6.5.84)-(6.5.98) вытекают оценки (6.5.79) при $i \ge m+1$. Лемма доказана.

Таким образом, вспомогательные функционалы μ_i полностью изучены.

Замечание 2. В дальнейшем будем считать, что

$$< N_{1,i-1}, \mu_i >= 1.$$

В силу (6.5.61) оценки (6.5.65)-(6.5.65) и (6.5.79) останутся в силе.

Интересующие нас функционалы λ_i будем искать в виде

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{2m-1} \beta_j^i \, \mu_i. \qquad (6.5.99)$$

Из условий биортогональности для отыскания β_j^i получим СЛАУ с правой частью $e_i = \{e_i^j\}$, $e_i^j = \delta_{i,j}$ и матрицей B с элементами $b_{kj} =< N_{1,k-1}, \mu_j >$.

Пусть $\parallel B \parallel_1$ — норма матрицы, согласованная с l_1-нормой вектора. В силу леммы 9 и замечания 2 матрицу B можно представить в виде $B = B_1 + \mathcal{E}$, где

$$\parallel \mathcal{E} \parallel_1 \le C(1/m + \varepsilon m + 1/|\ln(\varepsilon)|),$$

а B_1 — нижнетреугольная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, прочие же элементы $\tilde{b}_{kj}$ таковы, что $\tilde{b}_{kj} = 0$ для $k \ne j \le m$, $|\tilde{b}_{kj}| \le C/(k-m)^2$ для $k > j \ge m+1$. Если мы докажем оценку

$$\parallel B_1^{-1} \parallel \le C, \qquad (6.5.100)$$

то при малых ε, m, εm получим, что матрица B обратима, и $|B^{-1}| \le C_1$. Но тогда для коэффициентов β_j^i будет справедлива оценка $\sum_j |\beta_j^i| \le C_1$, откуда в силу (6.5.79), (6.5.99) получим, что биортогональные функционалы λ_i существуют, и для них справедливы оценки (6.5.57). Этим завершается доказательство квазиоптимальности метода Галеркина для частного случая $q(t,\varepsilon) \equiv 0$. Случай оператора M_ε изучается совершенно аналогично.

Итак, докажем (6.5.100). Для этого представим матрицу B_1 в виде

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix},$$

где B_{11} – $(m \times m)$-матрица, B_{22} – $(i_0 \times i_0)$-матрица. В силу сказанного выше относительно элементов матрицы B_1, матрицы B_{21} и B_{31} — нулевые, B_{11} — единичная матрица, B_{22} — нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали и равномерно по ε и m ограниченными элементами, матрица B_{33} имеет вид $I + \mathcal{E}_3$, где $\|\mathcal{E}_3\|_1 \leq C/i_0$, а $\|B_{32}\|_1 \leq C$. Отсюда следует, что при достаточно большом, но не зависящем от ε и m номере i_0, матрицы B_{ii} имеют равномерно ограниченные по норме $\| \,.\, \|_1$ обратные, и блоки ниже главной диагонали равномерно по ε и m ограничены. Из этого вытекает оценка (6.5.100).

Итак, квазиоптимальность метода Галеркина для операторов частного вида доказана. Для доказательства ее в общем случае установим предварительно еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 11 *Пусть функция* $u_\varepsilon(t)$: $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0$ *удовлетворяет при* $t \in [0,1]$ *оценкам*

$$|u_\varepsilon^{(i)}(t)| \leq C\left(1 + \varepsilon^{-i} \exp\left(p_0 \tfrac{t-1}{\varepsilon}\right)\right),\ i = 0, 1. \tag{6.5.101}$$

Тогда найдется такая функция $v(t)$ *из пробного пространства* $E(\varepsilon, m)$, *что при* $j = 1$

$$\| \, v(t) - u_\varepsilon(t) \, \|_\varepsilon \leq C/m^j. \tag{6.5.102}$$

Если оценки (6.5.59) справедливы и для $i = 2$, *то оценки (6.5.60) справедливы для* $j = 2$.

Доказательство. Выберем в качестве $v(t)$ ломаную, интерполирующую $u_\varepsilon(t)$ в узлах Δ. Оценим разность $v(t) - u_\varepsilon(t)$ на каждом частичном отрезке $[t_k, t_{k+1}]$.

В силу формулы погрешности линейной интерполяции для гладких функций

$$\left|u_\varepsilon^{(i)}(t) - v^{(i)}(t)\right| \leq C h_k^{j-i} \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left|u^{(j)}(t)\right|,\ t \in [t_k, t_{k+1}],\ i = 0, 1. \tag{6.5.103}$$

При $k \leq m - 1$ из формулы [30, (16.3)] получаем, что

$$\left|u_\varepsilon^{(j)}(t)\right| \leq C,\ \ t \in [t_k, t_{k+1}]$$

при $j = 0, 1$ (и $j = 2$ соответственно). Поэтому из (6.5.103) следует, что

$$\max_{t \in [0, t_m]} \left|u_\varepsilon^{(i)}(t) - v^{(i)}(t)\right| \leq \frac{C}{m^{j-i}},\ \ i = 0, 1. \tag{6.5.104}$$

При $k \geq m+1$ из (6.5.99) имеем при $j=1,2$

$$\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]}|u_\varepsilon(t)-v(t)| \leq C\left(\tfrac{\varepsilon}{k-m}\right)^j\left(1+\tfrac{(k-m)^2}{\varepsilon m^2}\right)=$$

$$=C\left[\left(\frac{\varepsilon}{k-m}\right)^j+\frac{\varepsilon^{j-1}}{(k-m)^{j-2}m^2}\right]\leq C/m^j,\ k\geq m+1. \tag{6.5.105}$$

Наконец, изучим разность $u_\varepsilon(t)-v(t)$ на $[t_m,t_{m+1}]$. Из (42.46) и [30, (16.3)] следует, что

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}}|u'_\varepsilon(t)|dt \leq C\left(h_m+\tfrac{1}{m^2}\right)\leq \tfrac{C}{m^2}.$$

Значит, в силу формулы Ньютона-Лейбница изменение $u_\varepsilon(t)$ на $[t_m,t_{m+1}]$ не превосходит $O(1/m)$, откуда получаем, что

$$\max_{t\in[t_m,t_{m+1}]}|u_\varepsilon(t)-v(t)|\leq\frac{C}{m}.$$

Для получения оценки второго порядка введем в рассмотрение полином Тейлора $\tilde v(t)$ первой степени для функции $u_\varepsilon(t)$ с центром разложения в точке $t=t_m$. Из (6.5.101) при $i=2$ и формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме получаем, что

$$|\tilde v(t_{m+1})-v(t_{m+1})|=|\tilde v(t_{m+1})-u_\varepsilon(t_{m+1})|\leq C/\varepsilon.$$

Но тогда, поскольку $\tilde v$ и v линейные на $[t_m,t_{m+1}]$ функции, и $\tilde v(t_m)=v(t_m)$, то $\parallel \tilde v(t)-v(t)\parallel_{C[t_m,t_{m+1}]}\leq C_1/m^2$, откуда

$$\parallel v(t)-u_\varepsilon(t)\parallel_{C[t_m,t_{m+1}]}\leq C/m^2. \tag{6.5.106}$$

Из (6.5.103)-(6.5.107) вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Установим квазиоптимальность в общем случае. Для этого представим оператор L_ε в виде

$$L_\varepsilon = L_{\varepsilon,0}+L_{\varepsilon,1},$$

где $L_{\varepsilon,1}u=q(t,\varepsilon)u$, и проверим выполнение условий лемм 7, 8. Отметим сразу же, что оценки (6.4.51) вытекают из оценок функции Грина (5.3.6) из главы 5 и замечания 1. По этой же причине выполнено условие 1 леммы 7. Равенства (6.4.48), (6.4.49) непосредственно следуют из определения ψ_{L_ε}. Квазиоптимальность для оператора $L_{\varepsilon,0}$ была установлена выше.

Осталось доказать, что для любой функции $u \in E_\varepsilon$ такой, что $\| u \|_\varepsilon \leq 1$, найдется такая функция $v \in E(\varepsilon, m)$, что

$$\| v - Gu \|_\varepsilon \leq C\gamma(\varepsilon, m), \tag{6.5.107}$$

где $Gu = \int_0^1 \tilde{G}(t,\xi)(\xi,\varepsilon)u(\xi)d\xi$, $\tilde{G}(t,\xi)$ — функция Грина оператора $L_{\varepsilon,0}$; $\gamma(\varepsilon, m) \to 0$ при $\varepsilon \to 0, m \to \infty$.

Положим $u_\varepsilon = Gu$. Тогда из оценок (5.3.6) (см. гл. 5) функции Грина следует, что для функции u_ε справедливы неравенства (6.5.101). Поэтому в силу (6.5.102) неравенство (**??**) выполняется с $\gamma(\varepsilon, m) = 1/m$. Тем самым квазиоптимальность метода Галеркина доказана для оператора L_ε. Доказательство для оператора M_ε совершенно аналогично.

Из квазиоптимальности метода Галеркина вытекает утвержление теоремы 1 и оценки (6.1.16). Если $q(t,\varepsilon)$, $p(t,\varepsilon)$, $f(t)$ ограничены равномерно по ε вместе с производными, то, в силу леммы 1 точные решения уравнений (6.1.3), (6.1.4) удовлетворяют оценкам вида (6.5.101) для $i = 0, 1, 2$. Поэтому в силу леммы 11 найдется $v(t) \in E(\varepsilon, m)$, для которой будут справедливы оценки (6.5.100) при $j = 2$. Поэтому оценки (6.1.18) будут вытекать из (6.1.16). Тем самым теорема 1 доказана полностью.

6.6 Доказательство теоремы 2

Для доказательства этой теоремы используем ньютоновскую линеаризацию нелинейной задачи. При этом для получающихся линеаризованных задач будет справедлива теорема 1. Опираясь на этот факт, и используя стандартную технику [42], применяемую при исследовании метода Ньютона-Канторовича, докажем теорему 2.

Итак, линеаризуем уравнение (6.1.5) по Ньютону-Канторовичу на точном решении w_ε задачи (6.1.5), (6.1.6) и, выделяя главную линейную часть, запишем его в виде

$$M_\varepsilon w \equiv -\varepsilon w'' + \big(p(t, w_\varepsilon)w\big)' + \left[\frac{\partial q}{\partial w}(t, w_\varepsilon) - \frac{\partial p}{\partial t}(t, w_\varepsilon)\right] w =$$

$$= \big(p(t, w_\varepsilon), w\big)' - \big(p(t, w), w\big)' + \left[\frac{\partial q}{\partial w}(t, w_\varepsilon) - \frac{\partial p}{\partial t}(t, w_\varepsilon)\right] w - q(t, w). \tag{6.6.108}$$

Обозначим через $H(t,\xi)$ функцию Грина оператора M_ε с краевыми условиями (6.1.6) и сведем (6.6.108) к эквивалентному интегральному уравнению.

Предварительно введем обозначение

$$a(t,w)=\int_0^w p(t,\phi)\,d\phi.$$

Применим к обеим частям (6.6.108) интегральный оператор с ядром $H(t,\xi)$ и интегрируя по частям, получим, что задача (6.6.108), (6.1.6) эквивалентна интегральному уравнению

$$w(t)=\int_0^1 \tfrac{\partial H}{\partial t}(t,\xi)\big[p(\xi,w_\varepsilon(\xi))w(\xi)-a(\xi,w(\xi))\big]d\xi+$$

$$+\int_0^1 H(t,\xi)\Big[\Big(\tfrac{\partial a}{\partial w}\big(\xi,w_\varepsilon(\xi)\big)-$$

$$-\tfrac{\partial p}{\partial \xi}\big(\xi,w_\varepsilon(\xi)\big)\Big)w(\xi)-q\big(\xi,w(\xi)\big)+\tfrac{\partial a}{\partial \xi}\big(\xi,w(\xi)\big)\Big]d\xi\equiv T_\varepsilon w(t).$$

Поскольку оператор M_ε — оператор вида (6.1.4) и удовлетворяет всем условиям теоремы 1, а значит для него метод Галеркина квазиоптимален. Обозначим через $P=P(\varepsilon,m)$ соответствующий галеркинский проектор. Тогда галеркинская задача (6.1.14) будет эквивалентна операторному уравнению

$$w_m=PT_\varepsilon w_m. \tag{6.6.109}$$

Действительно, обозначая правую часть (6.6.108) через $f = f(t,w_\varepsilon,w)$, по определению P при фиксированном w имеем

$$w_m=PM_\varepsilon^{-1}f=PH(f(t,w_\varepsilon,w))=PT_\varepsilon W.$$

Но из постановки задачи (6.1.19)-(6.1.21) следует, что $w = w_m$, т.к. если преобразовать задачу (6.1.19)-(6.1.21) к виду (6.6.108), то и в левой, и в правой части будет стоять одна и та же функция w_m (в правой части w_m будет входить в выражение для f).

Легко видеть, что оператор $T_\varepsilon:\ E_\varepsilon\to E_\varepsilon$ дифференцируем по Фреше, причем непосредственная проверка показывает, что $T'_\varepsilon(w_\varepsilon)$ — нулевой оператор (т.к. переходя от (6.1.5) к (6.6.108), мы фактически добавили и отняли главную линейную часть оператора в окрестности $w_\varepsilon(t)$). Кроме того, в силу замечания 1, оценок вида (5.3.6) (см. гл. 5) для $H(t,\xi)$ и гладкости $p(t,u)$, $q(t,u)$, в некотором шаре пространства E_ε положительного радиуса $\delta>0$, не зависящего от ε, с центром в u_ε будет справедливо неравенство

$$\| T'_\varepsilon(u_1)-T'_\varepsilon(u_2)\|_{E_\varepsilon\to E_\varepsilon}\le C_1\,\|u_1-u_2\|_\varepsilon\ . \tag{6.6.110}$$

Сделаем в уравнении (6.6.109) замену $v = u - u_\varepsilon$. Тогда, учитывая, что $T_\varepsilon u_\varepsilon = u_\varepsilon$ и $T'(u_\varepsilon) = 0$, (6.6.109) можно переписать в виде

$$v = (Pu_\varepsilon - u_\varepsilon) + PR_\varepsilon(v), \tag{6.6.111}$$

причем в силу формулы конечных приращений [15, с. 483] [54,с. 483] и (6.6.110)

$$\| PR(v) \|_\varepsilon \leq C_2 \| v \|_\varepsilon^2,\ C_2 = C_2(C_1). \tag{6.6.112}$$

Из (6.6.112) и квазиоптимальности метода Галеркина для M_ε вытекает, что найдется такое $\delta_0 > 0$, зависящее лишь от C_1 и C_2, что оператор PR_ε будет сжимающим в шаре E_ε с центром в нуле. Поскольку в силу квазиоптитмальности, леммы 11 и оценок (6.1.8)

$$\| Pu_\varepsilon - u_\varepsilon \|_\varepsilon \leq C/m^2,$$

то при малых $1/m$ оператор $Q_\varepsilon(v) = (Pu_\varepsilon - u_\varepsilon) + PR_\varepsilon(v)$ будет сжимающим в шаре E_ε радиуса $\delta_0/2$ с центром в $Pu_\varepsilon - u_\varepsilon$. Значит, уравнение (6.6.111) будет иметь в этом шаре единственное решение. Применяя метод последовательных приближений, получаем, что решение (6.6.111) удовлетворяет оценке

$$\| v \|_\varepsilon \leq C \| PU_\varepsilon - u_\varepsilon \|_\varepsilon \leq C/m^2.$$

Возвращаясь к уравнению (6.6.109) и галеркинской задаче (**??**), получаем утверждение теоремы 2. Теорема 2 доказана.

Глава 7

СХОДИМОСТЬ МЕТОДОВ АДАПТАЦИИ СЕТОК В ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В данной главе рассматриваются вопросы сходимости алгоритмов адаптации сеток в методе конечных элементов Галёркина, причем в первой и второй частях раздела берутся сетки, построенные по известной методике Г.И. Шишкина [70], для сингулярно возмущенной краевой задачи с симметричным и несимметричным оператором, а в третьей части рассматриваются задачи, в которых используются сетки Н.С. Бахвалова.

7.1 Алгоритм адаптации сеток Г.И. Шишкина для сингулярно-возмущенной краевой задачи с симметричным оператором

7.1.1 Постановка задачи

Пусть $\Delta\colon -1 = t_{-p} < t_{-p+1} < \ldots < t_{p-1} < t_p = 1$ — некоторое разбиение отрезка $[-1,1]$. Через $N_{1,i}(t)$ будем обозначать нормированные на единицу в $C[-1,1]$ сплайны первой степени на разбиении Δ с носителем на интервале (t_i, t_{i+2}), а через $S(\Delta,1,1)$ — пространство линейных сплайнов дефекта 1 на сетке Δ.

На отрезке $[-1,1]$ рассмотрим краевую задачу для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка

$$Lx \equiv -\varepsilon^2\ddot{x} + c(t)x = f(t), \tag{7.1.1}$$

$$x(-1) = x(1) = 0. \tag{7.1.2}$$

Здесь функции $c(t)$ и $f(t)$ принадлежат классу $C^1[-1,1]$, причем $c(t) \ge c_0 > 0, \quad t \in [-1,1]$, ε - параметр, принимающий произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. При стремлении параметра ε к нулю в окрестности точек 1 и -1 возникают пограничные слои. Справедливо [43] асимптотическое разложение решения

$$x(t) = \frac{f(t)}{c(t)} - C_1 e^{-\sqrt{c(-1)}\frac{t+1}{\varepsilon}} - C_2 e^{\sqrt{c(1)}\frac{t-1}{\varepsilon}} + O\Big(\varepsilon\Big).$$

Зафиксируем некоторое натуральное m. Пусть $C > 0$ некоторая константа.

Определение 1. Будем говорить, что $a(\varepsilon, C)$ есть $m-$граница пограничного слоя, если справедлива оценка

$$\max\left(\max_{t\in[-a,a]} e^{\sqrt{c(1)}\frac{t-1}{\varepsilon}}, \max_{t\in[-a,a]} e^{-\sqrt{c(-1)}\frac{t+1}{\varepsilon}}\right) \le \frac{C}{m^2}.$$

Определение 2. Число $\tilde{a} = \tilde{a}(\varepsilon, m) = \sup a(\varepsilon, C)$ будем называть точной $m-$границей погранслоя.

Мы будем предполагать, что нам известно расположение погранслоев, но неизвестна их точная $m-$граница. Поэтому будем рассматривать адаптационные алгоритмы, позволяющие определить эту границу.

Замечание. Последнее определение аналогично определению ширины пограничного слоя, введенному Г.И. Шишкина в [71] с пороговым значением $\delta = m^{-2}$.

7.1.2 Формулировки основных результатов

Численный метод решения задачи

Для данного $m \in N$ определим на отрезке $[-1, 1]$ кусочно-равномерную сетку узлов Δ, которая представляет собой комбинацию двух равномерных сеток: густой сетки в области погранслоев и редкой сетки вне погранслоев, в соответствии с известной методикой Шишкина [70]. Пусть $p_0 > 0$, $a = 1 - \frac{2}{p_0}\varepsilon \ln m$,

$$t_i = \begin{cases} a\frac{i}{m}, & i = 0, 1, \dots, m \\ a + (1-a)\frac{i-m}{k^*-m}, & i = m+1, m+2, \dots, k^*, \quad t_{-i} = -t_i,\ i = 1, \dots, k^*, \end{cases} \tag{7.1.3}$$

где $k^* = m + \left[\frac{2}{p_0} m |\ln m|\right] + 1$.
Построенное разбиение будем называть сеткой Шишкина с параметром p_0. Заметим, что если в качестве значения этого параметра взято число $p_0 = c_0$ определенное в предыдущем разделе, что узлы сетки $t_{-m} = -a$ и $t_m = a$ являются точными границами пограничного слоя в окрестности точек -1 и 1, соответственно.

Введем пространство

$$E = \{x_m = x_m(t) \in S(\Delta, 1, 1),\, x_m(-1) = x_m(1) = 0\},$$

где $S(\Delta, 1, 1)$ - пространство линейных сплайнов дефекта 1 на сетке Шишкина Δ, определяемой равенством (7.1.3). Размерность пространства E равна $2k^* - 1$.

Для нахождения приближенного решения задачи (7.1.1) - (7.1.2) будем использовать метод конечных элементов Галеркина, суть которого состоит в отыскании $x_m(t) \in E$, такой, что для любой функции $y(t) \in E$ имеет место

$$F_\varepsilon(x_m, y) \equiv \varepsilon(x_m', y') + (x_m, c(t)\, y) = (f, y), \tag{7.1.4}$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2[-1, 1]$.

Теорема 1 *Найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0$, $m_0 \in N$, $C > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $m > m_0 : \varepsilon m \le 1$ существует единственное решение $x_m(t)$ задачи (7.1.4), причем для решения $x_m(t)$ справедлива оценка:*

$$\|x_m(t) - x(t)\| \le \frac{C}{m^2}.$$

Алгоритм адаптации сеток в случае неизвестной границы погранслоя

Расположение точки $a = 1 - \frac{2}{p_0}\varepsilon \ln m$, $p_0 = c_0$ - точки перехода между крупной и мелкой сеткой разбиения, зависит от константы c_0 из уравнения (7.1.1). Будем предполагать, что эта константа нам неизвестна, и построим последовательность сеток, согласно следующему алгоритму:

I. Задается некоторое значение $p^0 \geq p_0 = c_0$ и для него строится соответствующая сетка Шишкина по правилу (7.1.3), где $a = a_0 = 1 - \frac{2}{p^0}\varepsilon \ln m$. В результате решения задачи (7.1.4) на сетке (7.1.3) получается приближенное решение $x_{m,p^0}(t)$. Полагаем $k = 0$.

