

Министерство образования Российской Федерации

Омский государственный университет

А.И. Задорин

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ
ДЛЯ ЗАДАЧ
С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Издание
ОмГУ

Омск
2002

УДК 519.62

ББК В162

3156

Задорин А.И.

3156 Разностные схемы для задач с пограничным слоем: Учебное пособие / ОмГУ. – Омск: Омск. гос. ун-т, 2002. – 118 с.

ISBN 5-7779-0313-4

Пособие написано на основе материалов спецкурса для студентов математического факультета. Исследуются способы построения разностных схем для сингулярно возмущенных краевых задач. Такие задачи соответствуют математическому моделированию ряда физических процессов. Рассматриваются начальные и краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Кратко рассмотрен случай эллиптических краевых задач. Классические разностные схемы при решении сингулярно-возмущенных задач теряют свойство сходимости. В пособии рассматриваются вопросы построения специальных разностных схем. В традиционных курсах вычислительных методов этот вопрос не рассматривается и в литературе почти не излагается.

Для студентов и аспирантов физико-математических специальностей.

Рецензент: доктор технических наук Е.Г. Андреева

Рекомендовано к изданию кафедрой математического моделирования и учебно-методической комиссией математического факультета ОмГУ

ISBN 5-7779-0313-4

©А.И. Задорин, 2002

©Омский госуниверситет, 2002

Содержание

Введение	4
1. Задача Коши для уравнения первого порядка	6
1.1. Анализ решения задачи с погранслоем	6
1.2. Анализ схемы Эйлера и построение сходящихся схем	10
2. Краевые задачи для уравнения второго порядка	18
2.1. Примеры различных погранслоев	19
2.2. Задача с одним пограничным слоем, анализ решения	21
2.3. Трехточечные разностные схемы	26
2.4. Анализ классических схем	30
2.5. Схема Ильина	32
2.6. Сплайновый метод построения схемы	37
3. Задача с двумя пограничными слоями	40
3.1. Схема экспоненциальной подгонки	40
3.2. Схема на сетке Бахвалова	46
4. Третья краевая задача для нелинейного уравнения	51
4.1. Анализ дифференциальной задачи	51
4.2. Построение разностной схемы	53
4.3. Линеаризация разностной схемы	58
5. Эллиптические сингулярно возмущенные краевые задачи	61
5.1. Уравнение типа реакция-диффузия в области с гладкой границей	63
5.2. Уравнение типа реакция-диффузия в прямоугольной области	66
5.3. Уравнение типа реакция-конвекция в прямоугольной области	67
5.4. Задача с параболическими пограничными слоями	71
Библиографический список	78

Введение

При математическом моделировании различных физических явлений возникают дифференциальные уравнения с малыми параметрами при старших производных. Это могут быть малые коэффициенты диффузии при моделировании распространения примесей, малые коэффициенты вязкости при моделировании течений жидкости, коэффициенты Льюиса и Пекле при моделировании горения. Довольно значительная часть дифференциальных уравнений, моделирующих различные физические процессы, содержит малые параметры при старших производных.

Оказывается, если положить малый параметр при старшей производной равным нулю, то решение вырожденной задачи не будет всюду близко к решению исходной задачи, даже если этот малый параметр сколь угодно мал. Связано это с тем, что при вырождении порядок уравнения понижается и для вырожденной задачи часть краевых условий остается невыполненной. В связи с этим в решении исходной задачи возникает пограничный слой, который в случае обыкновенного дифференциального уравнения может находиться около одного из концов интервала или внутри интервала (внутренний погранслой). В области пограничного слоя градиенты решения велики и растут с уменьшением малого параметра.

Для решения граничных задач с малым параметром при старших производных хорошо развит метод решения на основе разложения решения в асимптотические ряды по малому параметру. При этом для разложений используются различные методы (метод составных разложений, метод согласования внешних и внутренних разложений и другие). Асимптотические методы давно применяются в механике. К недостаткам метода асимптотических разложений можно отнести то, что погрешность разложений оценивается как некоторая степень параметра ε . Эта погрешность может быть существенной, если параметр ε не слишком мал. Асимптотические методы полезны для качественного анализа поведения решений, на основе чего могут строиться разностные схемы.

В настоящее время различные краевые задачи решаются на компьютере с применением вычислительных методов, а именно – разностных схем.

При применении классических разностных схем к решению задач с пограничным слоем оказывается, что эти схемы теряют свойство сходимости при некоторых соотношениях между малым параметром и шагом сетки. Связано это с тем, что точность этих схем оценивается как шаг сетки h в некоторой степени, умноженный на максимум модуля некоторой производной решения. А производные решения с уменьшением ε неограниченно растут в погранслоях. Таким образом, классические разностные схемы, изучаемые в традиционном курсе вычислительных методов, становятся непригодными при решении задач с пограничным слоем. Впервые вопрос о неприемлемости классических разностных схем и построении специальных схем, обладающих свойством сходимости независимо от значения малого параметра, был

поставлен в 1969 году в работах Н.С. Бахвалова [2] и А.М. Ильина [14].

В этих работах заложены два различных подхода к решению задач с пограничным слоем, которые в дальнейшем стали основополагающими. В [14] строится схема экспоненциальной подгонки, то есть схема, коэффициенты которой подобраны так, чтобы на экспоненциальной погранслоистой составляющей решения схема была точной. В [2] применяется известная центрально-разностная схема, но на сгущающейся в пограничных слоях сетке. Более подробно различные подходы к решению эллиптических сингулярно возмущенных краевых задач приведены в начале шестой главы, в которой рассматриваются эллиптические краевые задачи.

Данное пособие подготовлено в соответствии с программой годового спецкурса по численному решению задач с пограничным слоем и предназначено для того, чтобы восполнить пробел по построению нетрадиционных разностных схем, необходимых для решения задач с пограничным слоем.

Всюду под C и C_i будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов разностной сетки. Под нормой произвольной функции непрерывного аргумента $p(x)$ будем понимать $\|p\| = \max_x |p(x)|$, где x принадлежит области определения функции.

Под нормой произвольной сеточной функции p^h аналогичным образом будем понимать

$$\|p^h\|_{\Omega} = \max_{x \in \Omega} |p^h(x)|,$$

где Ω - некоторая сетка.

Подразумеваем, что $[u]$ – проекция функции непрерывного аргумента на сетку, в частности, $[u]_{\Omega}$ – проекция на сетку Ω .

1. Задача Коши для уравнения первого порядка

Будет рассмотрена задача Коши для линейного уравнения первого порядка с малым параметром при производной. Предварительно проведем оценку производных, показав, что решение содержит область больших градиентов. Затем будет исследовано, почему большие градиенты решения приводят к расходимости классической неявной схемы Эйлера, и показано, как для такой задачи построить равномерно сходящуюся разностную схему на основе метода экспоненциальной подгонки и на основе сгущения сетки в пограничном слое.

1.1. Анализ решения задачи с погранслоем

Понятие регулярных и сингулярных возмущений. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{du}{dx} = f(x, u, \varepsilon), \quad u(0, \varepsilon) = A. \quad (1.1)$$

Нас будет интересовать случаи, когда параметр ε близок к нулю. В соответствии с [2] справедлива

Т е о р е м а 1.1 . Пусть в области

$$G : \{0 \leq x \leq X, |u| \leq b, |\varepsilon| < \bar{\varepsilon}\}$$

функции $f(x, u, \varepsilon)$, $f'_u(x, u, \varepsilon)$ непрерывны и равномерно ограничены. Пусть решение задачи при $\varepsilon = 0$ $u_0(x)$ существует и единственно на $[0, X]$. Тогда при каждом достаточно малом ε решение $u(x, \varepsilon)$ также существует, единственно на $[0, X]$ и принадлежит G , и имеет место равномерный относительно $x \in [0, X]$ предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) \rightarrow u_0(x).$$

Определение. Возмущение по параметру ε называется регулярным, если выполнены условия теоремы 1.1 и равномерно по x $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) \rightarrow u_0(x)$.

В случае регулярного возмущения, если перейти от задачи (1.1) к вырожденной:

$$\frac{du_0}{dx} = f(x, u_0, 0), \quad u_0(0, 0) = A, \quad (1.2)$$

то $u(x, \varepsilon) \rightarrow u_0(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по x .

Рассмотрим задачу:

$$Lu(x) = \varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad x > 0, \quad u(0) = A, \quad (1.3)$$

$$\varepsilon > 0, \quad a(x) \geq \alpha > 0, \quad (1.3)$$

где a и f - достаточно гладкие функции.

Записывая (1.3а) в виде (1.1), получим

$$f(x, u, \varepsilon) = \frac{-a(x)u}{\varepsilon} + \frac{f(x)}{\varepsilon}.$$

Функция $f(x, u, \varepsilon)$ разрывна по ε при $\varepsilon = 0$, поэтому не выполнены условия теоремы 1.1 и возмущение по параметру ε не является регулярным.

Рассмотрим данный вопрос на примере:

$$\varepsilon u'(x) + u(x) = 1, \quad u(0) = 0.$$

Для данной задачи:

$$u(x) = 1 - \exp(-x/\varepsilon), \quad u_0(x) = 1.$$

Пусть $z(x) = u(x) - u_0(x)$. Тогда $z(x) = \exp(-x/\varepsilon)$. Понятно, что $z(x) \not\rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по x , в частности при всех $\varepsilon \quad z(0) = 1$.

Определение. Задачи для уравнений с малым параметром при старшей производной называются сингулярно возмущенными.

Поведение решения приведенной выше задачи при различных ε приведено на рис. 1. С уменьшением ε область больших градиентов (пограничный слой) сужается, а градиенты решения растут.

Рассмотрим в качестве примера начальную задачу для уравнения второго порядка, моделирующую движение маятника:

$$\varepsilon u'' + au' + ku = f(t), \quad u(0) = A, \quad u'(0) = B,$$

где u - угол отклонения маятника от вертикальной оси, ε - коэффициент инерции маятника.

Движение маятника определяется заданием начального положения и скорости. Полагая $\varepsilon = 0$, мы получаем уравнение более низкого порядка, решение которого определяется только заданием начального положения маятника. Тем самым заранее ясно, что даже для сколь угодно малых значений параметра ε , переходя к вырожденному уравнению первого порядка, мы не можем учесть начальную скорость маятника и по крайней мере в окрестности начального момента времени правильно моделировать колебания маятника не сможем.

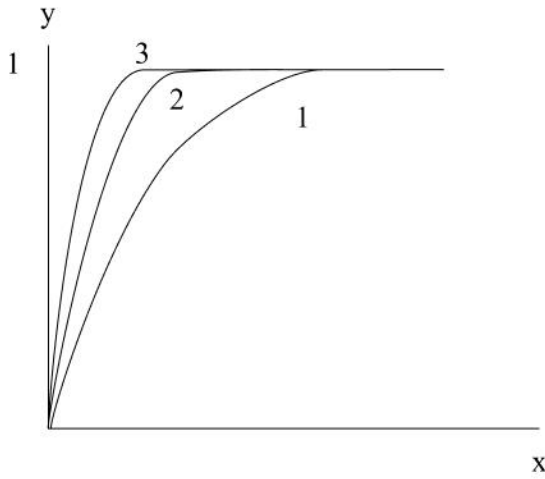


Рис. 1. Решение начальной задачи при различных ε :
 $\varepsilon = 0, 1$ (1); $\varepsilon = 0, 01$ (2); $\varepsilon = 0, 001$ (3)

Анализ задачи (1.3а).

Перейдем к исследованию задачи (1.3а).

Л е м м а 1.1 . Пусть $v(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, $X > 0$. Предположим, что $v(0) \geq 0$ и $Lv(x) \geq 0$ для всех $0 \leq x \leq X$. Тогда $v(x) \geq 0$ для всех $0 \leq x \leq X$.

Доказательство. Предположим, что существует x_1 такое, что $v(x_1) < 0$. Пусть x_0 таково, что $v(x_0) = 0$ и $v(x) < 0$ для всех $x \in (x_0, x_1)$. Тогда из теоремы о среднем значении следует, что существует $x_2 \in (x_0, x_1)$ такое, что

$$v'(x_2) = \frac{v(x_1) - v(x_0)}{x_1 - x_0} < 0.$$

Но $v(x_2) < 0$. Таким образом, $Lv(x_2) < 0$, что противоречит предположению. Это доказывает лемму.

Под принципом максимума (ПМ) для задачи (1.3а) понимаем то, что из условий $v(0) \geq 0$, $Lv(x) \geq 0$, $0 < x < X$ следует $v(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq X$.

Получим оценку устойчивости для оператора L .

Л е м м а 1.2 . Пусть $v(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция и $X > 0$. Тогда имеет место оценка:

$$|v(x)| \leq |v(0)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq X} |Lv(s)|, \quad 0 \leq x \leq X. \quad (1.4)$$

Доказательство. Определим

$$\Psi(x) = |v(0)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq X} |Lv(s)| \pm v(x).$$

Тогда $\Psi(0) \geq 0$, $L\Psi(x) \geq 0$ для всех $x \in (0, X)$. Используя лемму 1.1, получим $\Psi(x) \geq 0$ при всех $x \in [0, X]$. Это доказывает лемму.

Задав $v(x) = u(x)$, из леммы 1.2 получим оценку решения задачи (1.3):

$$|u(x)| \leq |u(0)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq X} |f(s)|, \quad 0 \leq x \leq X.$$

Из леммы 1.2 следует и единственность решения задачи (1.3). Действительно, если $p(x)$ и $q(x)$ - два решения, то, вводя $z(x) = p(x) - q(x)$, с учетом оценки (1.4), получим $z(x) = 0$.