II. Задается следующее значение $p^{k+1} = p^k - \tau_k$, где τ_k выбирается так, чтобы $\Big|a_k - a_{k+1}\Big| = \varepsilon \ln\ln m$. Здесь $a_k = t_{m,p^k}(t)$, $a_{k+1} = t_{m,p_{k+1}}$ - границы между густым и редким разбиениями сетки Шишкина (7.1.3) соответственно при $p = p^k$ и $p = p^{k+1}$. В результате решения задачи (7.1.4) при $p = p^{k+1}$ получается приближенное решение $x_{m,p^{k+1}}(t)$.

III. Ищем величину $\bar{\mu}_k = \|x_{m,p^{k+1}}(t) - x_{m,p^k}(t)\|_{C[a_{k+1},a_k]}$.

IV. Если $k = 0$, тогда $k := k + 1$ и происходит переход к пункту II, иначе - переход к пункту V.

V. Если $\bar{\mu}_k > \frac{\ln m}{m^2}$, тогда $k := k+1$ и происходит переход к пункту II, иначе - конец алгоритма.

Теорема 2 *Найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0$, $m_0 \in N$, $\gamma > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $m \geq m_0 : \varepsilon \mid \ln m \mid \leq \frac{\gamma}{m}$ алгоритм (I) - (V) параграфа 7.1.2 закончит работу при $k < C_2 \ln m / \ln\ln m$, причем для решения $x_m^{(k)}$ на сетке, определяемой параметром p^k, будет справедлива оценка:*

$$\|x_m^{(k)} - x\| \leq \frac{C_1}{m^2}.$$

7.1.3 Галёркинский проектор

Определение 3 Оператор $P\colon E \to E$ называется *галеркинским проектором*, если $Px = x_m$, где x - точное решение задачи (7.1.1) - (7.1.2), x_m — решение задачи (7.1.4).

Как было показано в [30], галеркинский проектор P может быть представлен в виде

$$Px = \sum_{j=-k^*+1}^{k^*-1} F(\lambda_j, x) N_{1,j-1}(t), \tag{7.1.5}$$

где $F_\varepsilon(\lambda_j, x) = \varepsilon^2(\lambda_j', x') + (\lambda_j, c(t)x)$; $\{N_{1,i}(t)\}$, $i = \overline{-k^*, k^*-2}$ — совокупность нормированных на единицу в $C[-1,1]$ сплайнов из пространства E с носителем (t_i, t_{i+2}); $\{\lambda_j(t)\}$, $j = -k^*+1, \ldots, k^*-1$ — совокупность функций из $S(\Delta, 1, 1)$, образующих биортогональный к $\{N_{1,i}(t)\}$ базис в смысле формы F_ε, т. е.

$$F_\varepsilon(N_{1,i}, \lambda_j) = \delta_{i,j-1}. \tag{7.1.6}$$

Будем говорить, что галеркинский проектор обладает свойством квазиоптимальности на E, если найдется такая не зависящая от m и ε константа $C > 0$, что

$$\| P \|_{C_{[-1,1]} \to C_{[-1,1]}} \leq C. \tag{7.1.7}$$

Для оценки погрешности приближенного решения и обоснования сходимости алгоритма адаптации принципиальной является оценка (7.1.7).

Целью работы является доказательство квазиоптимальности галеркинской проекции приближенного решения $x_m(t)$ задачи (7.1.4), т. е. оценки (7.1.7), и теоремы о сходимости алгоритма адаптации.

Основной конструкцией при доказательстве (7.1.7) служит биортогональный базис $\{\lambda_i(t)\}$. Представление галеркинского проектора (7.1.5) через базис из B-сплайнов и биортогональный к нему в $L_2[-1,1]$ базис позволит доказать равномерную по ε и m ограниченность норм галеркинских проекторов и тем самым основной результат.

В дальнейшем нам удобно рассматривать $\lambda_i(t)$ как элементы сопряженного к пространства E^*, понимая $< u, \lambda_i > = F_\varepsilon(u, \lambda_i)$. Поэтому функции $\lambda_i(t) \in E$ будем называть функционалами над E.

Для построения биортогональных функционалов $\lambda_i(t)$ сначала построим вспомогательные локальные функционалы $\mu_i^1(t)$ на $[-a, a]$ и $\mu_i^2(t)$ в погранслоях.

7.1.4 Построение биортогональных функционалов

Построение локальных функционалов на отрезке [-a,a]

Будем искать локальный функционал $\mu_i^1(t) \in S(\Delta, 1, 1)$, $t \in [-a, a]$, $-m \le i \le m$, такой, что

$$F_\varepsilon(N_{1,j}, \mu_i^1) = \delta_{i-1,j}, \qquad -m-1 \le j \le m-1, \tag{7.1.8}$$

где $F_\varepsilon(N_{1,j}, \mu_i^1) = \varepsilon^2(N_{1,j}', \mu_i^{1\prime}) + (N_{1,j}, c(t)\mu_i^1)$, в виде

$$\mu_i^1(t) = \sum_{k=-m-1}^{m-1} \gamma_k N_{1,k}(t).$$

Здесь $\{\gamma_k\}$, $k = -m-1, \ldots, m-1$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, интегралы при вычислении $F_\varepsilon(u, v)$ берутся по $[t_{-m}, t_m]$.

Из условия биортогональности в смысле формы F_ε (7.1.8) имеем:

$$\sum_{k=-m-1}^{m-1} \gamma_k \, F_\varepsilon(N_{1,j}, N_{1,k}) = \delta_{i-1,j}, \quad -m-1 \le j \le m-1. \tag{7.1.9}$$

(7.1.9) есть СЛАУ относительно $\gamma_{-m-1}, \gamma_{-m}, \ldots, \gamma_{m-1}$. Матрица этой системы представляет собой матрицу Грама $A = \{a_{s\,l}\}_{s,l=-m-1}^{m-1}$ относительно скалярного произведения $[u, v] = F_\varepsilon(u, v)$. Тогда (7.1.9) можно записать в векторно-матричной форме

$$A\gamma = b,$$

где $\gamma = (\gamma_{-m-1},\, \gamma_{-m}, \ldots, \gamma_{m-1})^t$, $b = (b_{-m-1},\, b_{-m}, \ldots, b_{m-1})^t$, $A = \{a_{sl}\}_{s,l=-m-1}^{m-1}$.

Очевидно, что матрица A трехдиагональна, т.е. $a_{s\,l} = 0$ при $|s-l| > 1$, а вектор b имеет только одну, отличную от нуля, компоненту $b_{i-1} = 1$.

Лемма 1 *Найдется такая константа $C_1 > 0$, не зависящая от i, m, что при $\varepsilon m \le 1$ матрица A обратима, и справедливы оценки*

$$\| A^{-1} \|_2 \le C_1 m. \tag{7.1.10}$$

Доказательство этой и последующих леммы будут даны в главе Вспомогательные результаты.

Замечание. Нормировкой базисных функций на единицу в $L_2[-1, 1]$ мы можем заменить оценку (7.1.10) на оценку

$$\| A^{-1} \|_2 \le C_2. \tag{7.1.11}$$

Лемма 2 *Для нормированных на единицу в* $L_2[-1,1]$ *функций* $\tilde{N}_{1,i}(t)$ *справедливы оценки:*

$$|F(\tilde{N}_{1,\,i}, \tilde{N}_{1,\,j})| \le C_3. \tag{7.1.12}$$

Теорема 3 (Демко, [5]) *Для любой константы* $C_4 > 0$ *найдутся такие константы* $C_5 > 0$, $q \in (0,1)$, *что если трехдиагональная матрица* A *такова, что* $\max\Big\{\| A \|_2, \| A^{-1} \|_2\Big\} \le C_4$, *тогда элементы матрицы* $A^{-1} = \{a^{rev}_{s,l}\}_{s,l=-m-1}^{m-1}$ *удовлетворяют оценкам*

$$|a^{rev}_{s,l}| \le C_5 q^{|s-l|}, \qquad s,\, l = \overline{-m-1, m-1}.$$

Из формул (7.1.11), (7.1.12) и теоремы Демко получаем:

$$|a^{rev}_{s,l}| \le C_5 m q^{|s-l|}, \qquad s, l = \overline{-m-1, m-1}. \tag{7.1.13}$$

Используя оценки (7.1.13) для системы (7.1.9), имеем:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{-m-1} \\ \gamma_{-m} \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} \end{pmatrix} = A^{-1}b = \begin{pmatrix} a^{rev}_{-m-1,i-1} \\ a^{rev}_{-m,i-1} \\ \vdots \\ a^{rev}_{m-1,i-1} \end{pmatrix} \Longrightarrow |\gamma_k| = |a^{rev}_{k,i-1}| \le C_6 m q^{|k-i+1|},\ k = \overline{-m-1, m-1}.$$

Итак, доказана оценка

$$|\gamma_k| \le C_6 m\, q^{|k-i+1|}, \quad k = \overline{-m-1, m-1}. \tag{7.1.14}$$

Из (7.1.14) вытекает оценка локального функционала $\mu_i^1(t)$ при $t \in [t_s, t_{s+1}]$:

$$|\mu_i^1(t)| = |\gamma_{s-1} N_{1,s-1}(t) + \gamma_s N_{1,s}(t)| \le C_7 m q^{|s-i|}. \tag{7.1.15}$$

И, в частности, справедливо $\mu_m^1(a) = O(m), \quad \mu_m^1(-a) = O(mq^{2m})$.
Оценки (7.1.15) позволяют доказать следующую лемму

Лемма 3 *Найдется такая константа* $C > 0$, *не зависящая от* i, m, *что справедливы оценки*

$$\int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_i^1(t)|\, dt \le C, \quad -m \le i \le m.$$

Построение локальных функционалов в пограничных слоях

Для определенности рассмотрим построение локального биортогонального функционала в правом погранслое на отрезке $[a,1]$ (на отрезке $[-1,-a]$ построение проводится аналогично). Обозначим через $G_\varepsilon(t,\xi)$ функцию Грина задачи (7.1.1)-(7.1.2).
Пусть

$$G_\varepsilon(t,t_i) = \begin{cases} g^1_{\varepsilon,i}(t), & t\in[a,t_i] \\ g^2_{\varepsilon,i}(t), & t\in[t_i,1] \end{cases},\ i=\overline{m+1,k^*-1} \tag{7.1.16}$$

функция Грина краевой задачи для уравнения (7.1.1) на отрезке $[a,1]$ с условиями

$$x_m(a)=x_m(1)=0.$$

Определим функционал

$$\nu_i(t) = \begin{cases} \tilde g^1_i(t), & t\in[a,t_i] \\ \tilde g^2_i(t), & t\in[t_i,1] \end{cases}$$

как кусочно-линейный интерполянт функции Грина (7.1.16) при $i=\overline{m+1,k^*-1}$, где $\tilde g^1_i(t)$ и $\tilde g^2_i(t)$ - кусочно-линейные интерполянты функций $g^1_{\varepsilon,i}(t)$ и $g^2_{\varepsilon,i}(t)$. В случае $i=m$ соответствующий функционал $\nu_m(t)$ определим как кусочно-линейный интерполянт $\tilde g^2_m$, удовлетворяющего условию $\tilde g^2_m(1)=0$. Заметим, что из оценок функции Грина вытекает, что

$$|\nu_m(t)| = O^*\Big(\varepsilon^{-1}e^{-\frac{t-t_m}{\varepsilon}}\Big),\quad |\nu_i(t)| = O^*\Big(\varepsilon^{-1}e^{-\frac{|t-t_i|}{\varepsilon}}\Big),\ i=\overline{m+1,k^*-1}. \tag{7.1.17}$$

В случае $m+1\le i\le k^*-1$ будем искать локальный функционал $\mu^2_i(t)$ в виде

$$\mu^2_i(t) = \sum_{k=m+1}^{k^*-1}\alpha_{k,i}\nu_k(t),\quad t\in[a,1],$$

причем $\mu^2_i(a)=\mu^2_i(1)=0$ и коэффициенты $\{\alpha_{k,i}\},\quad k=m+1,\cdots,k^*-1$ определяются из выполнения условий биортогональности в смысле формы F_ε

$$F_\varepsilon\Big(N_{1,j},\,\mu^2_i(t)\Big)=\delta_{i-1,j}. \tag{7.1.18}$$

Интегралы при вычислении $F_\varepsilon(u,v)$ берутся по $[t_m,1]$. Совокупность равенств (7.1.18) представляет собой СЛАУ порядка (k^*-m-2) относительно неизвестных $\{\alpha_{k,i}\},\quad k=m+1,\cdots,k^*-1$:

$$\sum_{k=m+1}^{k^*-1}\alpha_k F_\varepsilon(N_{1,j},\nu_k(t))=\delta_{i-1,j},\quad m\le j\le k^*-2,\quad m+1\le i\le k^*-1. \tag{7.1.19}$$

Из оценки $t_{i+1} - t_i = O^*\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)$ и оценок кусочно-линейной интерполяции можно получить

$$\left|F_\varepsilon(N_{1,j}, \nu_k(t))\right| = \begin{cases} O\left(\frac{1}{m^3}\right), & j < k-1, \\ 1 + O\left(\frac{1}{m^3}\right), & j = k-1, \\ O\left(\frac{1}{m^3}\right), & j > k-1. \end{cases}$$

Тогда СЛАУ (7.1.19) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1+O\left(\frac{1}{m^3}\right) & O\left(\frac{1}{m^3}\right) & \cdots & O\left(\frac{1}{m^3}\right) \\ O\left(\frac{1}{m^3}\right) & 1+O\left(\frac{1}{m^3}\right) & \cdots & O\left(\frac{1}{m^3}\right) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ O\left(\frac{1}{m^3}\right) & O\left(\frac{1}{m^3}\right) & \cdots & 1+O\left(\frac{1}{m^3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{m+1,i} \\ \alpha_{m+2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{k^*-1,i} \end{pmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i-1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{7.1.20}$$

Таким образом, чтобы определить все функционалы $\mu_i^2(t), \quad m+1 \leq i \leq k^*-1$ необходимо решить k^*-m-2 систем вида (7.1.20). Введем обозначения

$$\begin{pmatrix} \alpha_{m+1,i} \\ \alpha_{m+2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{k^*-1,i} \end{pmatrix} = \alpha_i \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_i$$

$$\begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{m^3}\right) & O\left(\frac{1}{m^3}\right) & \cdots & O\left(\frac{1}{m^3}\right) \\ O\left(\frac{1}{m^3}\right) & O\left(\frac{1}{m^3}\right) & \cdots & O\left(\frac{1}{m^3}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O\left(\frac{1}{m^3}\right) & O\left(\frac{1}{m^3}\right) & \cdots & O\left(\frac{1}{m^3}\right) \end{pmatrix} = E_i \qquad b_i = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i-1. \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

и систему (7.1.20) для определения функционала $\mu_i^2(t)$ перепишем в векторно-матричном виде $(I_i + E_i)\alpha_i = b_i, \quad i = \overline{m+1, k^*-1}$, где $\| \; E_i \; \|_\infty \leq \frac{C}{m^3}$. Оценим элементы вектора $\alpha_i = \{\alpha_{k,i}\}$, $k = \overline{m+1, k^*-1}$.

$$\alpha_i = (I_i + E_i)^{-1} b_i = \left(I_i + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j E_i^j \right) b_i.$$

Так как $\left\| \sum\limits_{j=1}^{\infty} E_i^j \right\| \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \| E_i \|^j \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(\frac{C}{m^3} \right)^j = \frac{\frac{C}{m^3}}{1-\frac{C}{m^3}} = O\left(\frac{1}{m^3} \right)$, получаем, что

$$\alpha_{k,i} = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{1}{m^3} \right), & k = i \\ O\left(\frac{1}{m^3} \right), & k \neq i \end{cases} \tag{7.1.21}$$

Итак, локальные биортогональные функционалы в правом погранслое имеют вид

$$\mu_i^2(t) = \sum_{k=m+1}^{k^*-1} \alpha_k \nu_k(t) = \left(1 + O\left(\frac{1}{m^3} \right) \right) \nu_i(t) + \sum_{k=m+1,\, k \neq i}^{k^*-1} \alpha_{k,i} \nu_k(t), \tag{7.1.22}$$
$$m+1 \leq i \leq k^*-1, \quad t \in [a, 1],$$

где $\alpha_{k,i}$ удовлетворяют оценкам (7.1.21). В случае $i = m$ определим локальный функционал следующим образом

$$\mu_m^2(t) = \sum_{k=m}^{k^*-1} \alpha_{k,m} \nu_k(t), \quad t \in [t_m, 1].$$

Для определенного таким образом функционала также справедлива оценка

$$\mu_m^2(t) = \sum_{k=m}^{k^*-1} \alpha_{k,m} \nu_k(t) = \left(1 + O\left(\frac{1}{m^3} \right) \right) \nu_m(t) + \sum_{k=m+1}^{k^*-1} \alpha_{k,i} \nu_k(t), \qquad t \in [a, 1],$$

Тогда с учетом условия (7.1.17) имеем

$$\mu_m^2(a) = O\left(\varepsilon^{-1} \right). \tag{7.1.23}$$

Лемма 4 *Найдется такая константа* $C > 0$*, не зависящая от* i, m*, что справедливы оценки*

$$\int_{t_m}^{1} |\mu_i^2(t)|\, dt \leq C, \quad m \leq i \leq k^*-1.$$

Продолжение локальных функционалов на [-1,1]

Определим для каждого локального функционала $\mu_i^2(t),\, i = \overline{-k^*+1, -m}$, $\mu_i^2(t), \overline{m, k^*-1}$ и $\mu_i^1(t),\, i = \overline{-m, m}$ функционал $\mu_i(t),\, i = -k^*+1, \ldots, k^*-1$ как его продолжение по непрерывности на [-1,1]. Положим

$$\mu_i(t) = \begin{cases} \alpha_{-m}^i\, \mu_{-m}^2(t), & t \in [-1, -a], \\ \mu_i^1(t), & t \in [-a, a], \\ \alpha_m^i\, \mu_m^2(t), & t \in [a, 1], \quad i = -m+1, \ldots, m-1, \end{cases}$$

для локальных функционалов из погранслоев

$$\mu_i(t) = \begin{cases} 0, & t \ \in [-1, a], \\ \mu_i^2(t), & t \ \in [a, 1], \quad i = m+1, \ldots, k^*-1, \end{cases}$$

$$\mu_i(t) = \begin{cases} \mu_i^2(t), & t \ \in [-1, -a], \\ 0, & t \ \in [-a, 1], \quad i = -k^*+1, \ldots, -m-1. \end{cases}$$

Коэффициенты $\alpha_{\pm m}^i$ обеспечивают непрерывность функций $\mu_i(t)$ в точках $t = \pm a$. Нетрудно видеть, что из оценок (7.1.15), (7.1.23) вытекает, что

$$\alpha_m^i = O(\varepsilon\, m\, q^{m-i}), \qquad \alpha_{-m}^i = O(\varepsilon\, m\, q^{m+i}) \tag{7.1.24}$$

В случае $i = \pm m$ сначала определим два вспомогательных функционала

$$\bar\mu_m(t) = \begin{cases} \alpha_{-m}\, \mu_{-m}^2(t), & t \in [-1, -a], \\ \mu_m^1(t), & t \in [-a, a], \\ \alpha_m\, \mu_m^2(t), & t \in [a, 1], \end{cases} \tag{7.1.25}$$

$$\bar\mu_{-m}(t) = \begin{cases} \beta_{-m}\, \mu_{-m}^2(t), & t \in [-1, -a], \\ \mu_{-m}^1(t), & t \in [-a, a], \\ \beta_m\, \mu_m^2(t), & t \in [a, 1], \end{cases} \tag{7.1.26}$$

Множители $\alpha_{\pm m}$ и $\beta_{\pm m}$ выбираем так, чтобы функции (7.1.25), (7.1.26) были непрерывными при $t = \pm a$. Рассмотрим построение функционала $\mu_m(t)$.
Из оценок предыдущих пунктов имеем

$$\mu_m^1(a) = O(m), \quad \mu_m^1(-a) = O(mq^{2m}), \quad \mu_m^2(a) = O\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big),$$

и, следовательно,

$$\alpha_m = O(\varepsilon m),\ \alpha_{-m} = O(\varepsilon m q^{2m}). \tag{7.1.27}$$

Из условий (7.1.25), (7.1.27) вытекает, что

$$F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \bar{\mu}_m) = 1 + O(\varepsilon m). \tag{7.1.28}$$

Положим теперь

$$\mu_m(t) = \Delta_1\, \bar{\mu}_m(t),$$

где нормирующий множитель Δ_1 подбирается из условия $F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_m) = 1$, согласно (7.1.28), имеем

$$\Delta_1 = 1 + O(\varepsilon m)$$

Аналогично определяется функционал $\mu_{-m}(t)$.
Имеем

$$F_\varepsilon(N_{1,k}, \mu_m) = \begin{cases} 1, & k = m-1 \\ 0, & k \neq -m-1, m-1 \\ O(\varepsilon m q^{2m}), & k = -m-1, \end{cases} \tag{7.1.29}$$

$$F_\varepsilon(N_{1,k}, \mu_{-m}) = \begin{cases} 1, & k = -m-1 \\ 0, & k \neq -m-1, m-1 \\ O(\varepsilon m q^{2m}), & k = m-1. \end{cases} \tag{7.1.30}$$

Непосредственно из построения функционалов $\mu_i(t)$, $i = \overline{-m+1, m-1}$ и (7.1.24) следует, что

$$F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_i) = F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_i^1) + \alpha_m^i F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_m^2) = \alpha_m^i = O(\varepsilon m q^{m-i})$$

$$F_\varepsilon(N_{1,-m+1}, \mu_i) = F_\varepsilon(N_{1,-m+1}, \mu_i^1) + \alpha_{-m}^i F_\varepsilon(N_{1,-m+1}, \mu_{-m}^2) = \alpha_{-m}^i = O(\varepsilon m q^{m+i}). \tag{7.1.31}$$

Обеспечение выполнения условия биортогональности

Заметим, что для построенных в предыдущем пункте функционалов μ_i, $i = -k^* + 1, \ldots, k^* - 1$ нарушаются условия (7.1.6) биортогональности в смысле формы F_ε

$$F_\varepsilon\Big(N_{1,j},\, \mu_i(t)\Big) = \delta_{i-1,j}. \tag{7.1.32}$$

на базисных функциях $N_{1,-m-1}(t)$ и $N_{1,m-1}(t)$. Теперь наша задача скорректировать эти функционалы $\mu_i,\ i=-k^*+1,\ldots,k^*-1$ так, чтобы условия (7.1.32) выполнялись для всех $j=-k^*,\ldots,k^*-2$.