Построение асимптотического приближения. Построим асимптотическое приближение с первым порядком по ε для решения задачи (1.3). Пусть $u_0(x)$ - решение вырожденной задачи:

$$a(x)u_0(x) = f(x).$$

Как мы выяснили выше, $|u(x) - u_0(x)|$ не является малой величиной в области пограничного слоя даже при малых значениях ε . С другой стороны, погранслоиную составляющую решения (функцию, задающую основной рост решения) можно учесть в явном виде и найти приближение к $u(x)$ на основе простой формулы:

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + [A - u_0(0)] \exp[-a(0)\varepsilon^{-1}x]. \quad (1.5)$$

Т е о р е м а 1.2 . Найдется C : $\|u - u_\varepsilon\| \leq C\varepsilon$.

Доказательство. Определим $z = u_\varepsilon - u$. Тогда

$$Lz = \varepsilon u'_0(x) + [a(x) - a(0)]\gamma \exp[-a_0\varepsilon^{-1}x],$$

где $a_0 = a(0)$; $\gamma = A - u_0(0)$.

Из теоремы о среднем значении следует: $a(x) - a(0) = a'(\xi)x$. Следовательно,

$$Lz(x) = \varepsilon u'_0(x) + \varepsilon a_0^{-1} a'(\xi) \gamma \tau \exp[-\tau],$$

где $\tau = a_0\varepsilon^{-1}x$. Учитывая, что $\tau \exp(-\tau) < 1$ при всех $0 < \tau < \infty$, получим, что для некоторой постоянной C выполнится $|Lz(x)| \leq C\varepsilon$. Используя лемму 1.2, получим утверждение теоремы.

В соответствии с теоремой 1.2 формула (1.5) для решения задачи (1.3) точна лишь при малых значениях ε . Получить решение задачи (1.3) с заданной точностью при произвольных значениях ε можно с помощью разностной схемы, о чем пойдет речь ниже. Предварительно оценим производные решения задачи (1.3).

Оценка производных. Получим оценки производных решения задачи (1.3).

Л е м м а 1.3 . Пусть функции a , f - достаточно гладкие. Тогда при всех j , соответствующих гладкости коэффициентов, выполнится:

$$|u^{(j)}(x)| \leq C[1 + \frac{1}{\varepsilon^j} \exp\{-\alpha\varepsilon^{-1}x\}]. \quad (1.6)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $j = 1$. Из (1.3) следует

$$\varepsilon u'(x) = f(x) - a(x)u(x).$$

Учитывая приближение (1.5) и лемму 1.2, получим:

$$\varepsilon u' = -a(x)\gamma \exp[-a_0\varepsilon^{-1}x] + O(\varepsilon).$$

Из этого соотношения следует (1.6) при $j = 1$. В случае других j можно использовать точное выражение решения задачи (1.3а). Для этого представим (1.3а) в виде

$$(\varepsilon u(x) \exp(-P(x)))' = f(x) \exp(-P(x)), \quad P(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(t) dt$$

и, интегрируя от 0 до x , получим:

$$u(x) = u(0) \exp(P(x)) + \varepsilon^{-1} \exp(P(x)) \int_0^x f(s) \exp(-P(s)) ds. \quad (1.7)$$

Дифференцируя (1.7) j раз, убеждаемся в справедливости (1.4). Лемма доказана.

В соответствии с оценкой (1.6), с уменьшением ε производные растут, в то время как область больших градиентов сужается, что соответствует рис. 1.

Выделим в $u(x)$ составляющую, задающую основной рост решения в пограничном слое. Для этого представим $u(x)$ в виде суммы:

$u(x) = V(x) + p(x)$, где

$$V(x) = \gamma \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} x), \quad \gamma = -\varepsilon a_0^{-1} u'(0), \quad p'(0) = 0.$$

Покажем, что основной рост решения задает функция $V(x)$.

Л е м м а 1.4 . *Найдется такое, что для $j = 1, 2, 3$*

$$|p^j(x)| \leq C[1 + \varepsilon^{1-j} \exp(-\alpha \varepsilon^{-1} x)].$$

Доказательство. Запишем уравнение на $p(x)$:

$$\varepsilon p' + a(x)p = F(x), \quad F(x) = f(x) + \gamma(a_0 - a(x))V(x).$$

Понятно, что $|F'(x)| \leq C_1$. Вводя $z = p'$ и дифференцируя последнее уравнение, получим:

$$\varepsilon z' + a(x)z = F'(x) - a'(x)p(x), \quad z(0) = 0.$$

Теперь на основании леммы 1.2 можно заключить:

$$\|z\| \leq \alpha^{-1} \|F'(x) - a'(x)p(x)\|.$$

Это доказывает лемму в случае $j = 1$. Повторяя дифференцирование, аналогичным образом можно получить оценки при других j . Лемма доказана.

1.2. Анализ схемы Эйлера и построение сходящихся схем

Анализ неявной схемы Эйлера. Перейдем к исследованию разностных схем для решения задачи (1.3а). Пусть Ω – равномерная сетка интервала $[0, X]$ с равномерным шагом h . Неявная схема Эйлера для задачи (1.3а) имеет вид [9]:

$$L_n^h u^h = \varepsilon \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} + a_n u_n^h = f_n^h, \quad u_0^h = A, \quad (1.8)$$

где $a_n = a(x_n)$, $f_n^h = f(x_n)$, $x_n \in \Omega$. Сеточное решение из (1.8) может быть найдено рекуррентно для всех n .

Л е м м а 1.5. *Для схемы Эйлера (1.8) справедлива оценка точности:*

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq \frac{\varepsilon h}{2\alpha} \max_s |u''(s)|. \quad (1.9)$$

Доказательство. Покажем, что для схемы (1.8) справедлив принцип максимума и из условий $v_0^h \geq 0$, $L_n^h v^h \geq 0$, $0 < n \leq N$ следует $v_n^h \geq 0$, $0 \leq n \leq N$. Запишем схему (1.8) в виде:

$$u_n^h = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + a_n h} u_{n-1}^h + \frac{1}{\varepsilon + a_n h} L_n^h u^h.$$

На основе этого соотношения можно убедиться в справедливости ПМ. Пусть $z^h = u^h - [u]_\Omega$. Тогда

$$L_n^h z^h = L_n^h u^h - L_n^h [u]_\Omega = Lu(x_n) - L_n^h [u]_\Omega.$$

Следовательно,

$$|L_n^h z^h| = \varepsilon \left| u_n' - \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \right| = \frac{\varepsilon h}{2} |u''(\theta)|.$$

Итак,

$$|L_n^h z^h| \leq \frac{\varepsilon h}{2} \max_s |u''(s)|.$$

Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_n^h = \frac{\varepsilon h}{2\alpha} \max_s |u''(s)| \pm z_n^h.$$

Тогда

$$\Psi_0^h \geq 0, \quad L_n^h \Psi^h \geq 0, \quad n = 1, \dots, N.$$

В силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$, что доказывает лемму.

В силу того, что в соответствии с оценкой (1.6) $|u''(x)| \leq C/\varepsilon^2$, из (1.9) не следует сходимости неявной схемы Эйлера при малых ε .

Покажем, что схема (1.8) не сходится равномерно по параметру ε . Для этого рассмотрим задачу:

$$\varepsilon u'(x) + u(x) = 0, \quad u(0) = 1.$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x).$$

Тогда $u(h) = \exp(-h/\varepsilon)$. Для схемы Эйлера $u^h(h) = \varepsilon/(\varepsilon + h)$. Тогда при $\varepsilon = h$ $u(h) = 1/e$, $u^h(h) = 0.5$. В случае равномерно по ε сходящейся разностной схемы должно быть при всех $x \in \Omega$

$$|u(x) - u^h(x)| \leq \eta(h), \quad \eta(h) \rightarrow 0, \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Следовательно, неявная схема Эйлера (1.8) не сходится равномерно по параметру ε .

Построение схемы экспоненциальной подгонки. Итак, классическая разностная схема (1.8) теряет свойство сходимости в случае сингулярно-возмущенной задачи. Перейдем к вопросу построения разностной схемы, сходящейся равномерно по параметру ε . При построении разностной схемы будем исходить из того, чтобы схема была точной на функции пограничного слоя, задающей основной рост решения. Такие схемы называют схемами экспоненциальной подгонки [10].

Итак, рассмотрим уравнение на функцию пограничного слоя $V(x)$:

$$\varepsilon V'(x) + a_0 V(x) = 0, \quad V(x) = \gamma \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} x), \quad a_0 = a(0).$$

Напишем схему для этого уравнения:

$$\tilde{\varepsilon} \frac{V_n^h - V_{n-1}^h}{h} + a_0 V_n = 0.$$

Подберем $\tilde{\varepsilon}$ таким образом, чтобы схема была точна на функции $V(x)$:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \frac{\tau}{\exp(\tau) - 1}, \quad \tau = a_0 h / \varepsilon.$$

Теперь выпишем схему для задачи (1.3а):

$$L_n^h u^h = \tilde{\varepsilon} \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} + a_n u_n^h = f_n^h, \quad u_0^h = A. \quad (1.10)$$

Л е м м а 1.6 . Для оператора L^h справедлив принцип максимума, то есть для произвольной сеточной функции ϕ^h из условий

$$\phi_0^h \geq 0, \quad L_n^h \phi^h \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \text{ следует } \phi_n^h \geq 0 \text{ при } n = 1, 2, \dots, N.$$

Доказательство. Перепишем схему (1.10) в виде:

$$\phi_n^h = \frac{h}{\tilde{\varepsilon} + a_n h} L_n^h \phi^h + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + a_n h} \phi_{n-1}^h.$$

Теперь доказательство следует индуктивно по n :

$$\phi_{n-1}^h \geq 0, \quad L_n^h \phi^h \geq 0 \rightarrow \phi_n^h \geq 0.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 1.7. Для произвольной сеточной функции v^h

$$\|v^h\|_{\Omega} \leq \alpha^{-1} \|L^h v^h\|_{\Omega} + |v_0^h|.$$

Доказательство. Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_n^h = \alpha^{-1} \|L^h v^h\|_{\Omega} + |v_0^h| \pm v_n^h.$$

Теперь утверждение леммы следует из принципа максимума.

Оценим точность схемы (1.10).

Т е о р е м а 1.3 . Найдется C такое, что

$$\|u^h - [u]_{\Omega}\| \leq Ch.$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - [u]_{\Omega}$. Тогда

$$L_n^h z^h = \varepsilon u'(x_n) - \tilde{\varepsilon} \frac{u_n - u_{n-1}}{h}, \quad u_n = u(x_n).$$

Воспользуемся представлением $u(x) = V(x) + p(x)$. Тогда,

$$\left| \varepsilon u'(x_n) - \tilde{\varepsilon} \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \right| \leq \left| \varepsilon V'(x_n) - \tilde{\varepsilon} \frac{V_n - V_{n-1}}{h} \right| + \left| \varepsilon p'(x_n) - \tilde{\varepsilon} \frac{p_n - p_{n-1}}{h} \right|.$$

Сначала оценим первое слагаемое этой суммы:

$$|\varepsilon V'(x_n) - \tilde{\varepsilon} \frac{V_n - V_{n-1}}{h}| = |\varepsilon V'(x_n) + a_0 V(x_n)| = 0.$$

Теперь оценим второе слагаемое. Имеем:

$$\left| \varepsilon p'(x_n) - \tilde{\varepsilon} \frac{p_n - p_{n-1}}{h} \right| \leq |\tilde{\varepsilon} - \varepsilon| \frac{|p_n - p_{n-1}|}{h} + \varepsilon \left| p'(x_n) - \frac{p_n - p_{n-1}}{h} \right|.$$

Сначала оценим $|\tilde{\varepsilon} - \varepsilon|$. Имеем:

$$|\tilde{\varepsilon} - \varepsilon| = \varepsilon \left| \frac{\exp(\tau) - \tau - 1}{\exp(\tau) - 1} \right|.$$

Учитывая, что τ принимает значения в интервале $(0, \infty)$, можно получить:

$$|\tilde{\varepsilon} - \varepsilon| \leq C\varepsilon h / \theta \leq Ch, \quad \theta = \max(h, \varepsilon).$$

Функция $p'(x)$ равномерно ограничена согласно лемме 1.4, поэтому:

$$|\tilde{\varepsilon} - \varepsilon| \frac{|p_n - p_{n-1}|}{h} \leq Ch.$$

Интегрированием по частям нетрудно убедиться, что для произвольной достаточно гладкой функции $r(x)$ справедливо представление:

$$r(x) = r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - s)r''(s)ds,$$

принимая $x = x_{n-1}$, $x_0 = x_n$, получим:

$$\varepsilon \left| p'(x_n) - \frac{p_n - p_{n-1}}{h} \right| = \frac{\varepsilon}{h} \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x-s)p''(s)ds \right| \leq \varepsilon \int_{x_{n-1}}^{x_n} |p''(s)|ds. \quad (1.11)$$

Учитывая лемму 1.4, получим:

$$\varepsilon \left| p'(x_n) - \frac{p_n - p_{n-1}}{h} \right| \leq C\varepsilon \int_{x_{n-1}}^{x_n} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}s)]ds \leq C_1h.$$

Таким образом, $|L_n^h z^h| \leq Ch$. Учитывая лемму 1.7, получим утверждение теоремы.