Идея состоит в следующем: сначала определим биортогональные функционалы $\lambda_m(t)$ и $\lambda_{-m}(t)$ удовлетворяющие условиям (7.1.6), а затем с их помощью скорректируем остальные функционалы.

Определим $\lambda_m(t)$ и $\lambda_{-m}(t)$ по формулам

$$\lambda_m(t)=\alpha_m\,\mu_m(t)+\alpha_{-m}\,\mu_{-m}(t),\quad \lambda_{-m}(t)=\beta_m\,\mu_m(t)+\beta_{-m}\,\mu_{-m}(t), \qquad (7.1.33)$$

где константы $\alpha_{\pm m}$, $\beta_{\pm m}$ определяются из выполнения условия (7.1.6) при $i=\pm m$.
Из (7.1.29),(7.1.30) имеем

$$\alpha_m=1+O\Big(\varepsilon^2m^2q^{4m}\Big),\ \alpha_{-m}=O\Big(\varepsilon mq^{2m}\Big),\ \beta_m=O\Big(\varepsilon mq^{2m}\Big),\ \beta_{-m}=1+O\Big(\varepsilon^2m^2q^{4m}\Big). \qquad (7.1.34)$$

Остальные функционалы $\lambda_i(t)$ определим формулами

$$\lambda_i(t)=\mu_i(t)+\delta_1\lambda_{-m}(t)+\delta_2\lambda_m(t),\quad i=\overline{-k^*+1,k^*-1},\quad i\neq\pm m,$$

где коэффициенты δ_1, δ_2 подбираем такими, чтобы выполнялось

$$F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\lambda_i)=0,\quad F_\varepsilon(N_{1,m-1},\lambda_i)=0.$$

Имеем

$$F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\lambda_i)=0\ \Rightarrow\ F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_i)+\delta_1F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\lambda_{-m})+\delta_2F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\lambda_m)=$$

$$=F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_i)+\delta_1=0\ \Rightarrow\ \delta_1=-F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_i),$$

$$F_\varepsilon(N_{1,m-1},\lambda_i)=0\ \Rightarrow\ F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_i)+\delta_1F_\varepsilon(N_{1,m-1},\lambda_{-m})+\delta_2F_\varepsilon(N_{1,m-1},\lambda_m)=$$

$$=F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_i)+\delta_1=0\ \Rightarrow\ \delta_2=-F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_i).$$

Итак, биортогональный базис $\lambda_i(t),\ i=\overline{-k^*+1,k^*-1},\ i\neq\pm m$, построен

$$\lambda_i(t)=\mu_i(t)-F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_i)\lambda_{-m}(t)-F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_i)\lambda_m(t).$$

Из (7.1.33), (7.1.34), (7.1.25), (7.1.26) вытекает, что для $\lambda_m(t)$ справедливы оценки

$$|\lambda_m(t)|\ \le|\,\alpha_m|\cdot|\mu_m(t)|+|\alpha_{-m}|\cdot|\mu_{-m}(t)|\ \le C_1|\mu_m(t)|+C_2|\mu_{-m}(t)|\ \le$$

$$\leq \begin{cases} C_{11}|\mu^2_{-m}(t)| & t \in [-1, t_{-m}] \\ C_{12}|\mu^1_m(t)| + C_{13}|\mu^1_{-m}(t)|, & t \in [t_{-m}, t_m] \\ C_{14}|\mu^2_m(t)| & t \in [t_m, 1] \end{cases} \tag{7.1.35}$$

Аналогично, для $\lambda_{-m}(t)$:

$$|\lambda_{-m}(t)| \leq \begin{cases} C_{21}|\mu^2_{-m}(t)| & t \in [-1, t_{-m}] \\ C_{22}|\mu^1_m(t)| + C_{23}|\mu^1_{-m}(t)|, & t \in [t_{-m}, t_m] \\ C_{24}|\mu^2_m(t)| & t \in [t_m, 1] \end{cases}$$

7.1.5 Доказательства и вспомогательные результаты

Квазиоптимальность галеркинского проектора

Как было показано в [30], галеркинский проектор можно представить в виде (7.1.5). Имеет место теорема о квазиоптимальности галеркинского проектора.

Теорема 4 *Найдется положительная константа C, независящая от ε, m такая, что справедлива оценка*

$$\| P \|_{C_{[-1,1]} \to C_{[-1,1]}} \leq C.$$

Доказательство:

В силу финитности $N_{1,j}(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \| Px \| &= \left\| \sum_{j=-k^*+1}^{k^*-1} F_\varepsilon(\lambda_j(t), x(t)) N_{1,j-1}(t) \right\|_{C[-1,1]} \\ &\leq \max_{t_{-k^*} \leq t \leq t_{-k^*+1}} \left| F_\varepsilon(\lambda_{-k^*+1}(t), x(t)) \right| \\ &+ \max_{-k^*+1 \leq j \leq k^*-2} \max_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} \left(\left| F_\varepsilon(\lambda_j(t), x(t)) \right| + \left| F_\varepsilon(\lambda_{j+1}(t), x(t)) \right| \right) \\ &+ \max_{t_{k^*-1} \leq t \leq t_{k^*}} \left| F_\varepsilon(\lambda_{k^*-1}(t), x(t)) \right|. \end{aligned}$$

Если мы докажем, что

$$\begin{aligned} &\max_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} \left(\left| F_\varepsilon(\lambda_j(t), x(t)) \right| + \left| F(\lambda_{j+1}(t), x(t)) \right| \right) \leq \\ &\leq C \max_{-1 \leq t \leq 1} | x(t) | = C \| x \|, \qquad j = \overline{-k^*+1, k^*-2}, \end{aligned}$$

тогда будет справедлива оценка

$$\| Px(t) \| \leq C \| x(t) \|, \tag{7.1.1}$$

или

$$\| P \|_{C_{[-1,1]} \to C_{[-1,1]}} \leq C.$$

Оценка (7.1.1) является обоснованием квазиоптимальности галеркинского проектора (7.1.5). Для доказательства (7.1.1) достаточно установить оценку

$$\Big| F_\varepsilon(\lambda_j(t), x(t)) \Big| \leq C \| x(t) \| . \tag{7.1.2}$$

Пусть $x_I(t) \in S(\Delta, 1, 1) : x_I(t_i) = x(t_i)$ - кусочно-линейный интерполянт $x(t)$. Представим его в виде

$$x_I(t) = \sum_{i=-k^*}^{k^*-2} \varphi_i N_{1,i}(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\Big| F_\varepsilon(\lambda_j(t), x(t)) \Big| = \Big| F_\varepsilon(\lambda_j(t), x - x_I) + F_\varepsilon(\lambda_j(t), x_I) \Big| = \\ &= \Big| F_\varepsilon(\lambda_j(t), x - x_I) + x(t_j) \Big| \leq \Big| F_\varepsilon(\lambda_j(t), x - x_I) \Big| + C_1 \| x \|, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} &F_\varepsilon(\lambda_j(t), x_I) = F_\varepsilon\left(\lambda_j(t), \sum_{i=-k^*}^{k^*-2} \varphi_i N_{1,i}(t) \right) = \sum_{i=-k^*}^{k^*-2} \varphi_i \overbrace{F_\varepsilon(\lambda_j, N_{1,i}(t))}^{\delta_{i,j-1}} \\ &= \varphi_{j-1} F_\varepsilon(\lambda_j, N_{1,j-1}) = \varphi_{j-1} = x_I(t_j) = x(t_j). \end{aligned}$$

Тогда вместо (7.1.2) достаточно доказать

$$\Big| F_\varepsilon(\lambda_j, x - x_I) \Big| \leq C \| x \| . \tag{7.1.3}$$

Имеем

$$\Big| F_\varepsilon(\lambda_j, x - x_I) \Big| \leq \Big| \varepsilon^2(\lambda'_j, (x - x_I)') + (\lambda_j, c(t)(x - x_I)) \Big| = \Big| (\lambda_j, c(t)(x - x_I)) \Big|, \tag{7.1.4}$$

Заметим, что функционал $\lambda_j(t)$ представляет собой кусочно-линейную функцию, поэтому на каждом частичном отрезке $(t_i,\, t_{i+1})$ функция $\lambda_j(t)$ является линейной и, следовательно, ее производная $\lambda'_j(t)$ - некоторая константа C_i. Получаем

$$(\lambda'_j, x - x_I{}') = \int_{-1}^{1} \lambda'_j \cdot (x - x_I)'\, dt = \sum_{i=-k^*}^{k^*-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda'_j \cdot (x - x_I)'\, dt =$$

$$= \sum_{i=-k^*}^{k^*-1} C_i \int\limits_{t_i}^{t_{+1}} (x - x_I)'\, dt = \sum_{i=-k^*}^{k^*-1} C_i \, (x - x_I)\Big|_{t_i}^{t_{+1}} = 0.$$

Продолжаем оценку для (7.1.4)

$$\Big|(\lambda_j, c(t)(x - x_I))\Big| = \Big|\int\limits_{-1}^{1} c(t)\lambda_j(t)(x - x_I)\, dt\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{t_{-m}}^{t_m} c(t)\lambda_j(t)(x - x_I)\, dt + \int\limits_{-1}^{t_{-m}} c(t)\lambda_j(t)(x - x_I)\, dt + \int\limits_{t_m}^{1} c(t)\lambda_j(t)(x - x_I)\, dt\Big| \leq$$

$$\leq \Big|\int\limits_{t_{-m}}^{t_m} c(t)\lambda_j(t)(x - x_I)\, dt\Big| + \Big|\int\limits_{t_m}^{1} c(t)\lambda_j(t)(x - x_I)\, dt\Big| +$$

$$+ \Big|\int\limits_{-1}^{t_{-m}} c(t)\lambda_j(t)(x - x_I)\, dt\Big| = I_1 + I_2 + I_3. \qquad (7.1.5)$$

Рассмотрим случаи $t_j \in [t_{-m},\, t_m]$ и $t_j \in [-1,\, t_{-m}] \cup [t_m,\, 1]$.

Пусть $t_j \in [t_{-m},\, t_m]$. Оценим последовательно все слагаемые из (7.1.5)

$$I_1 = \Big|\int\limits_{t_{-m}}^{t_m} c(t)\lambda_j(t)(x - x_I)\, dt\Big| \leq \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |c(t)| \cdot |\lambda_j(t)| \cdot |x - x_I|\, dt \leq C \cdot \parallel x(t) \parallel_{C[-1,1]} \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\, dt$$

По построению функционалов $\lambda_j(t)$ с учетом (7.1.31), (7.1.35) и леммы 3 последний интеграл

$$\int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\, dt = \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_j(t) - F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \mu_j)\lambda_{-m}(t) - F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_j)\lambda_m(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_j(t)|\, dt + |F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \mu_j)| \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_{-m}(t)|\, dt + |F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_j)| \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_m(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_j(t)|\, dt + O(\varepsilon m q^{m+j}) \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_{-m}(t)|\, dt + O(\varepsilon m q^{m-j}) \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_m(t)|\, dt \leq$$

$$\leq C_1 + C_2 \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu^1_{-m}(t)|\, dt + C_3 \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu^1_m(t)|\, dt \leq C_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_3 = C_4.$$

Тогда для интеграла I_1 имеем

$$I_1 \leq C \parallel x(t) \parallel \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\, dt \leq C C_4 \parallel x(t) \parallel \leq C_5 \parallel x(t) \parallel .$$

Рассмотрим интеграл I_2

$$I_2 = \Big|\int\limits_{t_m}^{1} c(t)\lambda_j(t)(x-x_I)\,dt\Big| \le \int\limits_{t_m}^{1} |c(t)|\cdot|\lambda_j(t)|\cdot|x-x_I|\,dt \le C\cdot \parallel x(t) \parallel_{C[-1,1]} \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_j(t)|\,dt$$

Отсюда, используя оценки (7.1.31) и лемму 4, имеем

$$\int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_j(t)|\,dt = \int\limits_{t_m}^{1} |\mu_j(t) - F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_j)\lambda_{-m}(t) - F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_j)\lambda_m(t)|\,dt \le$$

$$\le \int\limits_{t_m}^{1} |\mu_j(t)|\,dt + |F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_j)| \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_{-m}(t)|\,dt + |F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_j)| \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_m(t)|\,dt \le$$

$$\le C_6 \int\limits_{t_m}^{1} |\mu_m^2(t)|\,dt + O(\varepsilon m q^{m+j}) \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_{-m}(t)|\,dt + O(\varepsilon m q^{m-j}) \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_m(t)|\,dt \le$$
$$\le C_7 + C_8 \int\limits_{t_m}^{1} |\mu_m^2(t)|\,dt + C_9 \int\limits_{t_m}^{1} |\mu_m^2(t)|\,dt \le C_7 + \bar{C}_{10} + \bar{C}_{11} = C_{12}.$$

Получили

$$I_2 \le C \parallel x(t) \parallel \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_j(t)|\,dt \ \le\ CC_{12} \parallel x(t) \parallel \le\ C_{13} \parallel x(t) \parallel$$

Аналогично, доказывается, что $I_3 \ \le\ C_{14} \parallel x(t) \parallel$.

Таким образом, показано, что в случае $t_j \in [t_{-m},\, t_m]$ имеет место оценка (7.1.3).

Пусть теперь t_j принадлежит пограничному слою, для определенности пусть $t_j \in [t_m,\, 1]$.

$$I_1 = \Big|\int\limits_{t_{-m}}^{t_m} c(t)\lambda_j(t)(x-x_I)\,dt\Big| \le \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |c(t)|\cdot|\lambda_j(t)|\cdot|x-x_I|\,dt \le C\cdot \parallel x(t) \parallel_{C[-1,1]} \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\,dt$$

Имеем также

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_j)| \quad &= \quad |F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_j^2)| \ \le \sum_{k=m+1}^{k^*-1} |F_\varepsilon(N_{1,m-1},\nu_k)| \ \le\ C_1 \sum_{k=m+1}^{k^*-1} O\Big(\tfrac{1}{m^3}\Big) \ \le \\ &\le \quad \tfrac{C_2(k^*-m-2)}{m^3} \ \le\ \tfrac{C_3 m \ln(m)}{m^3} = \tfrac{C_3 \ln(m)}{m^2} \ \le\ C_4, \\ |F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_j)| \quad &\equiv \quad 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\, dt = \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_j(t) - F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \mu_j)\lambda_{-m}(t) - F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_j)\lambda_m(t)|\, dt \leq$$

$$\leq |F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \mu_j)| \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_{-m}(t)|\, dt + |F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_j^2)| \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_m(t)|\, dt \leq$$

$$\leq C_4 \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_m(t)|\, dt \leq C_5 \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_{-m}^1(t)|\, dt + C_6 \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_m^1(t)|\, dt \leq \bar{C}_5 + \bar{C}_6 = C_7.$$

Тогда для интеграла I_1 имеем

$$I_1 \leq C \parallel x(t) \parallel \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\, dt \leq C\ C_7 \parallel x(t) \parallel \leq C_8 \parallel x(t) \parallel .$$

Рассмотрим интеграл I_2

$$I_2 = \left| \int\limits_{t_m}^{1} c(t)\lambda_j(t)(x - x_I)\, dt \right| \leq \int\limits_{t_m}^{1} |c(t)| \cdot |\lambda_j(t)| \cdot |x - x_I|\, dt \leq C \cdot \parallel x(t) \parallel_{C[-1,1]} \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_j(t)|\, dt$$

Имеем

$$\int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_j(t)|\, dt = \int\limits_{t_m}^{1} |\mu_j(t) - F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \mu_j)\lambda_{-m}(t) - F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_i)\lambda_m(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_m}^{1} |\mu_j(t)|\, dt + |F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \mu_j)| \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_{-m}(t)|\, dt + |F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_j)| \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_m(t)|\, dt \leq$$

$$\leq C_9 + C_4 \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_m^2(t)|\, dt \ \leq\ C_9 + C_4 C_{10} \leq C_{11}.$$

Отсюда

$$I_2 \leq C \parallel x(t) \parallel \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_j(t)|\, dt \ \leq\ C C_{11} \parallel x(t) \parallel \leq\ C_{12} \parallel x(t) \parallel$$

Для интеграла I_3 аналогичные рассуждения приводят к оценке $I_3 \ \leq\ C_{12} \parallel x(t) \parallel$. Таким образом, показано, что и в случае $t_j \in [t_m,\, 1]$ имеет место оценка (7.1.3). В случае $t_j \in [-1,\, t_{-m}]$ рассуждения проводятся по той же схеме.

Тем самым, установлена оценка (7.1.3) и, теорема доказана.

Обоснование сходимости алгоритма адаптации сетки (I)-(V) из п.7.1.2

Доказательство Теоремы 2. Алгоритм (I) - (V), суть которого состоит в процессе подбора параметра p^k, где k - число итераций, продолжает свою работу до тех пор, пока будет иметь место оценка

$$\|x_{m,p^{k+1}}(t) - x_{m,p^k}(t)\|_{C[a_{k+1},a_k]} > \ln m/m^2 \tag{7.1.6}$$

Доказательство теоремы проводится в два этапа. На первом этапе будет показано, что оценки (7.1.6) достаточно для достижения точной границы пограничного слоя $\tilde{a}$. На втором этапе рассматривается вопрос о том, не произойдет ли в процессе реализации алгоритма переход точной границы при уменьшении параметра сетки p^k.
I этап. Имеем

$$\|Px - x\|_{C[a_{k+1},a_k]} \leq \|Px - \tilde{x}\|_{C[a_{k+1},a_k]} + \|x - \tilde{x}\|_{C[a_{k+1},a_k]}$$

где $\tilde{x} \in E$ - наилучшее приближение точного решения на заданном отрезке.
Далее

$$\|Px - \tilde{x}\|_{C[a_{k+1},a_k]} \leq \|Px - \tilde{x}\|_{C[-1,1]} \leq \|P\|_{C\to C}\|x - \tilde{x}\|_{C[-1,1]} \leq C_1\|x - \tilde{x}\|_{C[-1,1]}$$

Оценим $\|x - \tilde{x}\|_{C[-1,1]}$ на сетке с границей a_k

$$\|x - \tilde{x}\|_{C[-1,1]} \leq C_2\Big(e^{c_0\frac{a_k-1}{\varepsilon}} + \frac{1}{m^2}\Big)$$

Тогда

$$C_3\Big(e^{c_0\frac{a_k-1}{\varepsilon}} + \frac{1}{m^2}\Big) \leq \|Px - x\|_{C[a_{k+1},a_k]} \leq C_4\Big(e^{c_0\frac{a_k-1}{\varepsilon}} + \frac{1}{m^2}\Big)$$

(Нижняя оценка следует из невозможности приближения сингулярной экспоненты на сетке с шагом $O^*(\frac{1}{m})$ с точностью лучше, чем $O^*(1)$)

Для разбиения с границей погранслоя a_{k+1}, получаем аналогичные оценки

$$C_5\Big(e^{c_0\frac{a_{k+1}-1}{\varepsilon}} + \frac{1}{m^2}\Big) \leq \|Px - x\|_{C[a_{k+1},a_k]} \leq C_6\Big(e^{c_0\frac{a_{k+1}-1}{\varepsilon}} + \frac{1}{m^2}\Big)$$

Остановка работы алгоритма (I)-(V) параграфа 7.1.2 произойдет в том случае, когда

$$e^{c_0\frac{a_{k+1}-1}{\varepsilon}} < \frac{\ln m}{m^2}$$

Отсюда

$$a_{k+1} < \tilde{a} + \frac{\varepsilon}{c_0}\ln\ln m$$

Это значит, что
$$a_{k+1} = \tilde{a} + O\Big(\varepsilon \ln\ln m\Big)$$
Таким образом, граница пограничного слоя будет достигнута с точностью $O\Big(\varepsilon \ln\ln m\Big)$. Требуемое число итераций имеет оценку

$$N = O\Big(\frac{\varepsilon \ln m}{\varepsilon \ln\ln m}\Big) = O\Big(\frac{\ln m}{\ln\ln m}\Big)$$

II этап. Предположим, что переход за точную границу пограничного слоя произошел. Но тогда пространство E содержит аппроксимацию точного решения порядка $O\Big(\frac{1}{m^2}\Big)$. В силу квазиоптимальности метода Галеркина в норме $C[-1,1]$ для рассматриваемой задачи норма разности в п.III рассматриваемого алгоритма будет величиной такого же порядка, и уже на следующем шаге алгоритм закончит свою работу. Теорема доказана.