Схема Эйлера на сгущающейся сетке. Если решение дифференциальной задачи содержит погранслоиную область больших градиентов, то построить разностную схему со свойством равномерной сходимости можно как за счет подгонки схемы к погранслоиную составляющей решения, так и за счет сгущения сетки в пограничном слое. Впервые на специальном образом сгущающейся сетке построил и обосновал разностную схему Н.С. Бахвалов [2] в 1969 году. Такой подход оказался эффективным, так как он применим в ряде случаев, когда не существует равномерно сходящейся схемы экспоненциальной подгонки (например, в случае нелинейных уравнений и уравнений с так называемым "параболическим" пограничным слоем). С другой стороны, экспоненциальная подгонка приводит к усложнению разностной схемы.

Определим для задачи (1.3а) схему Эйлера на неравномерной сетке:

$$L_n^h u^h = \varepsilon \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h_n} + a_n u_n^h = f_n^h, \quad u_0^h = A, \quad (1.12)$$

где $h_n = x_n - x_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, N$, $x_0 = 0$, $x_N = X$.

Как и в [2], будем исходить из того, чтобы погрешность схемы (1.12) была одинаковой во всех узлах сетки. Погрешность схемы (1.12) определяется соотношением:

$$|L_n^h z^h| = \varepsilon \left| u'_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \right| \approx \frac{\varepsilon(x_n - x_{n-1})}{2} |u''(x_n)|. \quad (1.13)$$

Интервал $[0, X]$ разобьем на два, выделив область пограничного слоя в окрестности точки $x = 0$:

$$[0, X] = [0, \sigma] \cup [\sigma, X]. \quad (1.14)$$

Узлы $\{x_n\}$ определим с помощью функции распределения узлов $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) : [0, 1/2] \rightarrow [0, \sigma], \quad [1/2, 1] \rightarrow [\sigma, X], \quad x_n = \lambda(n/N).$$

Определим σ таким образом, чтобы при $x \geq \sigma$ вторая производная была равномерно ограниченной: $|u''(x)| \leq C$. В силу того, что в соответствии с леммой 1.3

$$|u^{(2)}(x)| \leq C[1 + \varepsilon^{-2} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x)], \quad (1.15)$$

$|u''(x)| \leq C$ при $\sigma = -C\varepsilon \ln(\varepsilon)$. Итак, пусть $t \leq \sigma$. В соответствии с (1.15) при $x \leq \sigma$ в оценке второй производной существенен член с экспонентой, поэтому, делая погрешность (1.13) малой равномерно по узлам, полагаем

$$\frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_{n-1})}{2\varepsilon} e^{-\alpha\varepsilon^{-1}\lambda(t_n)} = \frac{C}{2N}.$$

Применяя теорему о среднем значении и учитывая произвольность n , получим:

$$e^{-\alpha\varepsilon^{-1}\lambda(t)} d\lambda = C\varepsilon dt.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} e^{-\alpha\varepsilon^{-1}\lambda(t)} = -C\varepsilon t + C_1.$$

Учитывая условие $\lambda(0) = 0$, получим

$$\lambda(t) = -\frac{\varepsilon}{\alpha} \ln(1 - C\varepsilon t). \quad (1.16)$$

Рассмотрим случай $t > \sigma$. В этом случае с учетом (1.13) получим:

$$\frac{\varepsilon \lambda'(t)}{2N} = \frac{C\varepsilon}{N}.$$

Следовательно, $\lambda(t) = 2Ct + C_1$. Учитывая условия $\lambda(1/2) = \sigma$, $\lambda(1) = X$, получим:

$$\lambda(t) = 2(X - \sigma)t + 2\sigma - X. \quad (1.17)$$

Распределение узлов $x_n = \lambda(n/N)$ при $n \geq N/2$ согласно (1.17) соответствует равномерной сетке интервала $[\sigma, X]$ с шагом

$$H = (X - \sigma)/(N/2).$$

Пусть $M = N/2$ - количество неравномерных шагов интервала $[0, \sigma]$, где $\sigma = -\varepsilon\alpha^{-1} \ln(\varepsilon)$. С учетом (1.16) определим узлы сетки для $n \leq M$:

$$x_n = -\varepsilon\alpha^{-1} \ln\{1 - (1 - \varepsilon)n/M\}.$$

При этом $x_0 = 0$, $x_M = \sigma$. Вне погранслоя пусть сетка равномерна с шагом $H = (X - \sigma)/M$.

Т е о р е м а 1.4 . На построенной сетке Ω схема Эйлера (1.12) равномерно сходится и для некоторой постоянной C

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq \frac{C}{N},$$

где N - количество шагов сетки.

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - [u]$. Тогда:

$$|L_n^h z^h| \leq \varepsilon \left| u'(x_n) - \frac{u_n - u_{n-1}}{h_n} \right|,$$

где $u_n = u(x_n)$, $h_n = x_n - x_{n-1}$. Учитывая оценки (1.6) и (1.11), получим:

$$\begin{aligned} |L_n^h z^h| &\leq \varepsilon \int_{x_{n-1}}^{x_n} |u''(s)| ds \leq \varepsilon \int_{x_{n-1}}^{x_n} [1 + \varepsilon^{-2} \exp(-\alpha \varepsilon^{-1} s)] ds = \\ &= \varepsilon h_n + \alpha^{-1} [\exp(-\alpha \varepsilon^{-1} x_{n-1}) - \exp(-\alpha \varepsilon^{-1} x_n)]. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая для n .

1. Пусть $n \leq M$. Тогда согласно выбору узлов сетки

$$|L_n^h z^h| \leq \varepsilon h_n + \frac{1 - \varepsilon}{\alpha} \frac{1}{M} \leq \frac{C}{M} = \frac{2C}{N}.$$

Мы учли, что из определения $h_n = x_n - x_{n-1}$ следует $h_n \leq C/M$.

2. Пусть $n > M$. Тогда $n - 1 \geq M$. В этом случае

$$|L_n^h z^h| \leq C \exp(-\alpha \varepsilon^{-1} x_M) [1 - \exp(-\alpha \varepsilon^{-1} H)].$$

При этом

$$\exp(-\alpha \varepsilon^{-1} x_M) = \varepsilon, \quad |1 - \exp(-\alpha \varepsilon^{-1} H)| \leq C \frac{H}{H + \varepsilon}.$$

Следовательно, $|L_n^h z^h| \leq CH \leq C_1/N$. Теперь, учитывая лемму 1.7, получим

$$\|z^h\| \leq \alpha^{-1} \|L^h z^h\| \leq \frac{C}{N}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что если не делать разбиение интервала на два и выбрать равномерный шаг h достаточно большим, $h \geq -\varepsilon \alpha^{-1} \ln(\varepsilon)$, то схема Эйлера (1.12) будет равномерно сходиться с точностью $O(h)$. Связано это с тем, что узлы сетки в этом случае не попадают в пограничный слой и при всех n имеет место второй случай теоремы 1.4.

Сетка Шишкина. Исходим из разбиения исходного интервала $[0, X]$ на два в соответствии с (1.14). На каждом из этих интервалов в соответствии с [23] сетка берется равномерной, с мелкими шагами в пограничном слое и крупными вне его. Итак, исходя из (1.14), определим:

$$\sigma = \varepsilon \alpha^{-1} \ln N, \quad h = \frac{\sigma}{N/2}, \quad H = \frac{X - \sigma}{N/2}. \quad (1.18)$$

Т е о р е м а 1.5 . На сетке Шишкина Ω схема Эйлера (1.12) равномерно сходится и для некоторой постоянной C

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq \frac{C}{N} \ln N,$$

где N – количество шагов сетки.

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - [u]_\Omega$, $n \leq N/2$. Тогда с учетом (1.11),(1.13)

$$|L_n^h z^h| = \varepsilon \left| u'_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \right| \leq \varepsilon \int_{x_{n-1}}^{x_n} |u''(s)| ds. \quad (1.19)$$

Учитывая оценку производной (1.6), получим:

$$|L_n^h z^h| \leq C\varepsilon \int_{x_{n-1}}^{x_n} [1 + \frac{1}{\varepsilon^2} \exp\{-\alpha\varepsilon^{-1}x\}] dx. \quad (1.20)$$

С учетом (1.18)

$$|L_n^h z^h| \leq C \frac{h}{\varepsilon} \leq \frac{C}{N} \ln N. \quad (1.21)$$

Остается рассмотреть случай $n > N/2$. В этом случае из (1.20) следует

$$\begin{aligned} |L_n^h z^h| &\leq CH + \frac{C}{\varepsilon} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \exp\{-\alpha\varepsilon^{-1}x\} dx = CH + \frac{C}{\alpha} [e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1}} - e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x_n}] = \\ &= CH + \frac{C}{\alpha} e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1}} [1 - e^{-\alpha\varepsilon^{-1}H}] \leq CH + \frac{C}{\alpha} e^{-\ln N} \leq \frac{C}{N}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Учитывая, что $\|z^h\| \leq \alpha^{-1} \|L^h z^h\|$, используя оценки (1.21),(1.22), приходим к утверждению теоремы.

Итак, из сравнения теорем 1.4 и 1.5 следует, что использование сетки Шишкина приводит к некоторой потере точности. Но необходимо учесть, что при больших N величины $1/N$ и $\ln(N)/N$ одного порядка, поэтому использование сетки Шишкина предпочтительно из-за ее простоты. Кроме этого, использование равномерных сеток на обоих интервалах делает разностную схему более устойчивой к ошибкам округлений.

Сплайновый метод построения схемы. Рассмотрим способ построения схемы на основе замены коэффициентов уравнения на кусочно-постоянные. Замена коэффициентов на постоянные на каждом сеточном интервале позволяет найти точное решение в явном виде. Исходя из требования гладкости решения, составленного из решений на каждом сеточном интервале, получим требуемую разностную схему.

Пусть Ω - произвольная сетка, в общем случае неравномерная. Пусть $\Delta_n = (x_{n-1}, x_n]$. Перейдем от (1.3а) к задаче с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$\bar{L}\bar{u}(x) = \varepsilon \bar{u}'(x) + \bar{a}(x)\bar{u}(x) = \bar{f}(x), \quad \bar{u}(0) = A, \quad (1.23)$$

где при $x \in \Delta_n$ $\bar{a}(x)$, $\bar{f}(x)$ - константы,

$$\bar{a}(x) = a(x_{n-1}), \quad \bar{f}(x) = f(x_{n-1}).$$

На каждом интервале Δ_n решение задачи (1.23) выпишем в явном виде:

$$\bar{u}(x) = \frac{f_{n-1}^h}{a_{n-1}} + (\bar{u}_{n-1} - \frac{f_{n-1}^h}{a_{n-1}}) \exp(-a_{n-1}\varepsilon^{-1}(x - x_{n-1})), \quad f_n^h = f(x_n). \quad (1.24)$$

Исходя из того, чтобы, как и исходная функция $u(x)$, функция $\bar{u}(x)$, составленная из кусочков, была непрерывно-дифференцируемой на всем интервале $[0,]$, при всех n получим:

$$\lim_{x \rightarrow x_n - 0} \bar{u}'(x) = \lim_{x \rightarrow x_n + 0} \bar{u}'(x).$$

Подставляя в эти соотношения производные из (1.24), получим разностную схему:

$$u_n^h = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} u_{n-1}^h - \frac{f_{n-1}^h}{a_n} \right) e^{-a_{n-1} \varepsilon^{-1} h_n} + \frac{f_n^h}{a_n}, \quad u_0^h = A, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.25)$$

Оценим точность схемы (1.25).

Т е о р е м а 1.6 . *Найдется C :*

$$\|u^h - [u]\|_{\Omega} \leq C \max_n h_n.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что по построению схема (1.25) точна на функции $\bar{u}(x)$. Остается оценить $\|u - \bar{u}\|$. Пусть $z = u - \bar{u}$. Тогда

$$\bar{L}z(x) = (\bar{a}(x) - a(x))u(x) + f(x) - \bar{f}(x).$$

Учитывая, что согласно лемме 1.2 $\|u\| \leq C$, получим:

$$|\bar{L}z(x)| \leq C \max_n h_n.$$

Используя оценку

$$\|z\| \leq \frac{\|\bar{L}z\|}{\alpha} + |z(0)|,$$

получим утверждение теоремы.

Принимая в (1.24) $x = x_n$, получим разностную схему:

$$u_n^h = \frac{f_{n-1}^h}{a_{n-1}} + \left(u_{n-1}^h - \frac{f_{n-1}^h}{a_{n-1}} \right) \exp(-a_{n-1} \varepsilon^{-1} h_n), \quad u_0^h = A, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

По аналогии с теоремой 1.6 можно обосновать сходимость этой схемы.

2. Краевые задачи для уравнения второго порядка

В данной главе будут рассмотрены краевые задачи для уравнений второго порядка. Сначала будут рассмотрены различные примеры пограничных слоев в зависимости от знака коэффициента при первой производной. Затем будет подробно рассмотрена краевая задача с одним экспоненциальным пограничным слоем.

2.1. Примеры различных погранслоев

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u'' + a(x)u' - b(x)u = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B$$

в предположении $b(x) \geq 0, 1 \gg \varepsilon > 0$. Поведение решения существенно зависит от знака $a(x)$.

1) $a(x) \geq \alpha > 0$.

Пограничный слой расположен у левой границы интервала. Схематично поведение решения отражено на рис. 2.