Вспомогательные результаты

Доказательство Леммы 1. Поскольку система $\{N_{1,k}\}$ линейно независима, то матрица A есть симметричная положительно определенная матрица. Действительно, рассмотрим квадратичную форму этой матрицы

$$(A\gamma,\gamma) = \sum_{s=-m-1}^{m-1}\left(\sum_{k=-m-1}^{m-1} a_{sk}\gamma_k\right)\gamma_s = \sum_{s=-m-1}^{m-1}\sum_{k=-m-1}^{m-1} F_\varepsilon(N_{1,s},N_{1,k})\gamma_k\gamma_s =$$
$$F_\varepsilon\left(\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s},\sum_{k=-m-1}^{m-1}\gamma_k N_{1,k}\right) = F_\varepsilon\left(\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s},\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s}\right) = \left[\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s}\right]^2,$$

где $[u]^2 = F_\varepsilon(u,u)$.

Докажем, что

$$\left[\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s}\right]^2 \geq \frac{C_0}{m}\sum_{s=-m-1}^{m-1}|\gamma_s|^2, \tag{7.1.7}$$

где $C_0 > 0$ не зависит от i, m, γ.

$$\left[\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s}\right]^2=\varepsilon^2\left(\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N'_{1,s},\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N'_{1,s}\right)+\left(c(t)\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s},\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s}\right)\geq$$
$$\left(c(t)\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s},\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s}\right)=\sum_{\nu=-m-1}^{m-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}c(t)\left(\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s}\right)^2dt=$$
$$\sum_{\nu=-m-1}^{m-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}c(t)(\gamma_{\nu-1}N_{1,\nu-1}+\gamma_\nu N_{1,\nu})^2dt\geq$$
$$\sum_{\nu=-m-1}^{m-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}c(t)(\gamma_{\nu-1}^2N_{1,\nu-1}^2(t)+\gamma_\nu^2N_{1,\nu}^2(t))dt\geq\tfrac{h}{3}\sum_{\nu=i}^{m-1}\min_{t_\nu\leq t\leq t_{\nu+1}}c(t)(\gamma_{\nu-1}^2+\gamma_\nu^2)\geq$$
$$\tfrac{2h}{3}\min_{t_i\leq t\leq t_m}c(t)\sum_{\nu=-m-1}^{m-1}|\gamma_\nu|^2=\tfrac{C_0}{m}\sum_{\nu=-m-1}^{m-1}|\gamma_\nu|^2,$$

где C_0 ни от чего не зависит. Оценка (7.1.7) доказана.

Получили, что

$$|(A\gamma,\gamma)|\geq\frac{C_0}{m}\sum_{\nu=-m-1}^{m-1}|\gamma_\nu|^2.$$

Отсюда очевидно, что

$$\parallel A^{-1}\parallel_2\leq C_1 m$$

и утверждение леммы доказано.

Доказательство Леммы 2. Нормированные на единицу в $L_2[-1,1]$ базисные функции $N_{1,i}(t)$ имеют вид:

$$N_{1,i}(t)=O^*\left(\sqrt{m}\right)\begin{cases}\frac{t-t_i}{h}, & t\in[t_i,t_{i+1}),\\ \frac{t_{i+2}-t}{h}, & t\in[t_{i+1},t_{i+2}),\\ 0, & t\notin[t_i,t_{i+2}).\end{cases}$$

$$N'_{1,i}(t)=O^*\left(\sqrt{m}\right)\begin{cases}\frac{1}{h}, & t\in[t_i,t_{i+1}),\\ -\frac{1}{h}, & t\in[t_{i+1},t_{i+2}),\\ 0, & t\notin[t_i,t_{i+2}).\end{cases}$$

Тогда

$$|F_\varepsilon(N_{1,i},N_{1,j})|=|\varepsilon^2(N'_{1,i},N'_{1,j})+(c(t)N_{1,i},N_{1,j})|\leq$$
$$\varepsilon^2\parallel N'_{1,i}\parallel_2\parallel N'_{1,j}\parallel_2+\max_{t\in supp\ N_{1,i}\bigcap supp\ N_{1,j}}c(t)=$$
$$\sqrt{\varepsilon^2(N'_{1,i},N'_{1,i})}\sqrt{\varepsilon^2(N'_{1,j},N'_{1,j})}+\max_{t\in supp\ N_{1,i}\bigcap supp\ N_{1,j}}c(t).\qquad(7.1.8)$$

Так как

$$\varepsilon^2(N'_{1,i}, N'_{1,i}) = \varepsilon^2 O^*(m) \int\limits_{t_i}^{t_{i+2}} \frac{dt}{h^2} = O^*\Big(\varepsilon^2 m^2\Big),$$

$$\max_{t \in supp\, N_{1,i} \bigcap supp\, N_{1,j}} c(t) = O(1),$$

то оценка (7.1.8) примет вид

$$|F_\varepsilon(N_{1,i}, N_{1,j})| = O^*\Big(\varepsilon^2 m^2\Big) + O(1) = O(1)$$

в силу условия $\varepsilon m \leq 1$.

Доказательство Леммы 3. При $-m+1 \leq i \leq m-1$ имеем:

$$\int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_i^1(t)|\, dt = C \sum_{k=-m}^{m-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\mu_i^1(t)|\, dt \leq C \sum_{k=-m}^{m-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} m q^{|k-i|}\, dt =$$
$$= C_1 \sum_{k=-m}^{i-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} m q^{i-k} + C_2 \sum_{k=i}^{m-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} m q^{k-i}\, dt \leq \Big[h = \tfrac{a}{m}\Big]$$
$$\leq C_1 \sum_{k=-m}^{i-1} q^{i-k} + C_2 \sum_{k=i}^{m-1} q^{k-i} \leq \bar{C}_1 + \bar{C}_2 = C_3.$$

При $i = m$ имеем:

$$\int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_m^1(t)|\, dt \leq= C \sum_{k=-m}^{m-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\mu_m^1(t)|\, dt \leq$$

$$\leq C \sum_{k=-m}^{m-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} m q^{m-k}\, dt = C_1 \sum_{k=-m}^{m-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} m q^{m-k} \leq \Big[h = \tfrac{a}{m}\Big]$$

$$\leq \bar{C}_1 \sum_{k=-m}^{m-1} q^{m-k} \leq C_2.$$

Для $i = -m$ оценки проводятся аналогично. Лемма доказана.

Доказательство Леммы 4. При $m \leq i \leq k^* - 1$ (7.1.22) имеем:

$$\mu_i^2(t) = \sum_{k=m+1}^{k^*-1} \alpha_k \nu_k(t) = \left(1 + O\left(\frac{1}{m^3}\right)\right)\nu_i(t) + \sum_{k=m,\, k\neq i}^{k^*-1} \alpha_{k,i}\nu_k(t), \quad t \in [a, 1],$$

где

$$\sum_{k=m+1\, k\neq i}^{k^*-1} |\alpha_k| = \sum_{k=m+1,\, k\neq i}^{k^*-1} \frac{C}{m^3} = \frac{C(k^*-m-3)}{m^3} \leq \frac{C(k^*-m)}{m^3} \leq \frac{C m \ln m}{m^3} \leq \frac{C_1 \ln m}{m^2}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
|\mu_i^2(t)| &\le \sum_{k=m+1}^{k^*-1} \alpha_k |\nu_k(t)| \le \alpha_i |\nu_i(t)| + \sum_{k=m+1,\, k\ne i}^{k^*-1} \alpha_k |\nu_k(t)| \le \\
&\le \Big(1 + \tfrac{C_2}{m^3}\Big) |\nu_i(t)| + \sum_{k=m+1,\, k\ne i}^{k^*-1} |\alpha_k| \max_{t\in[a,1]} |\nu_k(t)| \le \\
&\le \tfrac{C_3}{\varepsilon} e^{-\frac{|t-t_i|}{\varepsilon}} + \tfrac{C_4}{\varepsilon} \sum_{k=m+1,\, k\ne i}^{k^*-1} |\alpha_k| \le \tfrac{C_3}{\varepsilon} e^{-\frac{|t-t_i|}{\varepsilon}} + \tfrac{C_4 \ln m}{\varepsilon m^2}.
\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\int_a^1 |\mu_i^2(t)|\, dt &\le \int_a^1 \Big(\tfrac{C_3}{\varepsilon} e^{-\frac{|t-t_i|}{\varepsilon}} + \tfrac{C_4 \ln m}{\varepsilon m^2}\Big) dt = \\
&= \tfrac{C_3}{\varepsilon} \int_a^{t_i} e^{\frac{t-t_i}{\varepsilon}}\, dt + \tfrac{C_3}{\varepsilon} \int_{t_i}^1 e^{-\frac{t-t_i}{\varepsilon}}\, dt + \tfrac{C_4 \ln m}{\varepsilon m^2} \int_a^1 dt \le \\
&\le C_3 \Big[e^{\frac{t-t_i}{\varepsilon}} \Big|_a^{t_i} - e^{-\frac{t-t_i}{\varepsilon}} \Big|_{t_i}^1 \Big] + \tfrac{C_4 \ln m}{\varepsilon m^2} (1-a) \le \\
&\le C_3 \Big[1 - e^{\frac{a-t_i}{\varepsilon}} - e^{-\frac{1-t_i}{\varepsilon}} + 1 \Big] + \tfrac{C_5 \ln m}{\varepsilon m^2}\, \varepsilon \ln m \le \\
&\le C_3\, C_6 + C_5 \Big(\tfrac{\ln m}{m}\Big)^2 \le C_7
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

7.1.6 Численный эксперимент

Алгоритм адаптации был реализован на модельной сингулярно возмущенной задаче (7.1.1) - (7.1.2) при $c(t) \equiv 1, f(t) \equiv 1$ и дал следующие результаты. (Начальное значение p^0, при котором начинается процесс адаптации, приняли равным 10, а шаг его изменения равным $\tau = \frac{(p^k)^2 \ln\ln m}{2\ln m + p^k \ln\ln m}$. При таком выборе τ разность $|a_k - a_{k+1}| = \varepsilon \ln\ln m$.)

	ε=0.001	ε=0.0001
m=4	$p^k = 1.239387 \;\; k = 6$ $pogr = 0.073891$	$p^k = 1.239387 \;\; k = 6$ $pogr = 0.071562$
m=8	$p^k = 1.020238 \; k = 5$ $pogr = 0.027402$	$p^k = 1.020238 \;\; k = 5$ $pogr = 0.027003$
m=16	$p^k = 0.980853 \; k = 5$ $pogr = 0.008576$	$p^k = 0.980853 \; k = 5$ $pogr = 0.008457$
m=32	$p^k = 1.003430 \; k = 5$ $pogr = 0.003229$	$p^k = 1.003431 \; k = 5$ $pogr = 0.003178$
m=64	$p^k = 0.886448 \; k = 6$ $pogr = 0.000336$	$p^k = 0.886448 \; k = 6$ $pogr = 0.000330$
m=128	$p^k = 0.928904 \; k = 6$ $pogr = 0.000138$	$p^k = 0.928904 \; k = 6$ $pogr = 0.000135$
m=256	$p^k = 0.973982 \; k = 6$ $pogr = 0.000063$	$p^k = 0,973982 \; k = 6$ $pogr = 0.000061$

Здесь p^k - значение, при котором прекращается выполнение алгоритма на k-ой итерации, $pogr = \|x_{m,p^{k+1}}(t) - x_{m,p^k}(t)\|_{[a_{k+1},a_k]}$.

7.2 Алгоритм адаптации сеток Г.И. Шишкина для сингулярно возмущенной краевой задачи с несимметричным оператором

7.2.1 Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим на отрезке [0, 1] краевую задачу

$$L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon u'' + p(t)u' + q(t)u = f(t),\ u(0) = u(1) = 0 \tag{7.2.1}$$

Предположение 1. Предположим, что $p(t)$, $q(t) \in C^2[0,1]$, $f(t) \in C[0,1]$, $p(t) \geq p_0 > 0$ при $t \in [0,1]$, а решение задачи Коши $p(t)u_0' + q(t)u_0 = f(t)$, $u_0(0) = 0$ отлично от нуля при $t = 1$.

При сделанных предложениях задачи в [31] было установлено, что справедлива

Лемма 1 *Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует единственное решение $u_\varepsilon(t)$ задачи (7.2.1), причем справедливы оценки*

$$\left|u_\varepsilon^{(i)}(t)\right| \leq C\left(1 + \varepsilon^{-1} e^{p_0 \frac{t-1}{\varepsilon}}\right), \qquad i = 0, 1, 2. \tag{7.2.2}$$

Перейдем к описанию проекционно сеточного метода. Разбиение Δ отрезка [0, 1] выберем по известной методике Шишкина [70]. Зафиксируем натуральное n. Пусть $\varphi_\varepsilon = 1 - \frac{2}{p_0}\varepsilon \ln n$,

$$t_t = \begin{cases} \varphi_\varepsilon \, \frac{i}{n}, & i = 0, 1, \cdots, n, \\ \varphi_\varepsilon + (1 - \varphi_\varepsilon)\, \frac{i-n}{n}, & i = n+1, n+2, \cdots, 2n. \end{cases} \tag{7.2.3}$$

Построенное разбиение будем называть сеткой Шишкина $\Delta = \Delta_{n,p_0}$ с параметром p_0. Будем предполагать, что

$$\varepsilon n \leq C. \tag{7.2.4}$$

Приближенные решения задачи (7.2.1) будем искать в пространстве

$$E_\varepsilon^n = \{u \in C[0,1] : \ u(0) = u(1) = 0,\ u(t) = A_i + B_i(t - t_i),\ t \in [t_i, i_{i+1}],\ i = 0, 1, \ldots, 2n-1\}.$$

Пространство E_ε^n будем называть пространством пробных функций.

Введем пространство, которое будем называть пространством тестовых функций. Пусть

$$f_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ 0, & t \notin [t_{i-1}, t_i], \qquad i = 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{n-1}, t_n], \\ \frac{t_{n+1}-t}{t_{n+1}-t_n}, & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ 0, & t \notin [t_{n-1}, t_{n+1}], \end{cases} \tag{7.2.5}$$

$$f_i(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}, & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}, & t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad i = n+1, n+2, ..., 2n-1, \\ 0, & t \notin [t_{i-1}, t_{i+1}], \end{cases}$$

Пространство F_ε^n определим как линейную оболочку функций $f_i(t)$.

Предлагаемый вариант метода Галеркина для задачи (7.2.1) состоит в отыскании такой функции $u \in E_\varepsilon^n$, что

$$-\varepsilon u'(t_i+0) + \varepsilon u'(t_{i-1}+0) + (pu' + qu, f_i) = (f, f_i) \ i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\varepsilon u'(t_{n-1}+0) + (\varepsilon u', f_n') + (pu' + qu, f_n) = (f, f_n), \tag{7.2.6}$$

$$(\varepsilon u', f_i') + (pu' + qu, f_i) = (f, f_i), \ i = n+1, n+2, \dots, 2n-1.$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2[0, 1]$.

Замечание 1. Первые из уравнений (7.2.6) и первое слагаемое во втором уравнении выглядят нетрадиционными для метода Галеркина и нуждаются в комментариях. В [63, с. 43-45] показано, что разрешимость задачи метода Галеркина и сходимость приближенных решений определяются свойствами главной части оператора задачи. Для нежестких задач это члены, содержащие старшие производные. В случае сингулярно возмущенной задачи при условии (7.2.4) главной частью оператора задачи на $[0, \varphi_\varepsilon]$ является член $p(t)u'$, а на $[\varphi_\varepsilon, 1]$, как обычно, —- член $\varepsilon u''$, поскольку там $h \le C_\varepsilon$. Поэтому на $[0, \varphi_\varepsilon]$ тестовые функции — это базисные функции образа пространства непрерывных ломаных при действии оператора дифференцирования, а на $[\varphi_\varepsilon, 1]$ тестовые функции выбираются традиционным образом. При этом члены вида $\varepsilon u(t_i + 0)$ в (7.2.6) получаются при вычислении выражений вида $\varepsilon(u', {f_i}')$, в котором ${f_i}'$ понимается в смысле теории обобщенных функций (как разность σ-функций).

Теорема 1 *Найдутся такие числа* $\varepsilon_0 > 0$, $n_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, $C > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $n \geq n_0 : \varepsilon n \leq \gamma_0$ *существует единственное решение* $u_\varepsilon^n(t)$ *задачи (7.2.6), причём*

$$\|u_\varepsilon^n - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 \tag{7.2.7}$$

Замечание 2. Вопросы построения и обоснования численных методов второго порядка точности, равномерных относительно малого параметра, в том числе для сеток Шишкина, в части получения априорных оценок погрешности для задач вида (7.2.1) в настоящее время хорошо изучены (см., например, [1, 14, 23]). Теорема 1 получается и приводится здесь как простое следствие свойства равномерной ограниченности семейства галеркинских проекторов, которое затем применяется для доказательства сходимости алгоритмов адаптации, что и является основным результатом статьи.

Предположение 2. Для алгоритмов адаптации будем предполагать, что $p_0 = p(1)$. В этом случае главный член погранслойной составляющей асимптотического разложения [43] имеет вид $-u_0(1)e^{p_0\frac{t-1}{\varepsilon}}$.

Рассмотрим теперь алгоритм адаптации расчетной сетки в случае неизвестной границы пограничного слоя.

Определение 1. Будем говорить, что $\varphi = \varphi(\varepsilon, n)$ есть n-граница пограничного слоя, если справедлива оценка $\max e^{p_0\frac{t-1}{\varepsilon}} \leq \dfrac{1}{n^2}$

Определение 2. Число $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\varepsilon, n) = \sup \varphi(\varepsilon, n)$ будем называть точной n-границей пограничного слоя.

Последнее определение аналогично определению ширины пограничного слоя, введенному Г.И. Шишкиным в [71] с пороговым значением $\delta = n^{-2}$.

Очевидно, что

$$\tilde{\varphi} = \varphi_\varepsilon = 1 - \frac{2}{p_0}\varepsilon \ln n. \tag{7.2.8}$$

Будем предполагать, что нам известно расположение пограничного слоя (окрестность точки $t = 1$), но не известна его точная n-граница. Приведем алгоритм приближенного отыскания этой n-границы.

Шаг 1. Задаем некоторое достаточно большое $p^0 \geq p_0$. Полагаем $k = 0$.

Шаг 2. Определяем сетку Шишкина Δ_{n,p^k} по формулам (7.2.3), в которых φ_ε заменяем на $\varphi_k = 1 - \dfrac{2}{p^k}\varepsilon \ln n$.

Шаг 3. Находим решение $u_{n,p^k}(t)$ на сетке Δ_{n,p^k}.

Шаг 4. Полагаем $p^{k+1} = p^k - \tau_k$, где τ_k выбирается так, чтобы $\varphi_k - \varphi_{k+1} = \varepsilon \ln\ln n$.

Шаг 5. Находим решение $u_{n,p^{k+1}}(t)$ на сетке $\Delta_{n,p^{k+1}}$.

Шаг 6. Вычисляем $\mu_k = \left\| u_{n,p^{k+1}}(t) - u_{n,p^k}(t) \right\|_{C[\varphi_{k+1},\varphi_k]}$

Шаг 7. Если $k = 0$,то $k := k + 1$,переходим к шагу 2, иначе к шагу 8.

Шаг 8. Если $\mu_k > \dfrac{\ln^3 n}{n^2}$, то $k := k + 1$, переходим к шагу 2, иначе $\varphi \approx \varphi_{k+1}$ и конец алгоритма.

Теорема 2 *Найдутся такие положительные константы ε_0, n_0, γ_0, C_1, C_2, C_3, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $n \geq n_0 : \varepsilon \leq \gamma_0$ алгоритм 1-8 закончит свою работу при $k < C_1 \dfrac{\ln n}{\ln\ln n}$, причём для параметра φ_{k+1} и приближённого решения $u_{n,p^{k+1}}(t)$ на сетке $\Delta_{n,p^{k+1}}$ будут справедливы оценки*

$$|\tilde{\varphi} - \varphi_{k+1}| \leq C_2 \varepsilon \ln\ln n, \tag{9}$$

$$\left\| u_{n,p^{k+1}}(t) - u \right\|_{C[0,1]} \leq C_3 \frac{\ln^3 n}{n^2}. \tag{7.2.9}$$

Метод галеркинских проекций

Для доказательства основных результатов применим метод галеркинских проекций, распространенный в [31] на семейства уравнений, зависящих от параметра.

Пусть в банаховых пространствах H_ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, рассматривается семейство линейных операторов $\{L_\varepsilon,\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ имеющих области определения $D(L_\varepsilon)$ и семейство конечномерных пространств линейных на H_ε функционалов $\left\{\Phi_\varepsilon^n,\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ n = 0, 1, 2, \dots \right\}$ с базисами $\left\{\varphi_1^{n,\varepsilon},\ \varphi_2^{n,\varepsilon}, \dots,\ \varphi_{k_n}^{n,\varepsilon}\right\}$.

Определим на $D(L_\varepsilon)$ линейные функционалы $\kappa_i^{n,\varepsilon}$, полагая $\langle u, \kappa_i^{n,\varepsilon}\rangle = \langle L_\varepsilon u,\ \varphi_i^{n,\varepsilon}\rangle$. Предположим, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функционалы $\kappa_i^{n,\varepsilon}$, могут быть линейно продолжены на некоторое более широкое линейное многообразие D_ε. Продолженные функционалы обозначим через $\psi_i^{n,\varepsilon}$, а их линейную оболочку — через Ψ_ε^n.

Выберем в D_ε семейство конечномерных пространств $\{H_\varepsilon^n\}$ размерности k_n. Для каждого $u \in D_\varepsilon$ поставим задачу отыскания такого элемента $u_\varepsilon^n \in H_\varepsilon^n$, что для любого $\psi \in \Psi_\varepsilon^n$

$$\langle u_\varepsilon^n - u,\ \psi\rangle = 0. \tag{7.2.10}$$

Задачу (7.2.10) будем называть галеркинской задачей для оператора L_ε. Предположим, что при некоторых n, ε задача (7.2.10) единственным образом разрешима для любого $u \in D_\varepsilon$. Тогда определен линейный оператор $P_\varepsilon^n : D_\varepsilon \to H_\varepsilon^n$, $P_\varepsilon^n u = u_\varepsilon^n$. Очевидно, что $P_\varepsilon^n P_\varepsilon^n = P_\varepsilon^n$, т.е. P_ε^n — проектор.

Определение 3. Оператор P_ε^n будем называть галеркинским проектором для оператора L_ε, а u_ε^n —- галеркинской проекцией элемента u.

В дальнейшем, говоря, что P_ε^n существует, автоматически имеем в виду, что соответствующая задача (7.2.10) единственным образом разрешима при любом $u \in D_\varepsilon$.

Предположим, что P_ε^n существует для некоторого семейства пар индексов $NE = \{(n, \varepsilon)\}$ и при любых $(n, \varepsilon) \in NE$ является линейным ограниченным в H_ε оператором.

Определение 4. Метод Галеркина (7.2.10) будем называть квазиоптимальным на NE, если найдется такая константа $C > 0$, что для любой пары $(n, \varepsilon) \in NE$

$$\left\| P_\varepsilon^n \right\|_{E_\varepsilon \to E_\varepsilon} \leq C. \tag{7.2.11}$$

В нашем случае положим $H_\varepsilon = \big\{u \in C[0,1] : u' \in L_\infty[0, \varphi_\varepsilon], u(0) = u(1) = 0\big\}$ — пространство с нормой $\|u\|_\varepsilon = \varepsilon \| u' \|_{L_\infty[0,\varphi_\varepsilon]} + \| u \|_{C[0,1]}$. Пусть $H_\varepsilon^n = E_\varepsilon^n$, L_ε — оператор (7.2.1), D_ε — множество функций из H_ε, имеющих в каждой точке правосторонние конечные производные. Определим функционалы $\psi_i^{n,\epsilon}$, $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$ на функциях из D_ε выражениями, стоящими в левых частях (7.2.6). Их линейную оболочку по-прежнему будем обозначать через F_ε^n. Нетрудно убедиться, что точное решение уравнения (7.2.1) удовлетворяет (7.2.6). Поэтому задача (7.2.6) эквивалентна галеркинской задаче (7.2.10) для оператора L_ε.

Существование галеркинского проектора и квазиоптимальность метода (7.2.6) будут доказаны далее. Опираясь на квазиоптимальность, докажем теоремы 1 и 2.

Вначале изучим аппроксимационные свойства пространства E_ε^n. Если вместо p_0 при построении разбиения Δ используется другой параметр p^k, то соответствующее пространство обозначим через $E_\varepsilon^n(p^k)$. Узлы соответствующего разбиения Δ_{n,p^k} обозначим через $t_{i,k}$.

Лемма 2 *Пусть $p^k \geq C > 0$ — параметр, определяющий сетку Шишкина из алгоритма адаптации, а функция $u_\varepsilon(t)$ удовлетворяет оценкам (7.2.2). Тогда* *найдутся* $C_1 > 0$ *и такая функция* $\tilde{u}(t) \in E^n_\varepsilon(p^k)$, *что*

$$\|\tilde{u}(t) - u_\varepsilon(t)\|_\varepsilon \le C_1\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + e^{p_0\frac{t_{n,k}-1}{\varepsilon}}\right). \tag{7.2.12}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{u}(t)$ — кусочно-линейная функция, интерполирующая $u_\varepsilon(t)$ в узлах сетки Δ_{n,p^k}. Тогда при $t \in [t_{i,k}, t_{i+1,k}]$, применяя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем

$$u_\varepsilon(t) - \tilde{u}(t) = u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_{i,k}) - \frac{u_\varepsilon(t_{i+1,k}) - u_\varepsilon(t_{i,k})}{t_{i+1,k} - t_{i,k}}\,(t - t_{i,k}) =$$

$$= \int\limits_{t_{i,k}}^{t} (t-s)\, u''_\varepsilon(s)\, ds - \frac{t - t_{i,k}}{t_{i+1,k} - t_{i,k}} \int\limits_{t_{i,k}}^{t_{i+1,k}} (t_{i+1,k} - s)\, u''_\varepsilon(s)\, ds. \tag{7.2.13}$$

Далее, для $i \le n-1$ в силу (7.2.2) при $t \in [t_{i,k}, t_{i+1,k}]$ имеем

$$\left|\int\limits_{t_{i,k}}^{t} (t-s)\, u''_\varepsilon(s)\, ds\right| \le C \int\limits_{t_{i,k}}^{t} (t-s)\Big(1 + \varepsilon^{-2} e^{p_0\frac{s-1}{\varepsilon}}\Big)\, ds \le$$

$$\le \int\limits_{t_{n-1,k}}^{t_{n,k}} (t_{n,k} - s)\Big(1 + \varepsilon^{-2} e^{p_0\frac{s-1}{\varepsilon}}\Big)\, ds =$$

$$= \tfrac{C}{2}(t_{n,k} - t_{n-1,k})^2 + \tfrac{C}{\varepsilon} e^{p_0\frac{t_{n,k}-1}{\varepsilon}} \int\limits_{t_{n-1,k}}^{t_{n,k}} \frac{t_{n,k} - s}{\varepsilon} e^{p_0\frac{s - t_{n,k}}{\varepsilon}}\, ds \le$$

$$\le C_1\, \left(n^{-2} + e^{p_0\frac{t_{n,k}-1}{\varepsilon}}\right) \le C_1\, \left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + e^{p_0\frac{t_{n,k}-1}{\varepsilon}}\right). \tag{7.2.14}$$

Из (7.2.13)–(7.2.14) вытекает оценка

$$\|\tilde{u}(t) - u_\varepsilon(t)\|_{C[t_{i,k},\, t_{i+1,k}]} \le C_1\, \left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + e^{p_0\frac{t_{n,k}-1}{\varepsilon}}\right)\ \ i \le n-1. \tag{7.2.15}$$

Аналогично, с учетом того что $\varepsilon \le Cn^{\breve{\ }1}$, доказывается оценка

$$\varepsilon\, \|\tilde{u}'(t) - u'_\varepsilon(t)\|_{C[t_{i,k},\, t_{i+1,k}]} \le C_1\, \left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + e^{p_0\frac{t_{n,k}-1}{\varepsilon}}\right)\ \ i \le n-1.$$

Наконец, оценка (7.2.15) при $i \ge n$ вытекает из (7.2.2), того, что при этих i будет $t_{i+1,k}\breve{\ }t_{i,k} \ \le\ C\dfrac{\varepsilon \ln n}{n}$, и обычных оценок погрешности лагранжевой интерполяции.

Лемма доказана.

Теорема 1 вытекает из квазиоптимальности и оценки (7.2.12) при $p^k = p_0$:

$$\|u_\varepsilon^n - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq \|u_\varepsilon^n - u_\varepsilon\|_\varepsilon = \|P_\varepsilon^n u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq$$
$$\leq \|P_\varepsilon^n u_\varepsilon - \tilde{u}\|_\varepsilon + \|\tilde{u} - u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq (1+C)\,\|\tilde{u} - u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq$$
$$\leq C_2 \left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + e^{p_0 \frac{t_n - 1}{\varepsilon}} \right) = C_2 \left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + n^{-2} \right) \leq 2C_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 .$$

Докажем теорему 2. Алгоритм адаптации, суть которого состоит в процессе подбора параметра p^k, продолжает свою работу до тех пор, пока имеет место оценка

$$\mu_k > \frac{\ln^3 n}{n^2} \tag{7.2.16}$$

(см. шаг 8 алгоритма). Доказательство проведем в два этапа. На первом этапе будет показано, что оценки (7.2.16) достаточно для достижения точной границы пограничного слоя $\tilde{\varphi}$. На втором этапе рассматривается вопрос о том, не произойдет ли в процессе реализации алгоритма перехода точной границы при уменьшении параметра p^k.

Замечание 3. Поскольку в соответствии с оценкой (9) точная граница пограничного слоя ищется с точностью $O(\varepsilon \ln \ln n)$, то для удобства доказательства можно считать, что в качестве границы погранслоя ищется величина

$$\tilde{\psi} = 1 - \frac{2}{p_0}\varepsilon\,(\ln n - \ln \ln n), \tag{7.2.17}$$

которой соответствует значение параметра

$$\tilde{p}_0 = p_0 \frac{\ln n}{\ln n - \ln \ln n}. \tag{7.2.18}$$

Этап I. Зафиксируем $k \geq .1$

Лемма 3 *Пусть* $p^{k+1} \geq \tilde{p}_0 > 0$. *Тогда найдутся такие константы* $C > 0$, $C_3 > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, *что при* $\varepsilon n \leq C$, $n \geq n_0$ *будет справедливо неравенство*

$$\left\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\right\|_{C[\varphi_{k+1},\varphi_k]} \geq C_3\, e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}}. \tag{7.2.19}$$

Доказательство. Поскольку $|\varphi_{k+1} - \varphi_k| = \varepsilon \ln \ln n$, то достаточно доказать оценку

$$\left\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\right\|_{C[\varphi_k - C_1\varepsilon,\varphi_k]} \geq C_3 e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}}, \tag{7.2.20}$$

где константа $C_1 > 0$ такова, что $[\varphi_k - C_1\varepsilon,\, \varphi_k] \subset [t_{n-1,k},\, \varphi_k] = [t_{n-1,k},\, t_{n,k}]$, C_1 не зависит от ε, n. Такая C_1 найдется в силу условия (7.2.5) и определения сетки Шишкина. Докажем (7.2.20).

Асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(t)$ [43] имеет вид

$$u_\varepsilon(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \Pi u_0\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \Pi_1 \left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^2) = u_{\varepsilon,1}(t) + \Pi u_{\varepsilon,1}(t) + R(t,\varepsilon),$$

где $u_i(t) \in C^2[0,\,1]$ не зависят от ε, $\Pi u_0(\tau) = -u(1)e^{p_0\tau}$, $\Pi u_1(\tau) = Q(\tau)e^{p_0\tau} \in C^2(-\infty,\,0)$, где $\tau = (t-1)/\varepsilon$, $Q(\tau)$ — полином. Пусть $u_I(t)$, $u_{I,1}(t)$, $\Pi u_I(t)$, $R_I(t,\,\varepsilon)$ —- линейные интерполянты функций $u_\varepsilon(t)$, $u_{\varepsilon,1}(t)$, $\Pi u_{\varepsilon,1}(\tau)$, $R(t,\,\epsilon)$ на отрезке $[\varphi_k - C_1\varepsilon,\, \varphi_k]$. В силу гладкости интерполируемых функций и оценок погрешности линейной интерполяции будем иметь

$$\left\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\right\|_{C[\varphi_k - C_1\varepsilon,\, \varphi_k]} \geq \inf_{a,\, b\in\mathbb{R}} \|at + b - u\|_{C[\varphi_k - C_1\varepsilon,\, \varphi_k]} =$$
$$= \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \|at + b - (u_I - u_\varepsilon)\|_{C[\varphi_k - C_1\varepsilon,\, \varphi_k]} \geq \inf_{a,\, b\in R} (\|at + b - (\Pi u_I - \Pi u_{\varepsilon,1})\|_{C[\varphi_k - C_1\varepsilon,\, \varphi_k]} -$$
$$- \|u_{I,1} - u_{\varepsilon,1}\|_{C[\varphi_k - C_1\varepsilon,\, \varphi_k]} - \|R_I - R\|_{C[\varphi_k - C_1\varepsilon,\, \varphi_k]}) \geq$$
$$\geq \inf_{a,b\in\mathbb{R}} (\|at + b - (\Pi u_I - \Pi u_{\varepsilon,1})\|_{C[\varphi_k - C_1\varepsilon,\, \varphi_k]} - C\varepsilon^2) =$$
$$= \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\|at + b - (\Pi u_I - \Pi u_{\varepsilon,1})\|_{C[\varphi_k - C_1\varepsilon,\, \varphi_k]}\right) - C\varepsilon^2 =$$
$$= \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\|at + b - \Pi u_{\varepsilon,1}\|_{C[\varphi_k - C_1\varepsilon, \varphi_k]}\right) - C\varepsilon^2.$$

Но при достаточно малых $\varepsilon > 0$, учитывая также, что $u_0(1) \neq 0$, имеем

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \|at + b - \Pi u_{\varepsilon,1}\|_{C[\varphi_k - C_1\varepsilon,\, \varphi_k]} = \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \|a\tau + b - \big(-u_0(1) + \varepsilon Q(\tau)\big)\, e^{p_0\tau}\|_{C\left[\frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon} - C_1,\, \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}\right]} \geq$$
$$\geq C_3 \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \|a\tau + b + u_0(1)e^{p_0\tau}\|_{C\left[\frac{\varphi_k-1}{\varepsilon} - C_1,\, \frac{\varphi_k-1}{\varepsilon}\right]} \geq C_5 \|u_0(1)e^{p_0\tau}\|_{C\left[\frac{\varphi_k-1}{\varepsilon} - C_1,\, \frac{\varphi_k-1}{\varepsilon}\right]} \geq C_6 e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}}, \tag{7.2.21}$$

поскольку погрешность приближения экспоненты линейной функцией на отрезке длины порядка $O(1)$ не может быть меньше величины порядка C-нормы экспоненты на этом отрезке.

Наконец, в силу условия $p^{k+1} \geq \tilde{p}_0 > 0$ и (7.2.19)-(7.2.20) будет $\varphi_k = \varphi_{k+1} + \varepsilon \ln\ln n \geq \tilde{\psi} + \varepsilon \ln\ln n$, откуда

$$e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}} \geq e^{p_0 \frac{\tilde{\psi} - 1}{\varepsilon}} (\ln n)^{p_0} = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 (\ln n)^{p_0}. \tag{7.2.22}$$

Из (7.2.1)–(7.2.22) с учетом (7.2.4) при достаточно большом n вытекает (7.2.20). Лемма доказана.

Пусть $p^{k+1} \geq \tilde{p}_0$. Тогда в силу квазиоптимальности и леммы 2 аналогично (7.2.1) имеем

$$\left\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\right\|_{C[0,1]} \leq C_2 \left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}} \right). \tag{7.2.23}$$

Тогда в силу (7.2.19), (7.2.23), поскольку при $p^k \geq p^{k+1} \geq \tilde{p}_0$ в силу (7.2.22) будет $e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}} \geq C \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$, получаем

$$C_4 e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}} \leq \left\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\right\|_{C[\varphi_{k+1},\varphi_k]} \leq C_5\, e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}}. \tag{7.2.24}$$

Аналогично (7.2.23) имеем

$$\left\|u_{n,p^{k+1}} - u_\varepsilon\right\|_{C[0,1]} \leq C_6 \left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + e^{p_0 \frac{\varphi_{k+1} - 1}{\varepsilon}} \right). \tag{7.2.25}$$

Оценим величину μ_k, вычисляемую на шаге 6 алгоритма адаптации. С учетом (7.2.24), (7.2.25) будет

$$\begin{gathered}
\mu_k = \left\|u_{n,p^{k+1}} - u_{n,p^k}\right\|_{C[\varphi_{k+1},\varphi_k]} \geq \\
\geq \left\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\right\|_{C[\varphi_{k+1},\varphi_k]} - \left\|u_{n,p^{k+1}} - u_\varepsilon\right\|_{C[\varphi_{k+1},\varphi_k]} \geq \\
\geq C_4 e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}} - C_6 \left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + e^{p_0 \frac{\varphi_{k+1} - 1}{\varepsilon}} \right).
\end{gathered}$$

Но, так как $\varphi_k = \varphi_{k+1} + \varepsilon \ln \ln n$, с учетом (7.2.22) из (7.2.1) при достаточно большом n получим

$$\mu_k \geq C_7\, e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}}. \tag{7.2.26}$$

Наконец, из (7.2.22), (7.2.24), (7.2.25) вытекает $\mu_k \leq C_8\, e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}}$. Поэтому, с учетом (7.2.26), при $p^{k+1} \geq \tilde{p}_0$ будет

$$C_7\, e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}} \leq \mu_k \leq C_8\, e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}}. \tag{7.2.27}$$

Остановка алгоритма произойдет, если будет $\mu_k \leq \dfrac{\ln^3 n}{n^2}$, что в силу (7.2.27) означает, что $e^{p_0 \frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}} \leq C_9 \dfrac{ln^3 n}{n^2}$, откуда

$$\varphi_k \leq 1 - \tfrac{2}{p_0} \varepsilon \ln n + \tfrac{\varepsilon}{p_0}\big(\ln C_9 + \varepsilon \ln \ln n\big) = \varphi_\varepsilon + \tfrac{\varepsilon}{p_0}\big(\ln C_9 + \varepsilon \ln \ln n\big)$$

Таким образом, алгоритм не завершит свою работу, пока не будет выполнена оценка

$$\varphi_k \le \varphi_\varepsilon + O(\varepsilon \ln\ln n). \qquad (7.2.28)$$

Этап II. Поскольку граница погранслоя φ_k сдвигается с шагом $\varepsilon \ln\ln n$, а точная граница имеет вид $\varphi_\varepsilon = 1 - \frac{2}{p_0}\varepsilon \ln n$, то она будет достигнута не более чем за $O\left(\dfrac{\ln n}{\ln\ln n}\right)$ шагов с точностью (7.2.28). Докажем, что после достижения границы алгоритм остановит свою работу. Действительно, пусть $\varphi_k \le \varphi_\varepsilon$. Тогда и $\varphi_{k+1} \le \varphi_k \le \varphi_\varepsilon$. Тогда в силу леммы 2, того, что $e^{p_0\frac{\varphi_\varepsilon - 1}{\varepsilon}} = n^{-2}$, и квазиоптимальности будет иметь место оценка

$$\mu_k = \left\|u_{n,p^{k+1}} - u_{n,p^k}\right\|_{C[\varphi_{k+1},\varphi_k]} \le \left\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\right\|_{C[\varphi_{k+1},\varphi_k]} + \left\|u_{n,p^{k+1}} - u_\varepsilon\right\|_{C[\varphi_{k+1},\varphi_k]} \le$$

$$\le \left\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\right\|_\varepsilon + \left\|u_{n,p^{k+1}} - u_\varepsilon\right\|_\varepsilon \le C\,\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + n^{-2}\right) \le 2C\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2.$$

Но критерий выхода имеет вид $\mu_k \le \dfrac{\ln^3 n}{n^2}$, и при достаточно больших n он будет выполнен.

Докажем оценку (7.2.9). В силу леммы 2 и того, что $\varphi_k = t_{n,k}$, в случае $p^{k+1} \ge \tilde{p}_0$, учитывая (7.2.26), получаем

$$\left\|u_{n,p^{k+1}} - u_\varepsilon\right\|_{C[0,1]} \le C\,\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + e^{p_0\frac{\varphi_{k+1}-1}{\varepsilon}}\right) \le$$

$$\le C\,\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + e^{p_0\frac{\varphi_k - 1}{\varepsilon}}\right) \le C_1\,\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + \mu_k\right) \le C_2\frac{\ln^3 n}{n^2},$$

а при $p^{k+1} \le \tilde{p}_0$ будет и $e^{p_0\frac{\varphi_{k+1}-1}{\varepsilon}} \le e^{p_0\frac{\tilde{\psi}-1}{\varepsilon}} = \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^2$, и

$$\left\|u_{n,p^{k+1}} - u_\varepsilon\right\|_{C[0,1]} \le C\,\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + e^{p_0\frac{\varphi_{k+1}-1}{\varepsilon}}\right) \le 2C\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2.$$

Теорема 2 доказана.

7.2.2 Доказательство квазиоптимальности

Для доказательства квазиоптимальности воспользуемся схемой из [31]. Пусть D_ε – – множество функций из E_ε, имеющих в каждой точке конечные правосторонние производные. Определим функционалы $\psi_i^{n,\varepsilon}u = \langle u,\, f_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$, на функциях из D_ε выражениями, стоящими в левых частях (7.2.6). Их линейную оболочку обозначим через F^n_ε. В [31] было получено представление галеркинского проекта в виде

$$P^n_\varepsilon u = \sum_{i=1}^{2n-1} \langle u, \lambda_i^{n,\varepsilon}\rangle\, B_i^{n,\varepsilon},$$

где $B_i^{n,\varepsilon}$ — B-сплайны первой степени (7.2.5), $\{\lambda_i^{n,\varepsilon}\}$ —- биортогональный к $\{B_i^{n,\varepsilon}\}$ базис в F^n_ε, т.е.

$$\left\langle B_i^{n,\varepsilon},\, \lambda_j^{n,\varepsilon}\right\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

В [31] показано, что для доказательства квазиоптимальности достаточно установить существование $\{\lambda_j^{n,\varepsilon}\}$ и оценки

$$|\langle u, \lambda_i^{n,\varepsilon}\rangle| \le C_1 \left\|u\right\|_\varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, 2n-1, \tag{7.2.29}$$

справедливые для любой $u \in D_\varepsilon$ с константой C_1, не зависящей от u, i, ε, n. В [31] также было показано, что оценки (7.2.29) достаточно установить для частного случая $q(t,\varepsilon) \equiv 0$. Вначале построим вспомогательные функционалы $\mu_i^{n,\varepsilon}$. Пусть

$$\mu_j(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j f_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{7.2.30}$$

где $f_i(t)$ —- функции (7.2.5),

$$\alpha_j = \left[\frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} p(t)\, dt\right],\ j = i, i-1, \ldots, 2, 1. \tag{7.2.31}$$

Пусть $g_i(t,\varepsilon)$ — кусочно-линейная функция, интерполирующая функцию Грина $G_\varepsilon(t,\, t_i)$ краевой задачи $-\varepsilon u'' - (p(t)u)' = f(t)$, $u(0) = u(1) = 0$ в узлах разбиения Δ. Из явного вида функции Грина и оценок погрешности линейной интерполяции с шагом $O(\dfrac{\varepsilon \ln n}{n})$ вытекают оценки (7.2.32)

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial t^s} G_\varepsilon(t, t_i)\right| \le C \begin{cases} 1 + \varepsilon^{-s} e^{-p_0 \frac{t}{\varepsilon}}, & 0 \le t \le t_i, \\ 1 + \varepsilon^{-s} e_{-p_0 \frac{t - t_i}{\varepsilon}}, & t_i \le t \le 1, \qquad s = 0, 1, 2, \end{cases} \tag{7.2.32}$$

$$\left\|g_i(t,\varepsilon) - G_\varepsilon(t, t_i)\right\|_{C[t_n, 1]} \le C \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 \tag{7.2.33}$$

Положим

$$\mu_i(t,\varepsilon) = \begin{cases} \frac{g_i(t_n,\varepsilon)}{\alpha_n} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(t), & t \in [0, t_n], \\ g_i(t,\varepsilon), & t \in [t_n, 1], \qquad i = n,\, n+1,\, \ldots,\, 2n-1. \end{cases} \tag{7.2.34}$$

Пусть $\mu_i^{n,\varepsilon}$ — линейные функционалы на D_ε, определяемые формулами (7.2.30), (7.2.34) согласно (7.2.5).