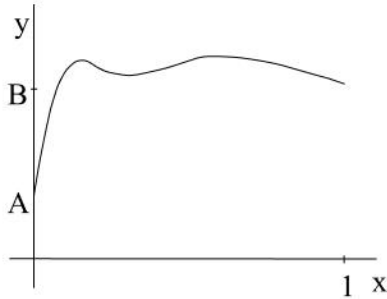


Рис. 2. Пограничный слой у левого конца интервала

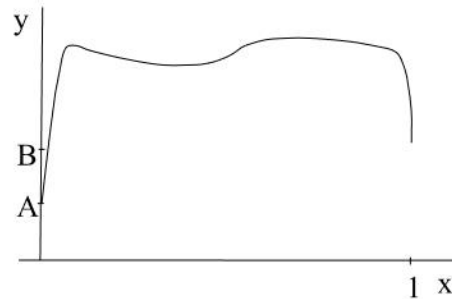


Рис. 3. Решение с двумя пограничными слоями

2) $a(x) \leq -\alpha < 0$.

Пограничный слой расположен у правой границы интервала (заменой x на $-x$ мы приходим к первому случаю).

3) $a(x) = 0$.

В данном случае при вырождении теряются оба краевых условия, поэтому пограничные слои будут около обоих концов интервала. Это отражено на рис. 3.

4) $a(x_0) = 0, 0 < x_0 < 1, a'(x_0) > 0$.

В этом случае решение задачи имеет внутренний пограничный слой. До точки x_0 при малых ε решение близко к решению вырожденной задачи с начальным условием $u(0) = A$, а после этой точки - к решению вырожденной задачи с начальным условием $u(1) = B$. В случае задачи

$$\varepsilon u'' + (x - 1/2)u' = 0, \quad u(0) = A, \quad u(1) = B$$

решение схематично показано на рис. 4.

5) $b(x) = 0, f(x) = 0, a(x_0) = 0, 0 < x_0 < 1, a'(x_0) < 0$.

Решение задачи в этом случае всюду внутри интервала близко к нулю и имеет погранслои у концов интервала. Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon u'' - (x - 1/2)u' = 0, \quad u(0) = A, \quad u(1) = B.$$

Решение этой задачи содержит, как показано на рис. 5, два пограничных слоя.

б) $a(x_0) = 0$, $0 < x_0 < 1$, $a'(x_0) > 0$, $b(x) > 0$. В этом случае решение соответствует случаю 4) и содержит угловой внутренний пограничный слой. Рассмотрим пример:

$$\varepsilon u'' + xu' - u = 0, \quad u(-1) = 1, \quad u(1) = 2.$$

Решение этой задачи изображено на рис. 6.

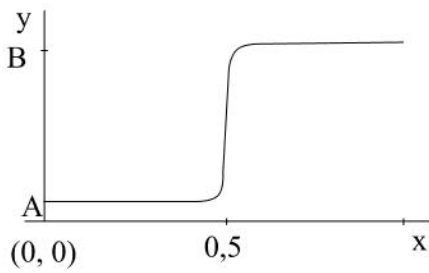


Рис. 4. Решение с внутренним пограничным слоем

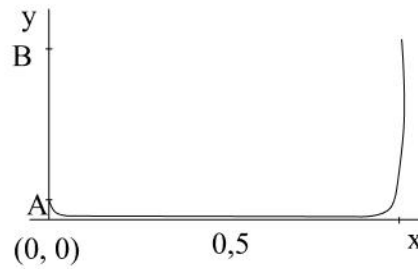


Рис. 5. Решение с двумя пограничными слоями

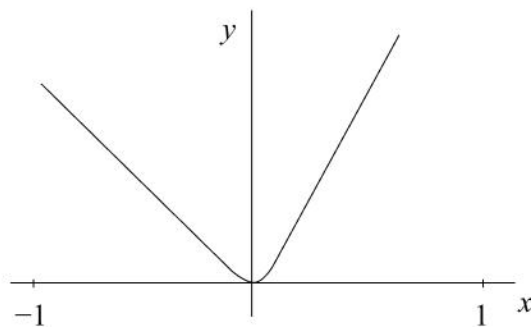


Рис. 6. Решение с внутренним угловым пограничным слоем

2.2. Задача с одним пограничным слоем, анализ решения

Рассмотрим краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon u'' + a(x)u' - b(x)u = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B. \quad (2.1)$$

Предполагаем, что функции a, b, f - достаточно гладкие,

$$a(x) \geq \alpha > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1]. \quad (2.2)$$

Условия (2.2) соответствуют первому случаю предыдущего параграфа, когда пограничный слой расположен у левой границы интервала. Для анализа решения будем использовать принцип максимума, сначала исследуем, при каких условиях он справедлив.

Л е м м а 2.1 . Пусть существует $\phi(x)$:

$$\phi(x) > 0, \quad L\phi(x) < 0, \quad x \in I, \quad I = [0, 1].$$

Тогда для оператора L справедлив принцип максимума: если

$$P(0) \geq 0, \quad P(1) \geq 0, \quad LP(x) \leq 0, \quad 0 < x < 1, \quad (2.3)$$

то $P(x) \geq 0, \quad x \in I$.

Доказательство. Представим $P(x)$ в виде произведения $P = \phi y$. Тогда

$$LP = \varepsilon \phi y'' + [2\varepsilon \phi' + a(x)\phi]y' + (L\phi)y.$$

Предположим, что найдется $s: y(s) < 0$. Тогда в силу непрерывности $y(x)$ и того, что $y(0) \geq 0, y(1) \geq 0$, найдется s_0 , в которой для функции $y(x)$ достигается локальный отрицательный минимум. В силу этого

$$y(s_0) < 0, \quad y'(s_0) = 0, \quad y''(s_0) \geq 0.$$

Из этих соотношений и условий леммы следует $LP(s_0) > 0$, что противоречит (2.3). Лемма доказана.

Пусть

$$a(x) \geq \alpha > 0, \quad b(x) \geq -\beta, \quad \beta > 0, \quad \alpha^2 - 4\beta\varepsilon \geq \gamma > 0. \quad (2.4)$$

Покажем, что при выполнении условий (2.4) для оператора L справедлив принцип максимума. Определим

$$\phi(x) = \exp(-\alpha(2\varepsilon)^{-1}x).$$

Тогда

$$L\phi(x) \leq -(\alpha^2 - 4\beta\varepsilon)(4\varepsilon)^{-1}\phi(x) < 0.$$

Условия леммы 2.1 выполнены, поэтому для оператора L справедлив принцип максимума.

Л е м м а 2.2 . Пусть выполнены условия (2.4). Тогда для оператора L справедлива оценка устойчивости:

$$\|v\| \leq \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} e^{2\beta/\alpha} \|Lv\| + \max\{|v(0)|, |v(1)|\} e^{2\beta/\alpha},$$

где $v(x) \in C_2[0,1]$.

Доказательство. Определим функцию:

$$P(x) = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} e^{2\beta\alpha^{-1}(1-x)} \|Lv\| + \max\{|v(0)|, |v(1)|\} e^{2\beta\alpha^{-1}(1-x)} \pm v(x).$$

Нетрудно убедиться, что для функции $P(x)$ выполнены условия (2.3). В силу принципа максимума при всех x $P(x) \geq 0$. Это доказывает лемму.

Л е м м а 2.3 . Пусть $b(x) \geq 0$. Тогда для произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $v(x)$ справедлива оценка:

$$\|v\| \leq \alpha^{-1} \|Lv\| + \max\{|v(0)|, |v(1)|\}.$$

Доказательство. Определим функцию:

$$\Psi(x) = \alpha^{-1} \|Lv\| (1-x) + \max\{|v(0)|, |v(1)|\} \pm v(x).$$

Нетрудно убедиться, что для функции $\Psi(x)$ выполнены условия (2.3). В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает лемму.

Из лемм 2.2, 2.3 (при выполнении условий этих лемм) при задании $v(x) = u(x)$, соответственно, следуют оценки решения:

$$\|u\| \leq \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} e^{2\beta/\alpha} \|f\| + \max\{|A|, |B|\} e^{2\beta/\alpha},$$

$$\|u\| \leq \alpha^{-1} \|f\| + \max\{|A|, |B|\}. \quad (2.5)$$

Построение асимптотического приближения. Перейдем от (2.1) к вырожденной задаче:

$$a(x)u_0(x) - b(x)u_0(x) = f(x), \quad u_0(1) = B. \quad (2.6)$$

Покажем, как, зная решение более простой задачи (2.6), можно приближенно найти решение исходной задачи (2.1). Определим

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + [A - u_0(0)] \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x).$$

Т е о р е м а 2.1 . Пусть $b(x) \geq 0$. Найдется C : $\|u - u_\varepsilon\| \leq C\varepsilon$.

Доказательство. Обозначим $z = u_\varepsilon - u$, $\gamma = A - u_0(0)$. Тогда:

$$Lz(x) = \gamma L \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon u_0''(x) + a(x)u_0(x) - b(x)u_0(x) - f(x) =$$

$$= \gamma \left(\frac{a_0^2 - a(x)a_0}{\varepsilon} \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x) - b(x) \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x) \right) + O(\varepsilon).$$

Учитывая, что

$$|a(x) - a(0)| \leq C_1x, \quad \tau \exp(-\tau) < 1, \quad \text{при } 0 < \tau < \infty,$$

получим, что для некоторой постоянной C_2

$$|Lz(x)| \leq C_2[\varepsilon + \exp(-\alpha x/(2\varepsilon))], \quad z(0) = 0, \quad |z(1)| \leq C_2\varepsilon.$$

Определим

$$\Psi(x) = [(2-x)C_3 + C_4 \exp(-\alpha x/(2\varepsilon))]\varepsilon \pm z(x).$$

Тогда

$$\Psi(0) \geq 0, \quad \Psi(1) \geq C_3\varepsilon - C_2\varepsilon \geq 0,$$

если $\varepsilon \geq C_2$. Оценим сверху $L\Psi(x)$. Имеем:

$$L\Psi(x) \leq -C_3\alpha\varepsilon + C_4\varepsilon \left[\frac{\alpha^2}{4\varepsilon} - \frac{a(x)\alpha}{2\varepsilon} \right] \exp(-\alpha x/(2\varepsilon)) +$$

$$+ C_2(\varepsilon + \exp(-\alpha x/(2\varepsilon))) \leq -(\alpha C_3 - C_2)\varepsilon - (\alpha^2 C_4/4 - C_2) \exp(-\alpha x/(2\varepsilon)) \leq 0,$$

если выбрать

$$\varepsilon \geq C_2/\alpha, \quad C_4 \geq 4C_2/\alpha^2.$$

Итак, для функции $\Psi(x)$ выполнены условия (2.3). В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает теорему.

Остановимся на вопросе построения решения задачи (2.1) в виде асимптотических рядов по параметру ε . Решение задачи (2.1) строим в виде :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k(\tau), \quad \tau = x/\varepsilon.$$

Потребуем выполнения:

$$L \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(x) = f(x), \quad L \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k(\tau) = 0.$$

Функции w_k и V_k будем определять последовательно.

Внешнее разложение. Учитывая члены без ε , получим:

$$a(x)w_0'(x) - b(x)w_0(x) = f(x), \quad w_0(1) = B.$$

Собирая члены при ε , получим:

$$a(x)w_1'(x) - b(x)w_1(x) = -\varepsilon w_0'', \quad w_1(1) = 0.$$

При произвольном k :

$$a(x)w'_k(x) - b(x)w_k(x) = -\varepsilon w''_{k-1}, \quad w_k(1) = 0.$$

Итак, рекуррентно могут быть найдены $w_k(x)$ на основе решения уравнения первого порядка.

Увеличивая число членов разложения до M ,

$$w^M(x) = \sum_{k=0}^M \varepsilon^k w_k(x),$$

мы добиваемся того, что

$$\|Lw^M(x) - f(x)\| \leq C\varepsilon^{M+1}, \quad w^M(1) = B.$$

Однако, так как при всех k $w_k(x)$ является решением дифференциального уравнения первого порядка, $w^M(x)$ не удовлетворяет левому краевому условию $u(0) = A$. Чтобы добиться выполнения этого условия, делаются внутренние асимптотические разложения.

Внутреннее разложение. Функции $V_k(\tau)$ являются функциями пограничного слоя, то есть они стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, в переменной x это означает, что $V_k(x)$ стремятся к нулю вне пограничного слоя. Эти функции служат для компенсации погрешностей, которые в левое краевое условие вносят функции $w_k(x)$.

Перепишем уравнение на функции $V_k(\tau)$. Имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[\frac{1}{\varepsilon} V''_k(\tau) + \frac{a(\tau\varepsilon)}{\varepsilon} V'_k(\tau) - b(\tau\varepsilon) V_k(\tau) \right] = 0.$$

Осуществляем разложение в ряд по ε . Имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[V''_k(\tau) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\tau\varepsilon)^j a^{(j)}(0)}{j!} V'_k(\tau) - \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\tau\varepsilon)^j b^{(j)}(0)}{j!} V_k(\tau) \right] = 0.$$

Приравнивая к нулю множители при различных степенях ε , получим уравнения на $V_k(\tau)$.

При $k = 0$ имеем:

$$V''_0(\tau) + a_0 V'_0(\tau) = 0, \quad V_0(0) = A - w_0(0), \quad V_0(\tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Несложно получить:

$$V_0(\tau) = [A - w_0(0)] \exp(-a_0\tau), \quad a_0 = a(0).$$

В переменной x эта функция нами использовалась выше. При всех $k > 0$, как нетрудно убедиться,

$$V''_k(\tau) + a(0)V'_k(\tau) = \sum_{j=1}^k \left[\frac{\tau^{j-1} b^{(j-1)}(0)}{(j-1)!} - \frac{\tau^j a^{(j)}(0)}{j!} \right] V_{k-j}(\tau),$$

$V_k(0) = -w_k(0)$, $V_k(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Погранслойные функции $V_k(\tau)$ можно найти в явном виде. Если во внешнем и внутреннем разложениях ограничиться членами до $k \leq M$, то уравнение (2.1) и краевые условия будут удовлетворены с точностью $O(\varepsilon^{M+1})$, поэтому [6] решение $u(x)$ будет найдено с точностью $O(\varepsilon^{M+1})$. В случае $M = 0$ мы это доказали в теореме 2.1.