Лемма 4 *Справедливы оценки*

$$|\langle u,\, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle| \le C\, \|u\|_\varepsilon\,, \tag{7.2.35}$$

где $u \in D_\varepsilon$ — произвольная, а C не зависит от u;

$$|\langle B_j,\, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle| \le C \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2,\ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, 2n-1;\ j \ne i,\, i+1,\, n, \tag{7.2.36}$$

$$|\langle B_{i+1},\, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle| \le C \max\left\{\varepsilon n,\, \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right\},\ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, 2n-1, \tag{7.2.37}$$

$$|\langle B_n,\, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle| \le C n^{-1},\ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, 2n-1;\ i \ne n,\, n-1, \tag{7.2.38}$$

$$|\langle B_i, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle| \ge C > 0,\ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, 2n-1. \tag{7.2.39}$$

Доказательство. Докажем оценки (7.2.36). Простой подсчет показывает, что

$$|\langle B_j, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle| = \frac{\varepsilon n}{\varphi_\varepsilon}\, |\alpha_{j+1} - 2\alpha_j + \alpha_{j-1}|,\ j < i \le n-1.$$

Но в силу (7.2.31) и предположения о гладкости $p(t)$ имеем $|\alpha_{j+1} - 2\alpha_j + \alpha_{j-1}| \le Cn^{-2}$. Отсюда с учетом (7.2.4) вытекает (7.2.36) для этих i, j. Аналогично из (7.2.32)–(7.2.34) получаем (7.2.36) при $i \ge n$, $j \le n-1$. При $i \le n-1$, $j \ge i+2$ будет $\langle B_j,\, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle = 0$ в силу дизъюнктности носителей. При $i \ge n$, $j \ge n+1$ в силу (7.2.34) будет

$$\langle B_j,\, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle = (\varepsilon B_j',\, g_i') + (p(t) B_j',\, g_j). \tag{7.2.40}$$

Поскольку по определению функции Грина

$$\left(\varepsilon B_j,\, \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial t}(t, t_i)\right) + \Big(p(t) B_j',\, G_\varepsilon(t, t_i)\Big) = B_j(t_i) = \delta_{ij}, \tag{7.2.41}$$

то из (7.2.40), (7.2.41) имеем

$$\langle B_j,\, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle = \left(\varepsilon B_j',\, g_i' - \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial t}(t, t_i)\right) + \Big(p(t) B_j',\, g_i - G_\varepsilon(t, t_i)\Big) + \delta_{ij}. \tag{7.2.42}$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $g_i(t_k) = G_\varepsilon(t_k, t_i)$, получаем, что первое слагаемое в правой части (7.2.42) равен нулю, т.е.

$$\langle B_j,\, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle = \bigl(p(t)B_j',\, g_i - G_\varepsilon(t,t_i)\bigr) + \delta_{ij}. \tag{7.2.43}$$

Из (7.2.33), (7.2.43) получаем (7.2.36) при $i \geq n$, $j \geq n+1$. Тем самым оценка (7.2.36) доказана.

Докажем (7.2.37). При $i \leq n-1$ будем иметь

$$|\langle B_{i+1},\, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle| = \bigl| -\varepsilon B_{i+1}'(t_i+0)\bigr| \leq C\varepsilon n,$$

а при $i \geq n$, аналогично (7.2.36), $|\langle B_{i+1},\, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle| \leq C\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^2$. Оценка (7.2.37) доказана.

Докажем (7.2.38). При $i \leq n-2$ будет $\langle B_n,\, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle = 0$ в силу дизъюнктивности носителей. При $i \geq n+1$ в силу (7.2.34) имеем

$$\langle B_n, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle = \varepsilon \tfrac{n}{\varphi_\varepsilon}\left(1 - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right) g_i(t_n,\varepsilon) + +g_i(t_n,\varepsilon)\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} p(t)B_n'(t)\,dt +$$

$$+\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \varepsilon B_n'(t)\, g_i'(t,\varepsilon)\,dt + \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} p(t)B_n'(t)\, g_i(t,\varepsilon)\,dt. \tag{7.2.44}$$

В силу предположений о гладкости $p(t)$ и определения α_i, будет $\left|1 - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right| \leq Cn^{-1}$, откуда с учетом (7.2.32)

$$\left|\varepsilon \frac{n}{\varphi_\varepsilon}\left(1 - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right) g_i(t_n,\varepsilon)\right| \leq C\varepsilon. \tag{7.2.45}$$

Далее заметим, что для $i \geq n+1$ в силу (7.2.32) при $t \in [t_{n-1},\, t_{n+1}]$ будет $|g_i'(t)| \leq C$, откуда с учетом гладкости $p(t)$

$$g_i(t_n,\varepsilon)\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} p(t)B_n'(t)\,dt = g_i(t_n,\varepsilon)p(t_n) + O(n^{-1}),$$

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} p(t)B_n'(t)g_i(t,\varepsilon)dt = -g_i(t_n,\varepsilon)p(t_n) + O(n^{-1}) \tag{7.2.46}$$

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \varepsilon B_n'(t)\, g_i'(t)\,dt = O(\varepsilon).$$

Из (7.2.44)–(7.2.46) вытекает (7.2.38) при $i \geq n+1$. Оценка (7.2.38) доказана.

Докажем (7.2.39). При $i \geq n+1$ (7.2.39) вытекает из (7.2.43) аналогично (7.2.36). При $i \leq n-1$ имеем

$$\langle B_i, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle = \varepsilon \frac{n}{\varphi_\varepsilon}\big(\alpha_i - \alpha_{i-1}\big) + \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} p(t)B_i'(t)\,dt = O(n^{-1}) + p(t_i) \geq p_0 + O(n^{-1}),$$

откуда получаем (7.2.39). При $i = n$ оценка (7.2.39) доказывается аналогично (7.2.38) с учетом того, что в этом случае в (7.2.46) все слагаемые будут одного знака. Оценки (7.2.35) вытекают из определения функционалов $\mu_i^{n,\varepsilon}$ и формул (7.2.31)–(7.2.33). Лемма доказана.

Докажем квазиоптимальность. Будем искать функционалы $\lambda_i^{n,\varepsilon}$ в виде

$$\lambda_i^{n,\varepsilon} = \sum_{j=1}^{2n-1} \beta_j^i\, \mu_j^{n,\varepsilon}. \tag{7.2.47}$$

Из условий биортогональности для отыскания $\{\beta_j^i\}$ получим систему линейных алгебраических уравнений с правой частью $e_i = \{e_j^i\}$, $e_j^i = \delta_{ij}$ и матрицей B с элементами $b_{ij} = \langle B_j,\, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle$. Будем считать, что $b_{ii} = \langle B_i, \mu_i^{n,\varepsilon}\rangle = 1$. При этом в силу (7.2.39) оценки (7.2.36)–(7.2.38) останутся в силе.

Пусть $\|B\|_1$ — норма матрицы, согласованная с l_1-нормой вектора. В силу леммы 4 матрицу B можно представить в виде $B = I + B_1$, где I — единичная матрица, и справедлива оценка $\|B\|_1 \leq C\left(\varepsilon n + \dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$. Поэтому при достаточно малых ε, n^{-1}, εn матрица B обратима и $\|B^{-1}\|_1 \leq C$. В этом случае для коэффициентов $\{\beta_j^i\}$ будет справедлива оценка $\sum\limits_{j=1}^{2n-1} \left|\beta_j^i\right| \leq 1$ и, следовательно, в силу (7.2.35) $\lambda_i^{n,\varepsilon}$ существуют и являются ограниченными на E_ε функционалами. Тем самым квазиоптимальность для задачи (7.2.1) доказана.

Замечание 4. Мы доказали равномерную ограниченность галеркинских проекторов для сетки Шишкина с параметром p_0. Однако в случае гладких, не зависящих от ε коэффициентов уравнения (7.2.1) при значении параметра $p^k : 0 < C_1 < p^k < C_2$ доказательство совершенно аналогично, а все константы в оценках можно считать не зависящими от параметра p^k.

Замечание 5. Аналогично [31] рассматриваемый проекционный метод, алгоритмы адаптации и теоремы 1 и 2 обобщаются на задачи вида

$$L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon u'' + p(t,\varepsilon)u' + q(t,\varepsilon)u = f(t),\ u(0) = u(1) = 0,$$

$$M_\varepsilon v \equiv -\varepsilon v'' + \big(p(t,\varepsilon)v\big)' + q(t,\varepsilon)v = g(t),\ v(0) = v(1) = 0,$$

в предположении, что выполнены условия $p(t,\varepsilon) \in C^4[0, 1]$, $q(t,\varepsilon) \in C^2[0, 1]$, $f(t)$, $g(t) \in C[0, 1]$, и

$$\left|p^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C(1 + \varepsilon^{-i}\exp(p_0(t-1)/\varepsilon)),\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4,\ p(t,\ \varepsilon) \ge p_0 > 0,$$

а решения задач Коши $p(t,\varepsilon)u_0' + q(t,\ \varepsilon)u_0 = f(t)$, $u_0(0) = 0$ и $(p(t,\ \varepsilon)v_0)' + q(t,\ \varepsilon)v_0 = g(t)$, $v_0(0) = 0$ отличны от нуля при $t = 1$.

7.2.3 Численный эксперимент

Рассмотрим две линейные задачи:

$$-\varepsilon u'' + u' + u = 1, \qquad u(0) = u(1) = 0, \tag{7.2.48}$$

$$\varepsilon v'' + p(t,\varepsilon)v' = p(t,\varepsilon), \qquad v(0) = v(1) = 0, \tag{7.2.49}$$

где $p(t,\ \varepsilon) = 1 + e^{\frac{t-1}{\varepsilon}}\left(0.5 + e^{\frac{t-1}{\varepsilon}}\right)^{-1}$

Начальное значение параметра сетки p^0, при котором начинался процесс адаптации, для обеих задач приняли равными 10, а шаг его изменения τ был выбран таким, что разность $\varphi_k - \varphi_{k+1} = \varepsilon \ln\ln n$, т.е. равным $\tau = \dfrac{(p^k)^2 \ln\ln n}{2\ln n + p^k \ln\ln n}$. Результаты расчетов представлены в табл. 1 и 2.

Здесь p^k — значение, при котором прекращается выполнение алгоритма на k-й итерации, Δt — погрешность приближенного значения границы пограничного слоя.

Таблица 1. Результаты для задачи (7.2.48)

№ итерации	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
$n = 16$	$p = 1.1967,\ k = 4,\ \Delta t = 0.000911$	$p = 1.1967,\ k = 4,\ \Delta t = 0.0000911$
$n = 32$	$p = 1.0034,\ k = 5,\ \Delta t = 0.000023$	$p = 1.0034,\ k = 5,\ \Delta t = 0.0000023$
$n = 64$	$p = 1.0452,\ k = 5,\ \Delta t = 0.000359$	$p = 1.0452,\ k = 5,\ \Delta t = 0.0000359$
$n = 128$	$p = 1.0943,\ k = 5,\ \Delta t = 0.000836$	$p = 0.9289,\ k = 6,\ \Delta t = 0.0000742$
$n = 256$	$p = 0.9739,\ k = 6,\ \Delta t = 0.000296$	$p = 0.9739,\ k = 6,\ \Delta t = 0.0000296$
$n = 512$	$p = 1.0200,\ k = 6,\ \Delta t = 0.000244$	$p = 1.0200,\ k = 6,\ \Delta t = 0.0000244$

Таблица 2. Результаты для задачи (7.2.49)

№ итерации	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
$n = 16$	$p = 1.1967$, $k = 4$, $\Delta t = 0.000911$	$p = 1.1967$, $k = 4$, $\Delta t = 0.0000911$
$n = 32$	$p = 1.0034$, $k = 5$, $\Delta t = 0.000023$	$p = 1.0034$, $k = 5$, $\Delta t = 0.0000023$
$n = 64$	$p = 1.0034$, $k = 5$, $\Delta t = 0.000359$	$p = 1.0034$, $k = 5$, $\Delta t = 0.0000359$
$n = 128$	$p = 1.0943$, $k = 5$, $\Delta t = 0.00083$	$p = 1.0943$, $k = 5$, $\Delta t = 0.000083$
$n = 256$	$p = 1.14644$, $k = 5$, $\Delta t = 0.00141$	$p = 0.9739$, $k = 6$, $\Delta t = 0.0000296$
$n = 512$	$p = 1.0200$, $k = 6$, $\Delta t = 0.00024$	$p = 1.0200$, $k = 6$, $\Delta t = 0.000024$

Данные вычислительных экспериментов согласуются с теоретическими результатами. Из таблиц видно, что двигаясь с шагом $\varepsilon \ln \ln n$, точка $t_{n,k}$ достигает точной границы погранслоя $\tilde{\varphi}$ с погрешностью, удовлетворяющей оценке (9), после чего алгоритм заканчивает свою работу.

7.3 Алгоритм адаптации сеток Н.С. Бахвалова для несамосопряженных сингулярно-возмущенных краевых задач

7.3.1 Постановки задач и предварительные сведения

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ краевые задачи

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv -\varepsilon u_\varepsilon'' + p(t,\varepsilon)u_\varepsilon' + q(t,\varepsilon)u_\varepsilon = f(t),\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0, \tag{7.3.1}$$

$$M_\varepsilon v_\varepsilon \equiv -\varepsilon v_\varepsilon'' + (p(t,\varepsilon)v_\varepsilon)' + q(t,\varepsilon)v_\varepsilon = g(t),\ v_\varepsilon(0) = v_\varepsilon(1) = 0. \tag{7.3.2}$$

Предположение 1. Предположим, что $p(t,\varepsilon) \in C^4[0,1]$, $q(t,\varepsilon) \in C^2[0,1]$, $f(t) \in C[0,1]$, $g(t) \in C[0,1]$, причем

$$|q^{(i)}(t,\varepsilon)| \le C(1 + \varepsilon^{-i}\exp(p_0(t-1)/\varepsilon)),\ i = 0,1,2,\ 0 < C_1 \le p_0 \le C_2,$$

$$p(t,\varepsilon) \ge p_0 > 0, |p^{(i)}(t,\varepsilon)| \le C(1 + \varepsilon^{-i}\exp(p_0(t-1)/\varepsilon)),\ i = 0,1,2,3,4.$$

При сделанных предположениях в [31] было установлено следующее утверждение.

Лемма 1 *Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существуют единственные решения $u_\varepsilon(t)$, $v_\varepsilon(t)$, задач (7.3.1)-(7.3.2), причем справедливы оценки*

$$|u_\varepsilon^{(i)}(t,\varepsilon)| \le C(1 + \varepsilon^{-i}\exp(p_0(t-1)/\varepsilon)),\ i = 0,1. \tag{7.3.3}$$

Если $p(t,\varepsilon)$, $q(t,\varepsilon)$, $f(t)$ – гладкие функции класса C^2, ограниченные вместе с производными до второго порядка равномерно по ε, то эти оценки справедливы и для $i = 2$.

Перейдем к описанию проекционно-сеточного метода. Разбиение Δ отрезка $[0,1]$ выберем по известной методике Бахвалова [25]. Пусть $\phi_\varepsilon = 1 - (2\varepsilon/p_0)|ln\varepsilon|$, $\psi_\varepsilon = \phi_\varepsilon + 2(1-\varepsilon)/p_0$. Определим функцию $\chi(y)$ формулой

$$\chi(y) = \begin{cases} y,\ y \in [0,\phi_\varepsilon] \\ 1 + \frac{2\varepsilon}{p_0}\ln\{(p_0/2)[y - \phi_\varepsilon + (2/p_0)\varepsilon]\},\ y \in [\phi_\varepsilon,\psi_\varepsilon]. \end{cases} \tag{7.3.4}$$

Очевидно, что $\chi(y) \in C^1[0,\psi_\varepsilon]$ и взаимно однозначно переводит $[0,\psi_\varepsilon]$ в $[0,1]$. Искомое разбиение определим в виде $\Delta = \chi(\Delta_\tau)$, где Δ_τ – вспомогательное разбиение отрезка

$[0,\psi_\varepsilon]$. Определим его. Пусть $\phi_\varepsilon = \tau_n$. На отрезке $[\phi_\varepsilon,\psi_\varepsilon]$ положим $\tau_i = \tau_{i-1} + (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)/n$, $i = n+1, n+2, \cdots, 2n+1$, а на отрезке $[0,\phi_\varepsilon]$ положим $\tau_i = \tau_{i+1} - \phi_\varepsilon/n$, $i = n-1, n-2, \cdots, 1, 0$. Здесь n – некоторое натуральное число. Будем предполагать, что

$$\varepsilon|\ln(\varepsilon)| \le C/n. \tag{7.3.5}$$

Узлы искомого разбиения Δ имеют вид

$$t_i = \chi(\tau_i),\ i = 0, \cdots, 2n.$$

Построенное разбиение равномерно с шагом $h = h_i = t_{i+1} - t_i$ на $[0,\phi_\varepsilon]$. Из определения разбиения вытекает, что

$$0 < C_1\varepsilon|\ln(\varepsilon)| \le h_n \le C_2\varepsilon|\ln\varepsilon|, \tag{7.3.6}$$

$$\frac{2\varepsilon}{p_0}\Big(i-n+2\Big)^{-1} \le h_i \le \frac{2\varepsilon}{p_0}\Big(i-n\Big)^{-1},\ i \ge n+1 \tag{7.3.7}$$

Действительно, для $i \ge n+1$ имеем, применяя формулу конечных приращений,

$$h_i = t_{i+1} - t_i = \chi(\tau_{i+1}) - \chi(\tau_i) = \frac{2\varepsilon}{p_0}\Bigg\{\ln\left(\frac{p_0}{2}\left[\tau_{j+1} - \phi_\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{p_0}\right]\right) -$$

$$-\ln\left(\frac{p_0}{2}\left[\tau_j - \phi_\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{p_0}\right]\right)\Bigg\} = \frac{2\varepsilon}{p_0}\left\{\ln\Big(\tau_{j+1} - \phi_\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{p_0}\Big) - \ln\Big(\tau_j - \phi_\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{p_0}\Big)\right\} =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{p_0}\left\{\ln\left((j-n+1)\frac{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}{n} + \frac{2\varepsilon}{p_0}\right) - \ln\left((j-n)\frac{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}{n} + \frac{2\varepsilon}{p_0}\right)\right\} =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{p_0}\frac{1}{(j-n+\theta_j)\frac{\psi_\varepsilon-\phi_\varepsilon}{n} + \frac{2\varepsilon}{p_0}} \cdot \frac{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}{n} = \frac{2\varepsilon}{p_0}\frac{1}{(j-n+\theta_j) + \frac{2\varepsilon n}{(\psi_\varepsilon-\phi_\varepsilon)p_0}},$$

где $0 < \theta_j < 1$. Отсюда в силу (7.3.5) при малых ε следует (7.3.7). Аналогично получаем (7.3.6).

Приближенные решения u_n, v_n задач (7.3.1), (7.3.2) будем искать в пространстве пробных функций

$$E = \{u \in C[0,1]:\ u(0) = u(1) = 0,\ u(t) =$$

$$= A_i + B_i(t-t_i),\ t \in [t_i, t_{i+1}],\ i = 0, 1, \cdots, 2n-1\}.$$

Введем пространство, которое будем называть пространством тестовых функций. Пусть

$$f_i(t) = \begin{cases} 1, \ t \in [t_{i-1}, t_i] \\ 0, \ t \bar{\in} [t_{i-1}, t_i], \ i = 1, 2, \cdots, n, \end{cases} \tag{7.3.8}$$

$$f_{n+1}(t) = \begin{cases} 1, \ t \in [t_n, t_{n+1}] \\ (t_{n+2} - t)/(t_{n+2} - t_{n+1}), \ t \in [t_{n+1}, t_{n+2}] \\ 0, \ t \bar{\in} [t_n, t_{n+2}], \end{cases} \tag{7.3.9}$$

$$f_{n+1}(t) = \begin{cases} (t - t_{i-1})/(t_i - t_{i-1}), \ t \in [t_{i-1}, t_i] \\ (t_{i+1} - t)/(t_{i+1} - t_i), \ t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, \ t \bar{\in} [t_{i-1}, t_{i+1}], \ i = n+2, n+3, \cdots, 2n-1. \end{cases} \tag{7.3.10}$$

Тестовое пространство определим как линейную оболочку функций $f_i(t)$.