Оценка производных. Оценим производные решения $u(x)$.
Л е м м а 2.4 . Найдется постоянная C_5 :

$$|u^{(j)}(x)| \leq C_5[1 + \varepsilon^{-j} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x)]. \quad (2.7)$$

Доказательство. Из оценки (2.6) следует $\|u\| \leq C_6$. Запишем уравнение (2.1) в виде:

$$(\varepsilon u' \exp(P(x)))' = (f(x) + b(x)u) \exp(P(x)), \quad P(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(t) dt. \quad (2.8)$$

Сначала докажем, что $|u'(0)| \leq C_7\varepsilon$. По теореме о среднем значении найдется η : $u(\varepsilon) - u(0) = u'(\eta)\varepsilon$. Интегрируя (2.8) от 0 до η , получим:

$$u'(0) = u'(\eta) \exp\left(\int_0^\eta \frac{a(x)}{\varepsilon} dx\right) - \int_0^\eta [f(s) + b(s)u(s)] \exp\left(\int_0^s \frac{a(x)}{\varepsilon} dx\right) ds.$$

Из этого соотношения следует $|u'(0)| \leq C_8\varepsilon$. Интегрируя (2.8) от 0 до x , получим:

$$|u'(x)| \leq |u'(0)| \exp\left(-\int_0^x \frac{a(t)}{\varepsilon} dt\right) + \frac{C_9}{\varepsilon} \int_0^x \exp\left(\int_x^s \frac{a(t)}{\varepsilon} dt\right) ds.$$

Из этого соотношения следует (2.7) при $j = 1$. Получим (2.7) при $j = 2$. Определим $w(x) = u'(x)$. Дифференцируя уравнение (2.1), получим:

$$\varepsilon w''(x) + a(x)w'(x) = F(x), \quad F(x) = -a'(x)u' + b'(x)u(x) + b(x)u' + f'(x). \quad (2.9)$$

С учетом (2.7) при $j = 1$:

$$|F(x)| \leq C_{10}[\varepsilon^{-1} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x) + 1].$$

Представляя уравнение (2.9) в виде (2.8), получим (2.7) при $j = 2$. Случай других j аналогичен. Лемма доказана.

Выделение погранслойной составляющей. Для построения в дальнейшем схемы экспоненциальной подгонки выделим погранслойную составляющую решения и представим $u(x)$ в виде:

$$u(x) = V(x) + p(x),$$

где

$$V(x) = \gamma \exp(-\varepsilon a_0^{-1}x), \quad \gamma = -\varepsilon a_0^{-1}u'(0).$$

В соответствии с леммой 2.4 $|\gamma| \leq C$, при таком выборе γ $p'(0) = 0$. Покажем, что основной рост решения $u(x)$ дает функция $V(x)$.

Л е м м а 2.5 . Найдется постоянная C_{11} :

$$|p^{(j)}(x)| \leq C_{11}[1 + \varepsilon^{1-j} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x)]. \quad (2.10)$$

Доказательство. Нетрудно показать, что

$$Lp(x) = Lu(x) - LV(x) = F(x),$$

$$F(x) = f(x) + \varepsilon a_0^{-1} u'(0)[a_0(a_0 - a(x))\varepsilon^{-1} \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x) - b(x) \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x)].$$

Из этого соотношения следует: $|F(x)| \leq C_{12}$. Представляя уравнение $Lp(x) = F(x)$ в виде (2.8), учитывая, что $p'(0) = 0$, интегрируя, как и в лемме 2.4, получим (2.10) при $j = 1$. Случай других j аналогичен. Лемма доказана.

2.3. Трехточечные разностные схемы

Для нахождения решения дифференциальной краевой задачи (2.1) на основе компьютерных вычислений этой задаче сопоставляется разностная схема. Разностная схема – это система разностных уравнений с заданными краевыми условиями. Уравнения являются разностными, потому что первая и вторая производные заменяются разностными соотношениями, что приводит к разностной схеме. Дифференциальные уравнения второго порядка сводятся к трехточечным разностным схемам. По-другому можно сказать, что сводятся к системе линейных алгебраических уравнений, которая может быть записана в матричном виде $Du^h = f^h$ с трехдиагональной матрицей D , учитывающей задание краевых условий. Далее для нахождения решения остается обратить матрицу D .

Итак, выпишем трехточечную разностную схему:

$$L_n^h u^h = A_n u_{n-1}^h - C_n u_n^h + B_n u_{n+1}^h = f_n^h, \quad u_0^h = A, \quad u_N^h = B. \quad (2.11)$$

Принцип максимума. Пусть $z^h = u^h - [u]_\Omega$ – погрешность разностной схемы (2.11), где u^h – решение разностной схемы на сетке Ω интервала $[0, 1]$ с шагом h , $[u]_\Omega$ – проекция точного решения дифференциальной задачи на сетку Ω .

Определение 1. Разностная схема (2.11) называется сходящейся со скоростью $O(h^\alpha)$, $\alpha > 0$, если при достаточно малых h ($h \leq h_0$) для некоторой постоянной M $\|z^h\| \leq Mh^\alpha$. Схема сходится равномерно по параметру ε , если постоянная M не зависит от ε .

Определение 2. Схема (2.11) называется устойчивой, если для некоторой постоянной M

$$\|u^h\| \leq M[\|L^h u^h\| + |u_0^h| + |u_N^h|].$$

Схема устойчива равномерно по ε , если постоянная M не зависит от ε .

Определение 3. Схема обладает порядком аппроксимации $O(h^\alpha)$, если $\|L^h z^h\| \leq Mh^\alpha$, $\alpha > 0$.

Понятно, что в случае устойчивой схемы $\|z^h\| \leq M\|L^h z^h\|$. Таким образом, если разностная схема устойчива и аппроксимирует с некоторым порядком точности, то она сходится с тем же порядком точности. В то же время, как будет показано ниже, разностная схема может не обладать свойством равномерной по ε аппроксимации, но обладать свойством равномерной сходимости. В этом случае для обоснования сходимости мы пользуемся не оценкой устойчивости, а оценкой погрешности аппроксимации (с постоянными, не зависящими от ε) и принципом максимума с подбором подходящих барьерных функций.

Получим достаточное условие, когда для схемы (2.11) справедлив принцип максимума.

Л е м м а 2.6 . Пусть в (2.11) при всех n $A_n > 0$, $B_n > 0$. Пусть существует сеточная функция ϕ^h такая, что при всех n

$$\phi_n^h > 0, L_n \phi^h < 0.$$

Тогда для оператора L^h справедлив принцип максимума, то есть, если для некоторой функции Ψ^h :

$$\Psi_0^h \geq 0, \Psi_N^h \geq 0, L_n^h \Psi^h \leq 0, n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.12)$$

то при всех n $\Psi_n^h \geq 0$.

Доказательство. Пусть найдется m такое, что $\Psi_m^h < 0$. Определим V^h : $\Psi_n^h = \phi_n^h V_n^h$. Тогда

$$V_0^h \geq 0, V_N^h \geq 0, V_m^h < 0.$$

Следовательно, найдется точка отрицательного минимума. Пусть это x_m . Тогда

$$V_m^h < 0, V_{m-1}^h \geq V_m^h, V_{m+1}^h \geq V_m^h.$$

Нетрудно показать, что

$$L_m^h \Psi^h = V_m^h L_m^h \phi^h + A_m \phi_{m-1}^h (V_{m-1}^h - V_m^h) + B_m \phi_{m+1}^h (V_{m+1}^h - V_m^h) > 0.$$

Получили противоречие с условиями (2.12). Лемма доказана.

Покажем, что из выполнения условий для принципа максимума следует устойчивость разностной схемы. Пусть

$$\phi^h > 0, \forall n L_n^h \phi^h \leq -\beta < 0. \quad (2.13)$$

Тогда для решения схемы (2.11) для $\forall n$ справедлива оценка:

$$|u_n^h| \leq \frac{\|f^h\|}{\beta} \phi_n^h + \frac{|A|}{\phi_0^h} \phi_n^h + \frac{|B|}{\phi_N^h} \phi_n^h. \quad (2.14)$$

Определим

$$\Psi_n^h = \frac{\|f^h\|}{\beta} \phi_n^h + \frac{|A|}{\phi_0^h} \phi_n^h + \frac{|B|}{\phi_N^h} \phi_n^h \pm u_n^h.$$

Тогда для Ψ^h справедливы условия (2.12). В силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает оценку (2.14).

Покажем, как можно подобрать функцию ϕ^h для схемы (2.11).

1). Пусть

$$\forall n \ C_n \geq A_n + B_n + \Delta, \ \Delta > 0, \ A_n > 0, \ C_n > 0.$$

Определим $\phi_n^h = 1$. Тогда $L_n^h \phi^h \leq -\Delta < 0$. Согласно лемме 2.5 ПМ справедлив и в соответствии с (2.14)

$$\|u^h\| \leq \frac{\|f^h\|}{\Delta} + |A| + |B|.$$

2). Пусть $\forall n \ A_n > B_n$ или $\forall n \ A_n < B_n$,

$$\forall n \ C_n \geq A_n + B_n, \ A_n > 0, \ B_n > 0.$$

Определим $\phi_n^h = q^n$, $q > 0$. Тогда $\phi_n^h > 0$,

$$\begin{aligned} L_n^h \phi^h &= A_n q^{n-1} - C_n q^n + B_n q^{n+1} \leq A_n q^{n-1} - (A_n + B_n) q^n + B_n q^{n+1} = \\ &= q^{n-1} (1 - q) (A_n - B_n q). \end{aligned}$$

Из этого соотношения следует, что $L_n^h \phi^h < 0$, если задать q , исходя из условий:

$$\max_n \frac{A_n}{B_n} < q < 1 \text{ при } A_n < B_n, \quad \min_n \frac{A_n}{B_n} > q > 1 \text{ при } A_n > B_n.$$

Заметим, что в случае $q > 1$ функцию ϕ^h можно сделать по модулю меньше единицы, приняв $\phi_n^h = q^{n-N}$.

Метод прогонки. Определим эффективный метод нахождения решения схемы (2.11), причем будем следовать [21]. Для общности перейдем от разностной краевой задачи с краевыми условиями первого рода к краевой задаче с краевыми условиями третьего рода (или, проще сказать, к третьей краевой задаче):

$$A_n y_{n-1} - C_n y_n + B_n y_{n+1} = f_n, \quad y_0 = \theta_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \theta_2 y_{N-1} + \mu_2, \quad (2.15)$$

предполагается, что $A_n \neq 0$, $B_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \dots, N-1$. Предположим, что имеет место рекуррентное соотношение

$$y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad (2.16)$$

с неопределенными коэффициентами α_n и β_n . Тогда

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n, \quad (2.17)$$

Учитывая (2.16),(2.17) в разностном уравнении (2.15), получим:

$$A_n(\alpha_n y_n + \beta_n) - C_n y_n + B_n \frac{y_n - \beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} = f_n.$$

Это уравнение выполнено при любых y_n , если

$$A_n \alpha_n - C_n + \frac{B_n}{\alpha_{n+1}} = 0, \quad A_n \beta_n - \frac{B_n \beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} = f_n.$$

Исходя из этих уравнений и учитывая левое краевое условие в (2.15), получим рекуррентные формулы на α_n и β_n :

$$\alpha_{n+1} = \frac{B_n}{C_n - \alpha_n A_n}, \quad \alpha_1 = \theta_1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.18)$$

$$\beta_{n+1} = \frac{A_n \beta_n - f_n}{C_n - \alpha_n A_n}, \quad \beta_1 = \mu_1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.19)$$

Теперь определим y_N . Учитывая правое краевое условие в (2.15) и соотношение (2.17), получим:

$$y_N = \theta_2 y_{N-1} + \mu_2, \quad y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N.$$

Из этой системы следует:

$$y_N = \frac{\mu_2 + \theta_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \theta_2}. \quad (2.20)$$

Итак, метод прогонки для задачи (2.15) состоит в следующем.

Из соотношений (2.18),(2.19) находим прогоночные коэффициенты α_n и β_n (прямой ход прогонки). Из соотношения (2.20) находим y_N . Из соотношений (2.17) находим решение y_n , $n = N-1, N-2, \dots, 0$. (Обратный ход прогонки).

Остановимся на вопросе корректности прогоночных формул. Покажем, что не возникнет деления на нуль и не накапливаются погрешности округлений. Для этого предположим, что

$$\begin{aligned} C_n &\geq |A_n| + |B_n|, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ |\theta_1| &\leq 1, \quad |\theta_2| \leq 1, \quad |\theta_1| + |\theta_2| < 2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Покажем, что при всех n $|\alpha_n| \leq 1$. В случае $n = 1$ $|\alpha_1| = |\theta_1| \leq 1$. Далее доказываем по индукции. Пусть $|\alpha_n| \leq 1$. Из (2.18) следует, что

$$|\alpha_{n+1}| = \frac{|B_n|}{|C_n - \alpha_n A_n|} \leq \frac{|B_n|}{C_n - |A_n|} \leq \frac{|B_n|}{|B_n|} = 1.$$

Итак, при всех n $|\alpha_n| \leq 1$. Заметим, что, если $|\alpha_n| < 1$, то $|\alpha_{n+1}| < 1$. В силу того, что $\alpha_1 = \theta_1$, $|\theta_1| + |\theta_2| < 2$, то либо $|\alpha_N| < 1$, либо $|\theta_2| < 1$. Итак, при использовании формул прогонки (2.17)-(2.20) не возникнет деления на нуль.

Формулы прогонки устойчивы к ошибкам округлений. Для примера исследуем устойчивость формулы (2.17). Пусть y_n найдено с погрешностью и вместо (2.17) реализуется формула

$$\tilde{y}_{n-1} = \alpha_n \tilde{y}_n + \beta_n.$$

Тогда, очевидно,

$$y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1} = \alpha_n(y_n - \tilde{y}_n).$$

В силу того, что $|\alpha_n| \leq 1$

$$|y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1}| \leq |y_n - \tilde{y}_n|.$$

Итак, ошибка, появившаяся в y_n , при счете y_{n-1} не накапливается, более того, она обычно гасится, например, если $|\theta_1| < 1$, в случае первой краевой задачи $|\theta_1| = 0$. Анализ устойчивости метода прогонки к возмущению коэффициентов A_n, B_n, C_n приведен в книге С.К. Годунова [9]. Имеются различные модификации метода прогонки (методы левой и правой прогонок, встречной прогонки, немонотонной прогонки, потоковой прогонки и другие, изложенные, например, в [21]).

Если схема (2.11) монотонна, то условия (2.21) выполняются и метод прогонки для нахождения решения схемы корректен.

2.4. Анализ классических схем

Перейдем к анализу известных схем применительно к задаче с пограничным слоем (2.1). Будем предполагать, что в дополнение к условиям (2.2) $b(x) \geq 0$. Пусть Ω - равномерная сетка интервала $[0, 1]$:

$$\Omega = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h, n = 1, 2, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}.$$

Выпишем разностные схемы [6] в случае задачи (2.1):

Схема центральных разностей:

$$\begin{aligned} L_n^h u^h &= \varepsilon \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} + a_n \frac{u_{n+1}^h - u_{n-1}^h}{2h} - b_n u_n^h = f_n^h, \\ u_0^h &= A, \quad U_N^h = B \quad a_n = a(x_n), \quad b_n = b(x_n), \quad f_n^h = f(x_n). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Схема направленных разностей:

$$\begin{aligned} L_n^h u^h &= \varepsilon \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} + a_n \frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{h} - b_n u_n^h = f_n^h, \\ u_0^h &= A, \quad U_N^h = B. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Оценим погрешность аппроксимации $L_h z^h$ для приведенных схем. Используя разложения в ряд Тейлора, несложно убедиться, что для достаточно гладкой функции $u(x)$

$$\left| \frac{u(x_{n+1}) - 2u(x_n) + u(x_{n-1}))}{h^2} - u''(x_n) \right| \leq \frac{\varepsilon h^2}{12} \max_x |u^{(4)}(x)|,$$

$$\left| \frac{u(x_{n+1}) - u(x_{n-1}))}{2h} - u'(x_n) \right| \leq \frac{h^2}{6} \max_x |u^{(3)}(x)|,$$

$$\left| \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - u'(x_n) \right| \leq \frac{h}{2} \max_x |u^{(2)}(x)|.$$

Исследуем порядок аппроксимации схемы (2.22). Пусть $z^h = u^h - [u]$, тогда

$$|L_n^h z^h| = |L_n^h u^h - L_n^h [u]_\Omega| = |Lu(x_n) - L_n^h [u]_\Omega| \leq$$

$$\frac{\varepsilon h^2}{12} \max_x |u^{(4)}(x)| + \max_x a(x) \frac{h^2}{6} \max_x |u^{(3)}(x)| \leq Mh^2.$$

Таким образом, схема (2.22) второго порядка аппроксимации. Однако, если учесть оценки производных (2.7), то получим:

$$|L_n^h z^h| \leq \frac{C}{\varepsilon^3} h^2, \quad M = \frac{C}{\varepsilon^3}.$$

Таким образом, согласно полученной оценке, схема (2.22) может терять свойство аппроксимации при $\varepsilon = h$.

Аналогичным образом можно показать, что схема (2.23) – первого порядка аппроксимации, но неравномерно по параметру ε :

$$|L_n^h z^h| \leq Mh, \quad M = C/\varepsilon^2, \quad \text{при } \varepsilon = h \text{ свойство аппроксимации теряется.}$$

Однако, как говорилось выше, из аппроксимации следует сходимость, если схема устойчива. В свою очередь, если справедлив принцип максимума, то можно получить оценку устойчивости. Таким образом, кроме аппроксимации, важно, чтобы для схемы был справедлив принцип максимума.

Определение 4. Схема (2.11) монотонна, если

$$\forall n \quad C_n \geq A_n + B_n, \quad A_n > 0, \quad B_n > 0. \quad (2.24)$$

Монотонность разностной схемы соответствует тому, что матрица разностной схемы, взятая со знаком "минус" является монотонной [8]. Согласно [8], если матрица D монотонна, то для любого вектора z из условия $Dz \geq 0$ следует $z \geq 0$ (покомпонентно). Это соответствует определенному выше ПМ, согласно которому из условий

$$z_0 \geq 0, \quad z_N \geq 0, \quad L_n^h z \leq 0 \quad \forall n \quad (2.25)$$

следует $\forall n \quad z_n \geq 0$. Каждое из соотношений (2.25) соответствует умножению строки матрицы D на вектор z , а в результате, как следствие принципа максимума, получается вектор с неотрицательными компонентами. Таким образом, ПМ соответствует свойству монотонных матриц.

Проверим схемы (2.22) и (2.23) на монотонность, записав их в виде (2.11).

Для схемы центральных разностей (2.22) $A_n = \varepsilon/h^2 - a_n/(2h)$, поэтому $A_n < 0$ при $\varepsilon < a_n h/2$, и, таким образом, при малых ε эта схема не монотонна. Убедимся на примере, что эта схема теряет свойство сходимости при малых значениях ε .

Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon u'' + au' = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \quad (2.26)$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$u(x) = [1 - \exp(-a\varepsilon^{-1}x)]/[1 - \exp(-a\varepsilon^{-1})].$$

Из вида решения следует $u(x) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $x > 0$, $u(0) = 0$. Решение схемы центральных разностей (2.22) для задачи (2.26) ищем в виде $u_n^h = q^n$. Подставляя это решение в разностную схему и учитывая краевые условия, получим:

$$u_n^h = \left[\left(\frac{\varepsilon - ah/2}{\varepsilon + ah/2} \right)^n - 1 \right] \left[\left(\frac{\varepsilon - ah/2}{\varepsilon + ah/2} \right)^N - 1 \right]^{-1}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$u_n^h = [(-1)^n - 1][(-1)^N - 1]^{-1}.$$

Таким образом, при достаточно малых ε при четных N решение разностной схемы становится неограниченным, а при нечетных N - "пилообразным":

$u_n^h = 0$ - при четном n и $u_n^h = 1$ - при нечетном n .

Исследуем на сходимость схему направленных разностей (2.23). Покажем, что если $b(x) \geq 0$, то для этой схемы справедлив принцип максимума. Определим ϕ^h покомпонентно: $\phi_n^h = 2 - x_n$. Тогда выполняются условия леммы 2.6, и в силу этой леммы для схемы направленных разностей справедлив принцип максимума. Покажем, однако, что эта схема не обладает свойством равномерной сходимости. Рассмотрим задачу (2.26), тогда решение схемы направленных разностей имеет вид:

$$u_n^h = \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + ah} \right)^n \right] \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + ah} \right)^N \right]^{-1}.$$

Следовательно, при $\varepsilon = ah$ выполнится $u_1^h \approx 1/2$, в то время как $u(h) \approx 1 - e^{-1}$. При этом при $h \rightarrow 0$ $u^h(h) \not\rightarrow u(h)$, сходимости нет.

2.5. Схема Ильина

В этом разделе для задачи (2.1) приведем построение и обоснование известной схемы экспоненциальной подгонки, схемы Ильина[14]. Правда, при обосновании равномерной сходимости этой схемы будем следовать подходу, изложенному в [27]. Этот подход кажется более соответствующим изложению других глав данной работы и более понятным. В [14] для оценки $\|u^h - [u]_\Omega\|$ оценивается $\|u^h - u^{h/2}\|$ и используется то, что

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|u^{h/2^k} - u^{h/2^{k+1}}\|.$$

Впервые для задачи (2.1) вопрос построения разностной схемы со свойством равномерной сходимости по малому параметру рассмотрен А.М. Ильиным в 1969 году в [14]. Построение схемы основано на подгонке схемы к погранслошной функции, задающей в пограничном слое основной рост решения.

Для этого рассмотрено уравнение, которому удовлетворяет функция пограничного слоя:

$$\varepsilon V''(x) + a(0)V'(x) = 0. \quad (2.27)$$

Выпишем для этого уравнения разностную схему:

$$\tilde{\varepsilon} \frac{V_{n+1}^h - 2V_n^h + V_{n-1}^h}{h^2} + a_0 \frac{V_{n+1}^h - V_{n-1}^h}{2h} = 0, \quad a_0 = a(0).$$

В схеме центральных разностей параметр ε заменяем на $\tilde{\varepsilon}$ для того, чтобы схема была точной на решении уравнения (2.27) $V(x) = \gamma \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} x)$, и получим:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{a_0 h}{2} \coth \frac{a_0 h}{2\varepsilon}. \quad (2.28)$$

Используя (2.28), выпишем схему для задачи (2.1):

$$\begin{aligned} L_n^h u^h &= \varepsilon_n \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} + a_n \frac{u_{n+1}^h - u_{n-1}^h}{2h} - b_n u_n^h = f_n^h, \\ u_0^h &= A, \quad U_N^h = B, \quad a_n = a(x_n), \quad b_n = b(x_n), \quad f_n^h = f(x_n), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{a_n h}{2} \coth \frac{a_n h}{2\varepsilon}. \quad (2.30)$$

Замена $\varepsilon \rightarrow \tilde{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon_n$ делается с погрешностью $|\varepsilon - \varepsilon_n| \leq Ch^2/(h + \varepsilon)$, что не ухудшает погрешности аппроксимации разностной схемы, но при этом схема становится, что несложно проверить, монотонной и учитывающей погранслошной рост решения.

Оценим погрешность аппроксимации схемы (2.29)-(2.30).

Л е м м а 2.7. Пусть $w(x)$ - произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда при всех n :

$$|L_n^h[w] - Lw(x_n)| \leq C \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} [\varepsilon |w'''(s)| + |w''(s)|] ds. \quad (2.31)$$

Доказательство. Нетрудно получить:

$$\begin{aligned} Lw(x_n) - L_n^h[w] &= \varepsilon(w''(x_n) - \Lambda_{xx,n}[w]) + (\varepsilon - \varepsilon_n)\Lambda_{xx,n}[w] + \\ &+ a_n(w'(x_n) - \Lambda_{\bar{x},n}[w]), \end{aligned} \quad (2.32)$$

где:

$$\Lambda_{xx,n}[w] = \frac{w(x_{n+1}) - 2w(x_n) + w(x_{n-1}))}{h^2}, \quad \Lambda_{\bar{x},n}[w] = \frac{w(x_{n+1}) - w(x_{n-1}))}{2h}.$$

Оценим каждое слагаемое в (2.32). Начнем со второго слагаемого. Имеем:

$$\varepsilon_n - \varepsilon = \varepsilon[t \coth(t) - 1], \quad t = a_n h / (2\varepsilon), \quad t > 0.$$

Учитывая случаи малых и больших t , можно показать, что для некоторой постоянной C_1 :

$$|t \coth(t) - 1| \leq C_1 t^2 / (t + 1).$$

Учитывая вид t , теперь можно получить:

$$|\varepsilon_n - \varepsilon| \leq C_2 \frac{h^2}{h + \varepsilon}. \quad (2.33)$$

Интегрированием по частям несложно убедиться, что для произвольных η и ξ :

$$\begin{aligned} w(\eta) - w(\xi) &= (\eta - \xi)w'(\xi) + \int_{\xi}^{\eta} (\eta - s)w''(s)ds, \\ w(\eta) - w(\xi) &= (\eta - \xi)w'(\eta) - \int_{\xi}^{\eta} (s - \xi)w''(s)ds. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Lambda_{xx,n}[w] &= \frac{((w(x_{n+1}) - w(x_n)) - (w(x_n) - w(x_{n-1})))}{h^2} = \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)w''(s)ds + \int_{x_{n-1}}^{x_n} (s - x_{n-1})w''(s)ds \right]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|\Lambda_{xx,n}[w]| \leq \frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |w''(s)|ds. \quad (2.35)$$

Учитывая (2.33),(2.35), получим требуемую оценку (2.31) для второго слагаемого в (2.32). Оценим первое слагаемое в (2.32). Используя (2.34), получим:

$$\begin{aligned} \Lambda_{xx,n}[w] - w''(x_n) &= \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)w''(s)ds + \int_{x_{n-1}}^{x_n} (s - x_{n-1})w''(s)ds - h^2 w''(x_n) \right]. \end{aligned}$$

Используя интегрирование по частям, получим:

$$\Lambda_{xx,n}[w] - w''(x_n) = \frac{1}{2h^2} \left[\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)^2 w'''(s)ds - \int_{x_{n-1}}^{x_n} (s - x_{n-1})^2 w'''(s)ds \right].$$

Следовательно,

$$|\Lambda_{xx,n}[w] - w''(x_n)| \leq \frac{1}{2} \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |w'''(s)| ds.$$

Аналогично можно показать, что

$$|\Lambda_{\bar{x},n}[w] - w'(x_n)| \leq \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |w''(s)| ds.$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 2.2. Найдется C :

$$|u(x_n) - u_n^h| \leq Ch, \quad x_n \in \Omega. \quad (2.36)$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - [u]$. Тогда

$$L_n^h z^h = L_n^h u^h - L_n^h [u] = Lu(x_n) - L_n^h [u].$$

Используем представление $u(x) = V(x) + p(x)$, полученное выше выделением пограничной составляющей, и оценим погрешность аппроксимации отдельно на функциях $V(x)$ и $p(x)$. Тогда:

$$|L_n^h z^h| \leq |Lp(x_n) - L_n^h [p]| + |LV(x_n) - L_n^h [V]|.$$

При оценке первого слагаемого используем то, что функция $p(x)$ не имеет таких градиентов, как $u(x)$, а при оценке второго слагаемого используем подгонку схемы к $V(x)$.