Рассматриваемый метод для задачи (7.3.1) состоит в отыскании такой функции $u_n(t) \in E$, что

$$-\varepsilon u_n'(t_i + 0) + \varepsilon u_n'(t_{i-1} + 0) + (pu_n' + qu_n, f_i) = (f, f_i), \ i = 1, 2, \cdots, n, \tag{7.3.11}$$

$$\varepsilon u_n'(t_n + 0) + (\varepsilon u_n', f_{n+1}') + (pu_n' + qu_n, f_{n+1}) = (f, f_{n+1}), \tag{7.3.12}$$

$$(\varepsilon u_n', f_i') + (pu_n' + qu_n, f_i) = (f, f_i), \ i = n+2, n+3, \cdots, 2n-1. \tag{7.3.13}$$

Напомним, что $(.,.)$ означает скалярное произведение в $L_2[0,1]$. Аналогично ставится ПСМ-задача для (7.3.2).

Замечание 1. *В монографии [63, с. 43-45], показано, что разрешимость задачи метода Галеркина и сходимость приближенных решений определяется свойствами главной части оператора исходной задачи. Для нежестких задач это члены, содержащие старшие производные. В случае сингулярно возмущенной задачи при условии (7.3.5) главной частью оператора задачи на* $[0, \phi_\varepsilon]$ *является член* $p(t)u_\varepsilon'$, *а на* $[\phi_\varepsilon, 1]$, *как обычно,* $-\varepsilon u_\varepsilon''$, *поскольку там* $h_i \leq C\varepsilon$. *Поэтому на* $[0, \phi_\varepsilon]$ *тестовые функции – это базисные функции образа пространства непрерывных ломаных при действии оператора дифференцирования, а на* $[\phi_\varepsilon, 1]$ *тестовые функции выбираются традиционным образом. При этом члены вида* $\varepsilon u_\varepsilon(t_i + 0)$ *в (7.3.11) получаются при вычислении выражений вида* $\varepsilon(u', f_i')$, *в котором* f_i' *понимается в смысле теории обобщенных функций (как разность* δ*-функций).*

В [31] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1 *Найдутся такие числа* $\varepsilon_0 > 0$, n_0 *— натуральное,* $\gamma_0 > 0$, $C_1 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $n \geq n_0 : \ \varepsilon |\ln(\varepsilon)| \leq \frac{\gamma_0}{n}$ *существуют единственные решения* $u_n(t)$ *задачи (7.3.11)-(7.3.13) и* $v_n(t)$ *соответствующей задачи для (7.3.2), причем*

$$\|u_n - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq C_1 \inf_{u \in E} \|u - u_\varepsilon\|_{C[0,1]}, \tag{7.3.14}$$

$$\|v_n - v_\varepsilon\|_{C[0,1} \leq C_1 \inf_{u \in E} \|v - v_\varepsilon\|_{C[0,1]}. \tag{7.3.15}$$

Если $p(t, \varepsilon)$, $q(t, \varepsilon)$, $f(t)$ *— достаточно гладкие функции, ограниченные в* $C[0, 1]$ *равномерно по* ε *вместе со своими производными до второго порядка, то*

$$\|u_n - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq C_1/n^2, \ \ \|v_n - v_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq C_1/n^2. \tag{7.3.16}$$

7.3.2 Адаптация сетки и основной результат

Рассмотрим теперь алгоритм адаптации расчетной сетки в случае неизвестной границы пограничного слоя.

Предположение 2. *Для алгоритмов адаптации предположим, что* $p(t, \varepsilon) = p(t)$, $q(t, \varepsilon) = q(t)$ *не зависящие от* ε *функции, а решения задач Коши* $p(t)u_0' + q(t)u_0 = f(t)$, $u_0(0) = 0$ *и* $(p(t)v_0)' + q(t)v_0 = f(t)$, $v_0(0) = 0$ *отличны от нуля при* $t = 1$.

В этом случае главный член погранслойной составляющей асимптотического разложения [43] имеет вид $-u_0(1)e^{p_0 \frac{t-1}{\varepsilon}}$.

Определение 1. *Будем говорить, что* $\phi = \phi(\varepsilon, n)$ *есть* n*-граница пограничного слоя, если справедлива оценка* $\max\limits_{t \in [0,\phi]} e^{p_0 \frac{t-1}{\varepsilon}} \leq \frac{1}{n^2}$.

Определение 2. *Число* $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\varepsilon, n) = \sup\limits_{\phi} \phi(\varepsilon, n)$ *будем называть точной* n*-границей пограничного слоя.*

Очевидно, что

$$\tilde{\phi} = 1 - \frac{2}{p_0} \varepsilon \ln n. \tag{7.3.17}$$

Будем предполагать, что нам известно расположение пограничного слоя (окрестность точки $t = 1$), но неизвестна его точная n- граница (или же параметр p_0). Приведем алгоритм приближенного отыскания этой n- границы.

Замечание 2. *Из (7.3.5), (7.3.17) следует, что*

$$t_{n+1} = \chi(\tau_{n+1}) = 1 + \frac{2\varepsilon}{p_0} \ln \left(\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon \right) = \tilde{\phi} + O(\varepsilon). \tag{7.3.18}$$

Поэтому, если $\tilde{\phi}$ *ищется с точностью* $O(\varepsilon)$, *то можно положить* $\tilde{\phi} \approx t_{n+1}$.

Замечание 3. *Для рассматриваемых в данном разделе задач граница пограничного слоя известна и определяется значением* $p(1)$. *Однако в случае нелинейных задач или же жестких линейных систем высоких порядков (см. например, [43]) такая информация недоступна, либо требует отыскания границ спектра несимметричных матриц высоких порядков. Приведенный ниже алгоритм легко обобщается на такие задачи, а целью проделанной работы являлось строгое теоретическое исследование его свойств для модельных несамосопряженных задач.*

Шаг 1. Задаем некоторое достаточно большое $p^0 \geq p_0$. Полагаем $k = 0$.

Шаг 2. Определяем разбиение Δ_{n,p^k} как сетку Бахвалова, в построении которой параметр p_0 заменяем на p^k.

Шаг 3. Находим решение $u_{n,p^k}(t)$ на сетке Δ_{n,p^k}.

Шаг 4. Полагаем $p^{k+1} = p^k - \tau_k$, где τ_k выбирается так, чтобы $t_{n+1,k} - t_{n+1,k+1} = \varepsilon \ln\ln n$.

Шаг 5. Находим решение $u_{n,p^{k+1}}(t)$ на сетке $\Delta_{n,p^{k+1}}$.

Шаг 6. Вычисляем $\mu_k = \|u_{n,p^{k+1}}(t) - u_{n,p^k}(t)\|_{C[t_{n+1,k+1},t_{n+1,k}]}$, где $t_{n+1,k}$ - узел разбиения Δ_{n,p^k}.

Шаг 7. Если $k = 0$, то $k := k + 1$ и переход к шагу 2, иначе к шагу 8.

Шаг 8. Если $\mu_k > \frac{\ln n}{n^2}$, то $k := k + 1$ и переход к шагу 2, иначе $\tilde{\phi} \approx t_{n+1,k+1}$ и конец алгоритма.

Теорема 2 *Найдутся такие числа* $\varepsilon_0 > 0$, n_0 *– натуральное,* $\gamma_0 > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $C_3 > 0$, *что для любых* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $n \geq n_0$: $\varepsilon |\ln(\varepsilon)| \leq \frac{\gamma_0}{n}$ *алгоритм 1-8 закончит свою работу при* $k < C_1 \frac{\ln n}{\ln\ln n}$, *причем будут справедливы оценки*

$$|\tilde{\phi} - t_{n+1,k+1}| \leq C_2 \varepsilon \ln\ln n, \tag{7.3.19}$$

$$\|u_{n,p^{k+1}}(t) - u_\varepsilon(t)\|_{C[0,1]} \leq C_3 \frac{\ln n}{n^2}. \tag{7.3.20}$$

Замечание 4. *Теорема 2 сформулирована для задачи (7.3.1). Аналогичный результат справедлив и для задачи (7.3.2).*

7.3.3 Метод галеркинских проекций и доказательство основного результата

В [31] теорема 1 была доказана на основе представления решения задачи (7.3.1) (и аналогично задачи (7.3.2))в виде

$$u_n = P_\varepsilon^n u_\varepsilon, \tag{7.3.21}$$

где P_ε^n — оператор, ставящий в соответствие решению задачи (7.3.1) решение задачи (7.3.11)-(7.3.13). Этот оператор называется галеркинским проектором [11].

Пусть $E_\varepsilon = \{u \in C[0,1]: \ u' \in L_\infty[0,t_n],\, u(0) = u(1) = 0\}$ — пространство с нормой $\|u\|_\varepsilon = \varepsilon\|u'\|_{L_\infty[0,t_n]} + \|u\|_{C[0,1]}$, D_ε — подмножество функций из E_ε, имеющих кусочно-непрерывные справа ограниченные на $[0,1]$ производные с конечным числом точек разрыва первого рода. Пусть $NE = \{(\varepsilon, n)\}$ множество пар, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

В [31] было показано, что для пар $(\varepsilon, n) \in NE$, галеркинский проектор P_ε^n существует и является линейным в E_ε оператором, с областью определения D_ε.

Определение 3. *Метод Галеркина (7.3.11)-(7.3.13) будем называть квазиоптимальным на NE, если найдется такая константа $C > 0$, что для любой пары $(k, \varepsilon) \in NE$ галеркинский проектор существует, и справедливо неравенство*

$$\|P_\varepsilon^n\|_{E_\varepsilon \to E_\varepsilon} \le C.$$

В [31] была доказана квазиоптимальность метода Галеркина (7.3.11)-(7.3.13) для задачи (7.3.1) и аналогичного метода для задачи (7.3.2). Из квазиоптимальности и аппроксимационных свойств пространств E_ε^n непосредственно следует теорема 1.

Замечание 5. *В [31] была доказана равномерная ограниченность галеркинских проекторов для сетки Бахвалова с параметром p_0. Однако в случае гладких не зависящих от ε коэффициентов уравнений (7.3.1), (7.3.2), при значении параметра $p^k: \ 0 < C_1 \le p^k \le C_2$ доказательство совершенно аналогично, а все константы в оценках можно считать не зависящими от параметра p^k.*

Далее, опираясь на квазиоптимальность, будет доказана теорему 2.

Вначале изучим аппроксимационные свойства пространства E_ε^n. Если вместо p_0 при построении разбиения Δ используется другой параметр p^k, то соответствующее пространство обозначим $E_\varepsilon^n(p^k)$. Узлы соответствующего разбиения Δ_{n,p^k} обозначим $t_{i,k}$.

Лемма 2 *Пусть $p^k \ge p_0 > 0$ – параметр, определяющий сетку Бахвалова из алгоритма адаптации, а функция $u_\varepsilon(t)$ удовлетворяет оценкам (7.3.3) при $i = 0, 1, 2$. Тогда найдется такая функция $\tilde{u} \in E_\varepsilon^n(p^k)$, что*

$$\|\tilde{u}(t) - u_\varepsilon(t)\|_\varepsilon \le C_1 \left(n^{-2} + e^{p_0 \frac{t_{n+1,k} - 1}{\varepsilon}}\right). \tag{7.3.22}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{u}(t)$ – кусочно-линейная функция, интерполирующая $u_\varepsilon(t)$ в узлах сетки Δ_{n,p^k}. Тогда при $t \in [t_{i,k}, t_{i+1,k}]$, применяя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем

$$u_\varepsilon(t)-\tilde{u}(t)=u_\varepsilon(t)-u(t_{i,k})-\frac{u_\varepsilon(t_{i+1,k})-u_\varepsilon(t_{i,k})}{t_{i+1,k}-t_{i,k}}(t-t_{i,k})=$$

$$=\int_{t_{i,k}}^{t}(t-s)u''_\varepsilon(s)ds-\frac{t-t_{i,k}}{t_{i+1,k}-t_{i,k}}\cdot\int_{t_{i,k}}^{t}(t_{i+1,k}-s)u''_\varepsilon(s)ds. \qquad (7.3.23)$$

Далее для $i\le n$ в силу (7.3.3)-(7.3.6) при $t\in[t_{i,k},t_{i+1,k}]$ имеем

$$\left|\int_{t_{i,k}}^{t}(t-s)u''_\varepsilon(s)ds\right|\le C\int_{t_{i,k}}^{t}(t-s)\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}e^{p_0\frac{s-1}{\varepsilon}}\right)ds\le$$

$$\le C\int_{t_{n-1,k}}^{t_{n+1,k}}\left(t_{n+1,k}-s\right)\left(1+\tfrac{1}{\varepsilon^2}e^{p_0\frac{s-1}{\varepsilon}}\right)ds=\frac{C}{2}\Big(t_{n+1,k}-t_{n-1,k}\Big)^2+$$

$$+\frac{C}{\varepsilon}\int_{t_{n-1,k}}^{t_{n+1,k}}\tfrac{t_{n+1,k}-s}{\varepsilon}e^{p_0\frac{s-t_{n+1,k}}{\varepsilon}}ds\cdot e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}\le C_1\left(n^{-2}+e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}\right). \qquad (7.3.24)$$

Из (7.3.23)-(7.3.24) вытекает оценка

$$\|\tilde{u}(t)-u_\varepsilon(t)\|_{C[t_{i,k},t_{i+1,k}]}\le C_1\left(n^{-2}+e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}\right),\ i\le n. \qquad (7.3.25)$$

Аналогично, с учетом (7.3.5) доказывается оценка

$$\varepsilon\Big\|\tilde{u}'(t)-u'_\varepsilon(t)\Big\|_{C[t_{i,k},t_{i+1,k}]}\le C_1\left(n^{-2}+e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}\right),\ i\le n. \qquad (7.3.26)$$

Пусть $i\in[n+1,2n-1]$. Тогда из оценок погрешности лагранжевой интерполяции, (7.3.3), (7.3.7) (где p_0 заменяется на p^k) и условия $p^k\ge p_0$ имеем

$$\|\tilde{u}(t)-u_\varepsilon(t)\|_{C[t_{i,k},t_{i+1,k}]}\le Ch_i^2\left(1+\varepsilon^{-2}e^{p_0\frac{t_{i+1,k}-1}{\varepsilon}}\right)=Ch_i^2\left(1+\varepsilon^{-2}e^{-\frac{p_0}{\varepsilon}\sum_{j=i+2}^{2n-1}h_j}\right)\le$$

$$\le C_1\frac{\varepsilon^2}{(i-n)^2}\left(1+\varepsilon^{-2}e^{-\frac{p_0}{\varepsilon}\sum_{j=i+2}^{2n-1}\frac{2}{p^k}\frac{\varepsilon}{j-n+2}}\right)\le C_2\frac{\varepsilon^2}{(i-n)^2}\left(1+\varepsilon^{-2}e^{-2\Big(\ln(n+1)-\ln(i-n+2)\Big)}\right)=$$

$$=C_2\frac{\varepsilon^2}{(i-n)^2}\left(1+\varepsilon^{-2}\frac{(i-n+2)^2}{(n+1)^2}\right)\le C_3(\varepsilon^2+n^{-2})\le C_4\,n^{-2},\ i\ge n+1. \qquad (7.3.27)$$

Аналогично учетом условия (7.3.5) доказывается оценка

$$\varepsilon\|\tilde{u}'(t)-u'_\varepsilon(t)\|_{C[t_{i,k},t_{i+1,k}]}\le C_1\left(n^{-2}+e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}\right),\ i\ge n+1. \qquad (7.3.28)$$

Из (7.3.25)-(7.3.28) вытекает (7.3.22). Лемма доказана.

Докажем теорему 2. Алгоритм адаптации, суть которого состоит в процессе подбора параметра p^k продолжает свою работу до тех пор, пока имеет место оценка

$$\mu_k > \frac{\ln n}{n^2}. \tag{7.3.29}$$

(см. шаг 8 алгоритма). Доказательство проведем в два этапа. На первом этапе будет показано, что оценки (7.3.29) достаточно для достижения точной границы пограничного слоя $\tilde{\phi}$. На втором этапе рассматривается вопрос о том, не произойдет ли в процессе реализации алгоритма переход точной границы пограничного слоя при уменьшении параметра p^k.

I Этап. Зафиксируем $k \geq 1$.

Лемма 3 *Пусть $p^{k+1} \geq p_0 > 0$. Тогда найдутся такие константы $C_3 > 0$, $C > 0$, $n_0 \in N$, что при $\varepsilon n \leq C$, $n \geq n_0$ будет справедливо неравенство*

$$\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon(t)\|_{C[t_{n+1,k+1},t_{n+1,k}]} \geq C_3 e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \tag{7.3.30}$$

Доказательство. Поскольку $t_{n+1,k} - t_{n+1,k+1} = \varepsilon \ln\ln n$, то достаточно доказать оценку

$$\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon(t)\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon,t_{n+1,k}]} \geq C_3 e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}, \tag{7.3.31}$$

где константа $C_1 > 0$ такова, что $[t_{n+1,k} - C_1\varepsilon, t_{n+1,k}] \subset [t_{n,k}, t_{n+1,k}]$ и не зависит от ε, n. Такая C_1 найдется в силу условия (7.3.6). Докажем (7.3.31). Обозначим $\tau = \frac{t-1}{\varepsilon}$.

Асимптотическое разложение [43] решения $u_\varepsilon(t)$ имеет вид

$$u_\varepsilon(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \Pi u_0\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \Pi u_1\left(\tfrac{t-1}{\varepsilon}\right) + O\left(\varepsilon^2\right) = u_{\varepsilon,1}(t) + \Pi u_{\varepsilon,1}(t) + R(t,\varepsilon),$$

где $u_i(t) \in C_2[0,1]$, $\Pi u_i(\tau) \in C_2(-\infty, 0]$ не зависят от ε, $\Pi u_0(\tau) = -u_0(1)e^{p_0\tau}$, $\Pi u_1(\tau) = Q(\tau)e^{p_0\tau}$, где $Q(\tau)$ — полином, $\|R(t,\varepsilon)\|_{C[0,1]} \leq C\varepsilon^2$. Пусть $u_I(t)$, $u_{I,1}(t)$, $\Pi u_I(t)$, $R_I(t)$ — линейные интерполянты функций $u_\varepsilon(t)$, $u_{\varepsilon,1}(t)$, $\Pi u_{\varepsilon,1}(t)$, $R(t,\varepsilon)$ на отрезке $[t_{n+1,k} - C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]$. В силу гладкости интерполируемых функций и оценок погрешности линейной интерполяции будем иметь

$$\|u_{I,1}(t) - u_{\varepsilon,1})\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon,t_{n+1,k}]} \leq C\varepsilon^2,\ \|R(t,\varepsilon) - R_I(t,\varepsilon)\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon,t_{n+1,k}]} \leq C\varepsilon^2.$$

Поэтому

$$\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon(t)\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon,t_{n+1,k}]} \geq \inf_{a,b\in R} \|at + b - u_\varepsilon\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon,t_{n+1,k}]} =$$

$$= \inf_{a,b\in R} \|at + b - (u_I - u_\varepsilon)\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]} =$$

$$\inf_{a,b\in R} \Big\|at + b - (u_{I,1} - u_{\varepsilon,1}) - (\Pi u_I - \Pi u_{\varepsilon,1}) - (R(t,\varepsilon) - R_I(t,\varepsilon))\Big\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]} \geq$$

$$\geq \inf_{a,b\in R} (\|at + b - (\Pi u_I - \Pi u_{\varepsilon,1})\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]} - C\varepsilon^2) =$$

$$= \inf_{a,b\in R} (\|at + b - (\Pi u_I - \Pi u_{\varepsilon,1})\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]}) - C\varepsilon^2 =$$

$$= \inf_{a,b\in R} (\|at + b - \Pi u_{\varepsilon,1}\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]}) - C\varepsilon^2. \tag{7.3.32}$$

Но при достаточно малых $\varepsilon > 0$, имеем

$$\inf_{a,b\in R} (\|at + b - \Pi u_{\varepsilon,1}\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]}) =$$

$$= \inf_{a,b\in R} (\|a\tau + b - (-u_0(1) + \varepsilon Q(\tau))e^{p_0\tau}\|_{C\left[\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}-C_1, \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}\right]} \geq$$

$$\geq C_3 \inf_{a,b\in R} (\|a\tau + b - (-u_0(1))e^{p_0\tau}\|_{C\left[\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}-C_1, \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}\right]}. \tag{7.3.33}$$

Для завершения доказательства установим вспомогательное

Предложение 1. Пусть $M > 0$, $p_0 > 0$, α, β — константы, $\beta - \alpha \geq M$. Тогда найдется такая константа $m > 0$, зависящая только от M, p_0, что справедливо неравенство

$$\inf_{a,b\in R} (\|a\tau + b - e^{p_0\tau}\|_{C[\alpha,\beta]}) \geq m\, e^{p_0\beta}.$$

Действительно,

$$\inf_{a,b\in R} \left(\|a\tau + b - e^{p_0\tau}\|_{C[\alpha,\beta]}\right) = e^{p_0\beta} \inf_{a,b\in R} \left(\|a\tau + b - e^{p_0(\tau-\beta)}\|_{C[\alpha,\beta]}\right) =$$

$$= e^{p_0\beta} \inf_{a,b\in R} \left(\|at + b - e^{p_0 t}\|_{C[\alpha-\beta,0]}\right) \geq e^{p_0\beta} \inf_{a,b\in R} (\|at + b - e^{p_0 t}\|_{C[-M,0]})$$

Но $m = \inf_{a,b\in R} \left(\|at + b - e^{p_0 t}\|_{C[-M,0]}\right) > 0$, т.к. иначе было бы $e^{p_0 t} \equiv at + b$, причем m зависит только от M, p_0. Предложение доказано.