Используя лемму 2.7, получим:

$$|L_n^h [p] - Lp(x_n)| \leq C \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} [\varepsilon |p'''(s)| + |p''(s)|] ds. \quad (2.37)$$

Используя оценки производных согласно лемме 2.4 и интегрируя, получим:

$$|L_n^h [p] - Lp(x_n)| \leq C_1 \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\alpha \varepsilon^{-1} s)] ds.$$

Следовательно, для некоторой постоянной C_2 :

$$|L_n^h [p] - Lp(x_n)| \leq C_2 \left[h + \frac{h}{h + \varepsilon} \exp(-\alpha \varepsilon^{-1} x_{n-1}) \right]. \quad (2.38)$$

Теперь оценим погрешность аппроксимации на функции

$V(x) = \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} x)$. С учетом (2.27) и точной схемы для этого уравнения получим:

$$|L_n^h [V] - LV(x_n)| = |\varepsilon_n \Lambda_{xx,n}[V] + a_n \Lambda_{\bar{x},n}[V] - \varepsilon V''(x_n) - a_n V'(x_n)| =$$

$$= |(\varepsilon_n - \tilde{\varepsilon})\Lambda_{xx,n}[V] + (a_n - a_0)\Lambda_{\bar{x},n}[V] + a_0V'(x_n) - a_nV'(x_n)|.$$

Следовательно,

$$|L_n^h[V] - LV(x_n)| \leq \left| \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n)(\varepsilon_n - \tilde{\varepsilon}) \times \frac{2 \cosh(a_0h/\varepsilon) - 2}{h^2} \right| + \\ + \left| (a_n - a_0) \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n) \left(\frac{a_0}{\varepsilon} - \frac{\sinh(a_0h/\varepsilon)}{h} \right) \right|.$$

Оценим каждое слагаемое этой суммы.

Оценим первое слагаемое. По определению

$$\varepsilon_n = \varepsilon t_n \coth(t_n), \quad t_n = \frac{a_n h}{2\varepsilon}.$$

Для функции $\phi(t) = t \coth(t)$ выполнится $0 \leq \phi'(t) \leq 1$. Поэтому

$$|\varepsilon_n - \tilde{\varepsilon}| \leq h|a_n - a_0|/2 \leq Chx_n.$$

С другой стороны,

$$|\cosh(t) - 1| \leq \frac{t^2}{t^2 + 1} \exp(t).$$

Следовательно,

$$\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n)|\varepsilon_n - \tilde{\varepsilon}| \frac{2 \cosh(a_0h/\varepsilon) - 2}{h^2} \leq \\ \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n) \frac{Chx_n}{h^2} \frac{h^2}{(h + \varepsilon)^2} \exp(a_0\varepsilon^{-1}h) = \frac{Chx_n}{(h + \varepsilon)^2} \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{n-1}).$$

В случае $x_n = h$

$$\frac{Chx_n}{(h + \varepsilon)^2} \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{n-1}) \leq \frac{Ch}{h + \varepsilon} \exp(-\alpha x_{n-1}/(2\varepsilon)).$$

В случае $x_n > h$ делаем представление $x_n = x_{n-1} + h$ и получим:

$$\frac{Chx_n}{(h + \varepsilon)^2} \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{n-1}) = \left(\frac{Chx_{n-1}}{(h + \varepsilon)^2} + \frac{Ch^2}{(h + \varepsilon)^2} \right) \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{n-1}) \\ \leq \left(\frac{C\varepsilon h}{(h + \varepsilon)^2} + \frac{Ch^2}{(h + \varepsilon)^2} \right) \exp(-\alpha x_{n-1}/(2\varepsilon)) \leq \frac{Ch}{h + \varepsilon} \exp(-\alpha x_{n-1}/(2\varepsilon)).$$

Для второго слагаемого имеем:

$$\left| \frac{a_0}{\varepsilon} - \frac{\sinh(a_0h/\varepsilon)}{h} \right| = \frac{a_0}{\varepsilon} \left| \frac{\sinh(t) - t}{t} \right| \leq C\varepsilon^{-1} \frac{t^3}{t(t^3 + 1)} \exp(t), \quad t = \frac{a_0h}{\varepsilon}.$$

Теперь нетрудно заключить, что

$$(a_n - a_0) \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_n) \left| \frac{a_0}{\varepsilon} - \frac{\sinh(a_0h/\varepsilon)}{h} \right| \leq \frac{Ch}{h + \varepsilon} \exp(-\alpha x_{n-1}/(2\varepsilon)).$$

Оценив оба слагаемых, получим

$$|L_n^h[V] - LV(x_n)| \leq \frac{Ch}{h + \varepsilon} \exp(-\alpha x_{n-1}/(2\varepsilon)). \quad (2.39)$$

Учитывая (2.38) и (2.39), получим итоговую оценку погрешности аппроксимации:

$$|L_n^h z^h| \leq C_2 \left[h + \frac{h}{h + \varepsilon} \exp\left(-\frac{\alpha x_{n-1}}{2\varepsilon}\right) \right], \quad 0 < n < N. \quad (2.40)$$

Эта оценка не дает равномерную по ε погрешность аппроксимации порядка $O(h)$, например, при $\varepsilon = h$ и $n = 1$. Тем не менее равномерная сходимость схемы со скоростью $O(h)$ имеется. Чтобы показать это, подберем подходящую барьерную функцию Φ^h :

$$\Phi_n^h = \exp\left(-\frac{\alpha x_n}{2\varepsilon}\right).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} L_n^h \Phi^h &\leq \frac{a_n \Phi_n^h}{2h} \left[4 \coth\left(\frac{a_n h}{2\varepsilon}\right) \sinh^2\left(\frac{\alpha h}{4\varepsilon}\right) - 2 \sinh\left(\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right) \right] \leq \\ &\leq \frac{2a_n \Phi_n^h}{h} \sinh\left(\frac{\alpha h}{4\varepsilon}\right) \left[\frac{\cosh(\alpha h/(2\varepsilon))}{2 \cosh(\alpha h/(4\varepsilon))} - \cosh(\alpha h/(4\varepsilon)) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$L_n^h \Phi^h \leq -\frac{a_n}{h} \tanh\left(\frac{\alpha h}{4\varepsilon}\right) \Phi_n^h.$$

Итак,

$$L_n^h \exp\left(-\frac{\alpha x}{2\varepsilon}\right) \leq -\frac{C_0}{h + \varepsilon} \exp\left(-\frac{\alpha x_n}{2\varepsilon}\right). \quad (2.41)$$

Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_n^h = C \left[2 - x_n + \exp\left(-\frac{\alpha x_{n-1}}{2\varepsilon}\right) \right] h \pm z_n^h.$$

Тогда $\Psi_0^h \geq 0$, $\Psi_N^h \geq 0$, учитывая оценки (2.40),(2.41), получим:

$$L_n^h \Psi^h \leq -C\alpha h - \frac{CC_0}{h + \varepsilon} \exp\left(-\frac{\alpha x_{n-1}}{2\varepsilon}\right) h + C_2 h + C_2 \frac{h}{h + \varepsilon} \exp\left(-\frac{\alpha x_{n-1}}{2\varepsilon}\right) \leq 0,$$

если

$$C \geq \alpha^{-1} C_2, \quad C \geq C_2/C_0.$$

В силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает теорему.

2.6. Сплайновый метод построения схемы

Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{aligned} Lu &= \varepsilon u'' + a(x)u' = f(x), \\ u(0) &= A, \quad u(1) = B. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Предполагаем, что функции $a(x), f(x)$ – достаточно гладкие, $\varepsilon > 0$, $a(x) \geq \alpha > 0$. Анализ решения этой задачи дан в предыдущей главе. В данной главе изучим сплайновый подход к построению разностной схемы. Пусть Ω – равномерная сетка интервала $[0, 1]$. Перейдем от (2.42) к уравнению с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \tilde{L}\tilde{u} &= \varepsilon \tilde{u}'' + \tilde{a}(x)\tilde{u}' = \tilde{f}(x), \\ \tilde{u}(0) &= A, \quad \tilde{u}(1) = B, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где при $x \in \Delta_n$

$$\tilde{a}(x) = a_n = a(x_n), \quad \tilde{f}(x) = f_n = f(x_n), \quad \Delta_n = (x_{n-1}, x_n].$$

Уравнение (2.43) на каждом сеточном интервале с постоянными коэффициентами, поэтому решение можно выписать в явном виде. Далее пользуемся известным фактом из уравнений математической физики, что если коэффициенты уравнения имеют разрыв первого рода, то вторая производная решения также имеет разрывы первого рода, но первая производная непрерывна. Поэтому мы вправе приравнять производные на границе соседних интервалов, что приведет нас к разностной схеме.

Итак, на интервале Δ_n задача (2.43) принимает вид:

$$\varepsilon \tilde{u}''(x) + a_n \tilde{u}'(x) = f_n, \quad \tilde{u}(x_{n-1}) = u_{n-1}^h, \quad \tilde{u}(x_n) = u_n^h, \quad (2.44)$$

где $\{u_n^h\}$ – неизвестные значения решения $\tilde{u}(x)$ на концах интервалов. Относительно $\{u_n^h\}$ и получим конечно-разностные соотношения. Решение уравнения (2.44) имеет вид:

$$\tilde{u}(x) = \frac{f_n}{a_n}x + P_n + C_n e^{-a_n \varepsilon^{-1}(x-x_n)}.$$

Постоянные P_n, C_n находим из краевых условий:

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{a_n}x_{n-1} + P_n + C_n e^{a_n \varepsilon^{-1}h} &= u_{n-1}^h, \\ \frac{f_n}{a_n}x_n + P_n + C_n &= u_n^h. \end{aligned}$$

Из этой системы следует:

$$C_n = \left[u_n^h - u_{n-1}^h - \frac{f_n h}{a_n} \right] / \left[1 - e^{a_n \varepsilon^{-1}h} \right].$$

Учитываем непрерывность производной на границе соседних интервалов

$$\lim_{x \rightarrow x_n - 0} \tilde{u}'(x) = \lim_{x \rightarrow x_n + 0} \tilde{u}'(x)$$

и получим:

$$\frac{f_n}{a_n} - \frac{a_n}{\varepsilon} C_n = \frac{f_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{\varepsilon} C_{n+1} e^{-a_{n+1}\varepsilon^{-1}h}.$$

Подставляя значения постоянных C_n и C_{n+1} , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{a_{n+1}h}{\varepsilon} \left[\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{h} - \frac{f_{n+1}}{a_{n+1}} \right] \left[1 - e^{a_{n+1}\varepsilon^{-1}h} \right]^{-1} e^{-a_{n+1}\varepsilon^{-1}h} - \\ & - \frac{a_n h}{\varepsilon} \left[\frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} - \frac{f_n}{a_n} \right] \left[1 - e^{a_n\varepsilon^{-1}h} \right]^{-1} = \frac{f_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{f_n}{a_n}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\tau_n = \frac{a_n h}{\varepsilon}, \quad \Phi_n = \frac{\tau_n}{e^{\tau_n} - 1}.$$

С учетом введенных обозначений, записывая разностную схему как трехточечную, в итоге получим:

$$\begin{aligned} & \Phi_{n+1} e^{-\tau_{n+1}} u_{n+1}^h - [\Phi_{n+1} e^{-\tau_{n+1}} + \Phi_n] u_n^h + \Phi_n u_{n-1}^h = \\ & = \frac{f_n h}{a_n} (1 - \Phi_n) - \frac{f_{n+1} h}{a_{n+1}} (1 - \Phi_{n+1} e^{-\tau_{n+1}}), \quad u_0^h = A, \quad u_N^h = B. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Отметим, что схема (2.45) по построению является точной относительно решения задачи (2.43). Нетрудно заключить, что при всех n $0 < \Phi_n < 1$, поэтому схема (2.45) является монотонной. Следовательно, метод прогонки для нахождения решения этой схемы устойчив. Оценим точность построенной схемы.