Из предложения 1 и (7.3.33), учитывая также, что $u_0(1) \neq 0$, имеем

$$\inf_{a,b\in R} \left(\|at + b - \Pi u_{\varepsilon,1}\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]}\right) \geq C_5 m \|u_0(1)e^{p_0\tau}\|_{C[\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}-C_1, \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}]}$$

$$\geq C_6\, e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \tag{7.3.34}$$

Наконец, в силу условия $p_{k+1} \geq p_0 > 0$ будет $t_{n+1,k} = t_{n+1,k+1} + \ln\ln n \geq t_{n+1} + \ln\ln n$, откуда с учетом замечания 2 и (7.3.17)

$$e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \geq e^{p_0\frac{t_{n+1}-1}{\varepsilon}} e^{p_0\ln\ln n} = e^{p_0\frac{\tilde\phi+O(\varepsilon)-1}{\varepsilon}} (\ln n)^{p_0} = e^{O(1)} e^{p_0\frac{\tilde\phi-1}{\varepsilon}} (\ln n)^{p_0} =$$

$$= e^{O(1)} e^{-2\ln n} (\ln n)^{p_0} \geq C_7 n^{-2} (\ln n)^{p_0}. \qquad (7.3.35)$$

Из (7.3.32)-(7.3.35) вытекает (7.3.30). Лемма доказана.

Пусть $p^{k+1} \geq p_0 > 0$, $\tilde{u}$ — функция из леммы 2. Тогда в силу квазиоптимальности, замечания 5 и леммы 2 имеем

$$\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq \|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\|_\varepsilon = \|P_\varepsilon^n u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq \|P_\varepsilon^n u_\varepsilon - \tilde{u}\|_\varepsilon + \|\tilde{u} - u_\varepsilon\|_\varepsilon =$$

$$\|P_\varepsilon^n (u_\varepsilon - \tilde{u})\|_\varepsilon + \|\tilde{u} - u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq \|(P_\varepsilon^n\|_{E_\varepsilon^n \to E_\varepsilon^n} + 1)\|\tilde{u} - u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq$$

$$\leq (C+1)\|\tilde{u} - u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq C_8 \left(n^{-2} + e^{p_0 \frac{t_{n+1,k} - 1}{\varepsilon}} \right). \qquad (7.3.36)$$

Тогда в силу (7.3.30), (7.3.36), поскольку при $p_{k+1} \geq p_0$ в силу (7.3.35) будет $e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \geq C n^{-2}$, получаем

$$C_9 e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \leq \|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\|_{C[t_{n+1,k+1}, t_{n+1,k}]} \leq C_{10} e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \qquad (7.3.37)$$

Аналогично (7.3.36) имеем

$$\|u_{n,p^{k+1}} - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq C_{11} \left(n^{-2} + e^{p_0 \frac{t_{n+1,k+1}-1}{\varepsilon}} \right). \qquad (7.3.38)$$

Оценим величину μ_k, вычисляемую на шаге 6 алгоритма адаптации. С учетом (7.3.37), (7.3.38) будет

$$\mu_k = \|u_{n,p^{k+1}} - u_{n,p^k}\|_{C[t_{n+1,k+1}, t_{n+1,k}]} \geq \|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\|_{C[t_{n+1,k+1}, t_{n+1,k}]} -$$

$$-\|u_{n,p^{k+1}} - u_\varepsilon\|_{C[t_{n+1,k+1}, t_{n+1,k}]} \geq C_9 e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} - C_{11} \left(n^{-2} + e^{p_0 \frac{t_{n+1,k+1}-1}{\varepsilon}} \right). \qquad (7.3.39)$$

Но так как $t_{n+1,k} = t_{n+1,k+1} + \ln\ln n$, то с учетом (7.3.35) из (7.3.39) при достаточно большом n получим

$$\mu_k \geq C_{12} e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}. \qquad (7.3.40)$$

Наконец, из (7.3.35), (7.3.37), (7.3.38) вытекает, что $\mu_k \leq C_{13} e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}$. Поэтому, с учетом (7.3.40), при $p^{k+1} \geq p_0 > 0$ будет

$$C_{11} e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \leq \mu_k \leq C_{12} e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}. \qquad (7.3.41)$$

Остановка алгоритма произойдет, если будет $\mu_k \leq \frac{\ln n}{n^2}$, что в силу (7.3.41) означает, что

$$e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \leq C_{13} \frac{\ln n}{n^2}, \qquad (7.3.42)$$

откуда с учетом замечания 2 $t_{n+1,k} \leq 1 - \frac{2}{p_0}\varepsilon \ln n + \frac{\varepsilon}{p_0}(\ln C_{14} + \ln\ln n) = \tilde{\phi} + \frac{2}{p_0}\varepsilon(lnC_{14} + \ln\ln n) + O(\varepsilon)$. Таким образом, алгоритм не завершит свою работу, пока не будет выполнена оценка

$$t_{n+1,k} \leq \tilde{\phi} + \frac{2}{p_0}\varepsilon \ln\ln n + O(\varepsilon). \tag{7.3.43}$$

<u>II Этап.</u> Поскольку граница погранслоя $t_{n+1,k}$ сдвигается с шагом $\varepsilon \ln\ln n$, а точная граница имеет вид $\tilde{\phi} = 1 - \frac{2}{p_0}\varepsilon \ln n$, то она будет достигнута не более, чем за $O(\frac{\ln n}{\ln\ln n})$ шагов с точностью (7.3.43). Докажем, что после достижения границы алгоритм остановит свою работу. Действительно, пусть $t_{n+1,k} \leq \tilde{\phi}$. При этом $t_{n+1,k} = \tilde{\phi} + O(\varepsilon \ln\ln n)$. Тогда в силу леммы 2, того, что $e^{p_0 \frac{\tilde{\phi}-1}{\varepsilon}} = n^{-2}$, и квазиоптимальности будет иметь место оценка

$$|\mu_k| \leq \|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq \|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq Cn^{-2}.$$

Но критерий выхода имеет вид $\mu_k \leq \frac{\ln n}{n^2}$, и при достаточно больших n он будет выполнен.

Докажем оценку (7.3.20). В силу (7.3.38), (7.3.42) и условия $t_{n+1,k+1} = t_{n+1,k} - \varepsilon \ln\ln n$ имеем

$$\|u_{n,p^{k+1}} - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq C_{11}(n^{-2} + e^{p_0 \frac{t_{n+1,k+1}-1}{\varepsilon}}) \leq C\frac{\ln n}{n^2}.$$

Теорема 2 доказана.

7.3.4 Численный эксперимент

Рассмотрим две линейные задачи

$$-\varepsilon u'' + u' + u = 1,\ u(0) = u(1) = 0 \tag{7.3.44}$$

$$-\varepsilon v'' + (p(t,\varepsilon)v)' = p(t,\varepsilon),\ v(0) = v(1) = 0 \tag{7.3.45}$$

где $p(t,\varepsilon) = 1 + e^{\frac{t-1}{\varepsilon}} \cdot (0,5 + e^{\frac{t-1}{\varepsilon}})^{-1}$.

Начальное значение параметра сетки p^0, при котором начинался процесс адаптации, для обеих задач приняли равными 10, а шаг его изменения выбран таким, что разность $t_{n+1,k} - t_{n+1,k+1} = \varepsilon \ln\ln n$, т.е.

$$p^{k+1} = \frac{2p^k \ln(\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon)}{2\ln(\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon) - p^k \ln\ln n}.$$

Результаты расчетов представлены в таблицах 1 и 2. В таблице 1 приведены данные для задачи (7.3.44), а в таблице 2 — для (7.3.45). Здесь p^k — значение, при котором прекращается выполнение алгоритма на k-й итерации, $\Delta t = |\tilde{\phi} - t_{n+1,k+1}|$ — погрешность приближенного значения точной границы пограничного слоя.

Данные вычислительных экспериментов согласуются с теоретическими результатами. Из таблиц видно, что двигаясь с шагом $\varepsilon \ln \ln n$, точка $t_{n+1,k}$ достигает точной границы погранслоя $\tilde{\phi}$ с погрешностью, удовлетворяющей оценке (7.3.19), после чего алгоритм заканчивает работу.

Таблица 7.1: Результаты расчетов для задачи (7.3.44)

	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
n=16	$k = 4$ $p^k = 1.19105987705427$ $\Delta t = 0.00088951104911$	$k = 4$ $p^k = 1.19615120602892$ $\Delta t = 00009093275481$
n=32	$k = 5$ $p^k = 0.99547168728069$ $\Delta t = 0.00003153065260$	$k = 5$ $p^k = 1.00262456857185$ $\Delta t = 0.00000181445016$
n=64	$k = 5$ $p^k = 1.03143622185818$ $\Delta t = 0.00025350975372$	$k = 5$ $p^k = 1.04379328663531$ $\Delta t = 0.00003489793646$
n=128	$k = 5$ $p^k = 1.07027343140011$ $\Delta t = 0.00063716206700$	$k = 5$ $p^k = 1.09181775283100$ $\Delta t = 0.00008160748703$
n=256	$k = 5$ $p^k = 1.10467448487700$ $\Delta t = 0.00105087715974$	$k = 6$ $p^k = 0.96998860181910$ $\Delta t = 0.00003431350182$
n=512	$k = 6$ $p^k = 0.95898765009500$ $\Delta t = 0.00053358007753$	$k = 6$ $p^k = 1.01268268491564$ $\Delta t = 0.00001562556698$

Таблица 7.2: Результаты расчетов для задачи (7.3.45)

	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
n=16	$k = 4$ $p^k = 1.19105987705427$ $\Delta t = 0.00088951104911$	$k = 4$ $p^k = 1.19615120602892$ $\Delta t = 00009093275481$
n=32	$k = 4$ $p^k = 1.21412395846338$ $\Delta t = 0.00122244040293$	$k = 4$ $p^k = 1.22263462293137$ $\Delta t = 0.00012621805263$
n=64	$k = 5$ $p^k = 1.03143622185818$ $\Delta t = 0.00025350975372$	$k = 5$ $p^k = 1.04379328663531$ $\Delta t = 0.00003489793646$
n=128	$k = 5$ $p^k = 1.07027343140011$ $\Delta t = 0.00063716206700$	$k = 5$ $p^k = 1.09181775283100$ $\Delta t = 0.00008160748703$
n=256	$k = 5$ $p^k = 1.10467448487700$ $\Delta t = 0.00105087715974$	$k = 6$ $p^k = 0.96998860181910$ $\Delta t = 0.00003431350182$
n=512	$k = 6$ $p^k = 0.95898765009500$ $\Delta t = 0.00053358007753$	$k = 6$ $p^k = 1.01268268491564$ $\Delta t = 0.00001562556698$

Литература

[1] *Abramsson L.R., Keller H.B., Kreiss H.O.* Difference approximation for singular perturbations of systems of ordinary differential equations // Numer. Math., 1974, 22, P. 367-391.

[2] *Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L.* The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, 1967.

[3] *Blatov I.A., Strygin V.V.* On best possible order of convergence estimates in the collocation method and Galerkin's method for singularly perturbed boundary value problems for systems of first order ordinary differential equations // Math. Comput. – 68 (1999). – P. 683-715.

[4] *Blatov I.A., Zadorin A.I., Kitaeva E.V.* An application of the exponential spline for the approximation of a function and its derivatives in the presence of a boundary layer // Journal of Physics: Conference Series.– 2018.– V. 1050.– 012012.

[5] *Demko S.* Inverses of band matrices and local convergence of spline projections // SIAM J. Numer. Anal. – 1977. – V. 14, № 4, P. 616-619.

[6] *Flaherty J.E., Mathon W.* Collocation methods for singularly perturbed boundary value problems.— Boundary and Inter. Lauers Comput. and Asympt. Meth. Proc. BAIL. I. Conf. Dublin, 1980. P.77-92.

[7] *Kellog R.B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points // Mathematics of computation. — 1978. — V. 32, № 144. — P. 1025–1039.

[8] *Lins T.* The Necessity of Shishkin Decompositions // Applied Mathematics Letters. – 2001. – V. 14, P. 891-896.

[9] *Liseikin V.D.* Grid generation methods. Springer, Berlin, 1999.

[10] *Miller J.J.H., O'Riordan E., and Shishkin G.I.* Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions (Revised Edition). Singapore: World Scientific, 2012.

[11] *Natterer F.* Uniform convergence of Galerkin method for splines on highly nonuniform meshes // Math. Comput. – 1977. – V.31. – P. 457-468.

[12] *Schoneberg I.J.* Constribution to the problem of approximatio of equidistant date by analytic function // Quart. Appl. Math., 1946, 4, P. 45-46, 112-141.

[13] *Scymczak W., Babuska I.* Adaptivity and error estimation for the finite element method applied to convection-diffusion problems // SIAM J. Numer. Anal. 1984, V. 21, No. 5, P. 910-954.

[14] *Stynes M., Roos H.-G.* The midpoint scheme // Appl. Numer. Math. 1997, 23, P. 361-374.

[15] *Stynes M., Riordan E.* L^1 and L^∞ uniform convergence of a differencew scheme for a semilinear singular perturbation problem // Numer. Math. 1987, V. 80, No. 5, P. 519-531.

[16] *Surla K., Herceg D.* Exponential spline difference scheme for singular perturbation promlem // Spline Numer. Anal. Conf. Int. Semin. ISAM-89, Weisig, April 24-28 1989 – Berlin, 1989, P. 171-180.

[17] *Volkov Yu.S.* Interpolation by splines of evendegree according to Subbotin and Marsden // Ukrainian Mathematical Journal. – 2014.– V. 66, № 7, P. 994-1012.

[18] *Zadorin A.I., Guryanova M.V.* Analogue of a Cubic Spline for a Function with a Boundary Layer Component // Proceedings of the Fifth Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, 2010. Rousse: Rousse University, 2011. P. 166-173.

[19] *Zadorin A.I.* Spline interpolation of functions with a boundary layer component // International Journal of Numerical Analysis and Modeling, series B. – 2011. – V. 2, № 2-3, P. 262-279.

[20] *Zadorin A. I., Zadorin N. A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Siberian Electronic Mathematical Reports.– 2012.– V. 9.– P. 445–455.

[21] *Zadorin Alexander, Tikhovskaya Svetlana* Formulas of numerical differentiation on a uniform mesh for functions with the exponential boundary layer // International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2019, v. 16, № 4, p. 590-608.

[22] *Zadorin A.I.* Interpolation Formulas for Functions with Large Gradients in the Boundary Layer and their Application // Modeling and Analysis of Information Systems, 2016, v. 23, № 3, p. 377-384.

[23] *Андреев В.Б., Коптева Н.В.* О равномерной по малому параметру сходимости монотонных трехточечных разностных схем // Дифф. уравн., 1998, 34, №7, С. 921-928.

[24] *Боглаев И.П.* Вариационно-разностная схема для краевой задачи с малым параметром при старшей производной // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1981. – Т. 21, N 4, С. 887-896.

[25] *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и мат.физики. – 1969. – Т. 9, № 4, С. 841-890.

[26] *Бахвалов Н.С.* Численные методы. Москва: Наука, 1975.

[27] *Блатов И.А., Китаева Е.В.* Сходимость метода адаптации сеток Н.С. Бахвалова для сингулярно возмущенных краевых задач // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2016. – Т. 19, № 1, С. 43–55.

[28] *Блатов И.А.* О методах неполной факторизации для систем с разреженными матрицами // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1993. – Т. 33, № 7, С. 819-836.

[29] *Блатов И.А.* О методе конечных элементов Галеркина для сингулярно возмущенных параболических начально-краевых задач // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, N 5, С. 661-669.

[30] *Блатов И.А., Стрыгин В.В.* Элементы теории сплайнов и метод конечных элементов для задач с пограничным слоем. Воронеж: ВГУ, 1997.

[31] *Блатов И.А.* О проекционном методе для сингулярно возмущенных краевых задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1990. – Т. 30, №7, С. 1031-1045.

[32] *Блатов И.А., Стрыгин В.В.* Сходимость метода Галёркина для нелинейной двухточечной сингулярно возмущенной краевой задачи в пространстве $C[a, b]$ // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1985. – Т. 25, № 7, С. 1001-1008.

[33] *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В.* Об интерполяции кубическими сплайнами функций с большими градиентами в пограничном слое // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2017. – Т. 57, № 1, С. 7-26.

[34] *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В.* Об интерполяции параболическим сплайном функций с большими градиентами в пограничном слое // Сиб. матем. журнал. – 2017. – Т. 58, № 4, С. 745-760.

[35] *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В.* О равномерной сходимости параболической сплайн-интерполяции на классе функций с большими градиентами в пограничном слое // Сиб. журнал вычисл. математики,– 2017.– Т. 20, № 2ю. С. 131–144.

[36] Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В. О равномерной по параметру сходимости экспоненциальной сплайн-интерполяции при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 2018.– Т. 58, № 3. С. 365–382.

[37] Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В. Аппроксимация функции и ее производных на основе кубической сплайн-интерполяции при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 2019.– Т. 59, № 3.– С. 367-379.

[38] *Блатов И.А.* Об оценках элеметов обратных матриц и о модификации метода матричной прогонки // Сибирский математический журнал. – 1992. – Т. 33, № 2, С. 10-21.

[39] *Блатов И.А., Добробог Н.В., Китаева Е.В.* Условная ε-равномерная ограниченность галеркинских проекторов и сходимость метода адаптации сеток для

сингулярно возмущенных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2016. – Т. 56, N 7, С. 1323-1334.

[40] *Блатов И.А., Добробог Н.В.* Условная ε-равномерная сходимость алгоритмов адаптации в методе конечных элементов для сингулярно возмущенных задач // Журн.вычисл. матем. и матем. физики. – 2010. – Т. 50, N 9, С. 1550-1568.

[41] *Бор К.Де.* Практическое руководство по сплайнам. Москва: Радио и связь, 1985.

[42] *Вайникко Г.М.* Компактная аппроксимация и приближенное решение уравнений. Тарту.: Изд-во Тартусского университета, 1970.

[43] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

[44] *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математический журнал. – 1957. – Т. 12, № 5, С. 3-122.

[45] *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. Москва: Наука, 1984.

[46] *Волков Ю.С.* О нахождении полного интерполяционного сплайна через B-сплайны // Сибирские электронные математические известия. – 2008. – Т. 5, С. 334-338.

[47] *Волков Ю.С.* Интерполяция сплайнами четной степени по Субботину и по Марсдену // Украинский математический журнал. – 2014. – Т. 66, № 7, С. 891-908.

[48] *Гильманов А.Н.* Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 2000.

[49] *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы для задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.

[50] *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. Москва: Наука, 1980.

[51] *Задорин А.И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2007. – Т. 10, № 3, С. 267-275.

[52] *Задорин А.И.* Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона-Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2015. – Т. 18, № 3, С. 289-303.

[53] *Задорин А.И.* Анализ формул численного дифференцирования на сетке Шишкина при наличии пограничного слоя // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2018. – Т. 21, № 3, С. 243-254.

[54] *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Квадратурные формулы для функций с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т. 51, № 11, С. 1952-1962.

[55] *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Аналог формул Ньютона-Котеса для численного интегрирования функций с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2016. – Т. 56, № 3, С. 368-376.

[56] *Зматраков Н.Л.* Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов // Труды МИАН. – 1975. – Т. 138, С. 71-93.

[57] *Зматраков Н.Л.* Необходимое условие сходимости интерполяционных параболических и кубических сплайнов // Матем. заметки. – 1976. – Т. 19, № 2, С. 165-178.

[58] *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6, № 2, С. 237-248.

[59] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1977. 512 с.

[60] *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2000. 295 с.

[61] *Лисейкин В.Д.* Обзор методов построения структурных адаптивных сеток // ЖВМ и МФ. – 1994. – Т. 36, N 1, С. 3-41.

[62] *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

[63] *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.

[64] *Миллер Дж., Риордан Е.* Метод конечных элементов для двухточечных краевых задач с сингулярными возмущениями // Числ. методы механ. сплошной среды. Новосибирск: ИТПМ АН СССР. – 1983. – Т. 14, N 2, С. 142-154.

[65] *Самарский А.А., Николаев В.С.* Методы решения сеточных уравнений. Москва: Наука, 1978.

[66] *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. Москва: Наука, 1976.

[67] *Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.* О равномерных константах Лебега локальных экспоненциальных сплайнов с равноотстоящими узлами // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т.21, № 4, С. 261–272.

[68] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II. М.: Наука, 1970.

[69] *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.

[70] *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.

[71] *Шишкин Г.И.* Сеточная аппроксимация параболического уравнения конвекции-диффузии на априорно адаптирующихся сетках; ε-равномерно сходящиеся схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008 – Т.48, N 6, С. 1014-1033.

[72] *Шишкин Г.И.* Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных краевых задач на локально переизмельчаемых сетках. Уравнение конвекции-диффузии// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000 – Т.40, N 5, С. 680-691.

[73] *Шишкин Г.И.* Апостериорно адаптируемые (по гардиенту решения) в аппроксимации сингулярно возмущенных уравнений конвекции-диффузии // Ж. Вычислительные технологии. – 2001. – Т. 6, N 1, С. 72-87

[74] *Шишкин Г.И.* Аппроксимация сингулярно возмущенных уравнений реакции-диффузии на адаптивных сетках // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13, N 3, С. 103-118 и 1999. – Т. 11, N 12, С. 87-104.

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики"
443010, г. Самара, ул. Льва Толстого, 23

Подписано в печать 05.06.2019 г. Формат 60x84/16
Бумага офсетная №1. Гарнитура Таймс.
Заказ №1012326. Печать оперативная. Усл. печ. л. 14,649. Тираж 100 экз.

Отпечатано в издательстве учебной и научной литературы
Поволжского государственного университета
телекоммуникаций и информатики
443090, г. Самара, Московское шоссе, 77, т. (846) 228-00-44