Т е о р е м а 2.3. Пусть $u(x)$ – решение задачи (2.42), u^h – решение схемы (2.45). Тогда для некоторой постоянной C при всех n

$$|u(x_n) - u_n^h| \leq Ch. \quad (2.46)$$

Доказательство. Схема (2.45) точна на решении задачи (2.43), поэтому остается оценить $|u(x) - \tilde{u}(x)|$. Пусть $z(x) = u(x) - \tilde{u}(x)$. Вычитая из (2.42) (2.43), получим задачу на $z(x)$:

$$\begin{aligned} \tilde{L}z &= \varepsilon z''(x) + \tilde{a}(x)z'(x) = F(x), \quad F(x) = \tilde{f}(x) - f(x) + (a(x) - \tilde{a}(x))u'(x), \\ z(0) &= 0, \quad z(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Предполагая, что функции $a(x)$, $f(x)$ являются непрерывно дифференцируемыми, и учитывая оценку производных (2.7), получим:

$$|F(x)| \leq C_1 h \left[1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x} \right]. \quad (2.48)$$

Определим $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = Ch e^{-\alpha h/(2\varepsilon)} + C(1-x)h \pm z(x).$$

Тогда, очевидно, $\Psi(0) \geq 0$, $\Psi(1) \geq 0$. Оценим сверху $\tilde{L}\Psi(x)$. Имеем:

$$\tilde{L}\Psi(x) \leq Ch \left[\frac{\alpha^2}{4\varepsilon} - \frac{\tilde{a}\alpha}{2\varepsilon} \right] e^{-\alpha x/(2\varepsilon)} - \alpha Ch + |F(x)|.$$

Учитывая оценку (2.48), получим:

$$\tilde{L}\Psi(x) \leq -\frac{\alpha^2}{4\varepsilon} Ch e^{-\alpha x/(2\varepsilon)} - \alpha Ch + C_1 h + \frac{C_1 h}{\varepsilon} e^{-\alpha x/(2\varepsilon)}.$$

Из этого неравенства следует, что если выбрать

$$C = \max \left\{ \frac{C_1}{\alpha}, \frac{4C_1}{\alpha^2} \right\},$$

то при всех x $\tilde{L}\Psi(x) \leq 0$. В силу принципа максимума при всех x $\Psi(x) \geq 0$. Следовательно, $|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq 2Ch$. Это доказывает теорему.

3. Задача с двумя пограничными слоями

В этой главе будет рассмотрено самосопряженное уравнение второго порядка с малым параметром при старшей производной. В данном случае при вырождении теряются оба краевых условия, и поэтому решение содержит два пограничных слоя. Сначала будет построена схема экспоненциальной подгонки, а затем – рассмотрена классическая центрально-разностная схема на сетке, сгущающейся в пограничном слое, предложенной Н.С. Бахваловым [2].

3.1. Схема экспоненциальной подгонки

Рассмотрим краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon^2 u''(x) - q(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B. \quad (3.1)$$

Предполагаем достаточную гладкость коэффициентов, $\varepsilon \in (0, 1]$,

$q(x) \geq \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$. По аналогии с предыдущим разделом нетрудно убедиться, что для оператора L справедлив принцип максимума, то есть из условий

$$\Psi(0) \geq 0, \quad \Psi(1) \geq 0, \quad L\Psi(x) \leq 0, \quad x \in (0, 1) \quad (3.2)$$

следует $\Psi(x) \geq 0$, $x \in [0, 1]$.

Л е м м а 3.1 . Для произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $v(x)$ справедлива оценка:

$$\|v(x)\| \leq \|Lv(x)/q(x)\| + \max\{|v(0)|, |v(1)|\}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Определим функцию:

$$\Psi(x) = \|Lv(x)/q(x)\| + \max\{|v(0)|, |v(1)|\} \pm v(x).$$

Нетрудно убедиться, что для функции $\Psi(x)$ выполнены условия (3.2). В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает лемму.

Из этой леммы следует ограниченность решения задачи (3.1):

$$\|u(x)\| \leq \|f(x)/q(x)\| + \max\{|A|, |B|\}.$$

Асимптотическое приближение. Построим асимптотическое приближение к решению задачи (3.1). Пусть $u_0(x)$ - решение вырожденной задачи: $-q(x)u_0(x) = f(x)$. При вырождении задачи (3.1) теряются оба краевых условия, поэтому решение этой задачи содержит два пограничных слоя. Определим

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + V^0(x) + V^1(x),$$

где

$$\begin{aligned} V^0(x) &= [A - u_0(0)] \exp(-q(0)^{0.5} \varepsilon^{-1} x), \\ V^1(x) &= [B - u_0(1)] \exp(q(1)^{0.5} \varepsilon^{-1} (x - 1)). \end{aligned}$$

Л е м м а 3.2 . Найдется C такое, что при всех x

$$|u(x) - u_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon.$$

Доказательство. Определим $z = u - u_\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} Lz(x) &= -\varepsilon^2 u_0(x) + (A - u_0(0))(q(x) - q(0)) \exp(-q(0)^{0.5} \varepsilon^{-1} x) + \\ &+ (B - u_0(1))(q(x) - q(1)) \exp(q(1)^{0.5} \varepsilon^{-1} (x - 1)). \end{aligned}$$

Теперь нетрудно показать:

$$|Lz(x)| \leq C_1 \varepsilon, \quad |z(0)| \leq C_2 \varepsilon, \quad |z(1)| \leq C_2 \varepsilon.$$

Определим

$$\Psi(x) = C\varepsilon \pm z(x).$$

В соответствии с полученными оценками для некоторой постоянной C выполняются условия (3.2). Из принципа максимума следует утверждение леммы.

Оценка производных.

Л е м м а 3.3. Найдется постоянная C такая, что при всех j

$$\left| \frac{d^j}{dx^j} u(x) \right| \leq C [1 + \varepsilon^{-j} \exp(-q(0)^{0.5} \varepsilon^{-1} x) + \varepsilon^{-j} \exp(q(1)^{0.5} \varepsilon^{-1} (x-1))].$$

Доказательство. Можно показать, что для функции $u(x)$ справедливо асимптотическое приближение второго порядка по ε :

$$u(x) = u_0(x) + V^0(x) + \varepsilon V_1^0(x) + V^1(x) + \varepsilon V_1^1(x) + O(\varepsilon^2).$$

Следовательно,

$$\varepsilon^2 u''(x) = q(x)u(x) + f(x) = q(x)[V^0(x) + \varepsilon V_1^0(x) + V^1(x) + \varepsilon V_1^1(x) + O(\varepsilon^2)].$$

Отсюда следует требуемая оценка при $j = 2$.

Получим оценку производной при $j = 1$. Покажем, что для некоторого $s \in [0, 1]$ $|u'(s)| \leq C$. Действительно, по теореме о среднем значении $u(1) - u(0) = B - A = u'(s)$. Следовательно, $|u'(s)| \leq C$. Запишем верное соотношение:

$$u'(x) = \int_s^x u''(x) dx + u'(s).$$

Следовательно,

$$|u'(x)| \leq \int_s^x |u''(x)| dx + C.$$

Учитывая в этом неравенстве полученную оценку второй производной и интегрируя, получим утверждение леммы при $j = 1$.

Оценки при $j > 2$ получаются на основе дифференцирования уравнения (3.1) и использования принципа максимума, но останавливаться на этом не будем. Лемма доказана.

В силу того, что $q(x) \geq \alpha^2$, оценка производных упрощается:

$$\left| \frac{d^j}{dx^j} u(x) \right| \leq C [1 + \varepsilon^{-j} \exp(-\alpha \varepsilon^{-1} x) + \varepsilon^{-j} \exp(\alpha \varepsilon^{-1} (x-1))].$$

Анализ схемы центральных разностей. На конкретном примере покажем, что на равномерной сетке классическая центрально-разностная схема не обладает свойством равномерной по малому параметру сходимости. Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon^2 u''(x) - u(x) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$u(x) = [\exp(\varepsilon^{-1} x) - \exp(-\varepsilon^{-1} x)] / [\exp(\varepsilon^{-1}) - \exp(-\varepsilon^{-1})].$$

На равномерной сетке Ω рассмотрим разностную схему:

$$\varepsilon^2 \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} - u_n^h = 0, \quad u_0^h = 0, \quad u_N^h = 1.$$

Эта схема монотонна, второго порядка аппроксимации. Покажем, однако, что исследуемая схема не сходится равномерно по параметру ε . Решение схемы ищем в виде: $u_n^h = q^n$. Подставляя это в разностную схему и учитывая краевые условия, получим:

$$u_n^h = [q_1^n - q_2^n] / [q_1^N - q_2^N],$$

где q_1 и q_2 являются корнями уравнения:

$$\tau q^2 - (2\tau + 1)q + \tau = 0, \quad \tau = \varepsilon^2 / h^2.$$

При $\tau = 2$ будет $q_1 = 2$, $q_2 = 1/2$. Тогда при всех h $u_{N-1}^h \approx 1/2$, в то время как $u(x_{N-1}) \approx \exp(-1/\sqrt{2})$. Следовательно, при $\varepsilon = \sqrt{2}h$ нет сходимости $u^h \rightarrow u$ при $h \rightarrow 0$.

Построение равномерно сходящейся схемы. Рассмотрим уравнение, которому удовлетворяет функция пограничного слоя $V^0(x)$:

$$\varepsilon^2 V''(x) - q(0)V(x) = 0.$$

Выпишем для него схему центральных разностей с "подправленным" значением ε :

$$\tilde{\varepsilon} \frac{V_{n+1}^h - 2V_n^h + V_{n-1}^h}{h^2} - q(0)V_n^h = 0.$$

Потребуем, чтобы эта схема была точна на функции $V^0(x)$ и получим:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^2 \frac{\tau^2}{\sinh^2(\tau)}, \quad \tau = \frac{q(0)^{0.5}h}{2\varepsilon}.$$

Аналогично можно осуществить подгонку схемы к правой погранслоевой функции.

Итак, выпишем разностную схему для задачи (3.1):

$$\begin{aligned} L_n^h u^h &= \varepsilon_n \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} - q_n u_n^h = f_n^h, \\ u_0^h &= A, \quad u_N^h = B, \quad q_n = q(x_n), \quad f_n^h = f(x_n), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\varepsilon_n = \varepsilon^2 \frac{\tau_n^2}{\sinh^2(\tau_n)};$$

$\tau_n = \sqrt{q(0)}h/(2\varepsilon)$ при $n \leq N/2$; $\tau_n = \sqrt{q(1)}h/(2\varepsilon)$ при $n > N/2$.

Прежде чем оценить точность схемы (3.4), докажем лемму.

Л е м м а 3.4 . Пусть $w(x)$ - произвольная достаточно гладкая функция. Тогда:

$$\left| \frac{w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}}{h^2} - w_n'' \right| \leq \frac{h}{6} \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |w^{(4)}(s)| ds, \quad w_n = w(x_n).$$

Доказательство. Пользуясь соотношениями (2.34), получим:

$$I = \left| \frac{w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}}{h^2} - w_n'' \right| = \frac{1}{h^2} \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)w''(s)ds + \int_{x_{n-1}}^{x_n} (s - x_{n-1})w''(s)ds - h^2w_n'' \right|.$$

Пользуясь формулой интегрирования по частям, получим:

$$I = \frac{1}{2h^2} \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)^2 w'''(s) ds - \int_{x_{n-1}}^{x_n} (s - x_{n-1})^2 w'''(s) ds \right|.$$

Интегрируя снова по частям, получим:

$$I = \frac{1}{6h^2} \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)^3 w^{(4)}(s) ds + \int_{x_{n-1}}^{x_n} (s - x_{n-1})^3 w^{(4)}(s) ds \right|.$$

Это доказывает лемму.

Т е о р е м а 3.1 . Найдется C такое, что для решения схемы (3.4) справедлива оценка точности:

$$\|u^h - [u]\|_{\Omega} \leq C \frac{h^2}{h + \varepsilon}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - [u]$. Тогда

$$L_n z^h = L_n u^h - L_n [u] = Lu(x_n) - L_n^h [u].$$

Известно [10], что по аналогии со случаем одного погранслоя для решения $u(x)$ при $x \leq 1/2$ справедливо представление:

$$u(x) = \gamma V^0(x) + P(x), \quad V^0(x) = \exp(-q(0)^{0.5} \varepsilon^{-1} x), \quad \gamma = -\varepsilon q(0)^{0.5} u'(0),$$

где при всех j

$$|P^{(j)}(x)| \leq C[1 + \varepsilon^{1-j} \exp(-q(0)^{0.5} \varepsilon^{-1} x)], \quad (3.6),$$

то есть при $x \leq 1/2$ основной рост решения дает функция $V^0(x)$.

Аналогичное представление справедливо для правой половины интервала $[0, 1]$. Учитывая, что схема (3.4) построена на основе подгонки к функции $V^0(x)$, погрешность аппроксимации схемы (3.4) оценим отдельно на функциях $P(x)$ и $V^0(x)$.

Итак, пусть $x_n \leq 1/2$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} |LP(x_n) - L_n^h[P]| &= \left| \varepsilon^2 P''(x_n) - \tilde{\varepsilon} \frac{P_{n+1} - 2P_n + P_{n-1}}{h^2} \right| \leq \\ &|\tilde{\varepsilon} - \varepsilon^2| \left| \frac{P_{n+1} - 2P_n + P_{n-1}}{h^2} \right| + \varepsilon^2 \left| \frac{P_{n+1} - 2P_n + P_{n-1}}{h^2} - P_n'' \right|. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое этой суммы.

Оценим первое слагаемое. Имеем:

$$|\tilde{\varepsilon} - \varepsilon^2| = \frac{\varepsilon^2}{\sinh^2(\tau)} (\sinh(\tau) - \tau)(\sinh(\tau) + \tau), \quad \tau = \sqrt{q(0)h}/(2\varepsilon), \quad 0 < \tau < \infty.$$

Учитывая, что

$$C_1 \frac{\tau}{\tau + 1} \exp(\tau) \leq \sinh(\tau) \leq C_2 \frac{\tau}{\tau + 1} \exp(\tau), \quad |\sinh(\tau) - \tau| \leq C \frac{\tau^3}{\tau^3 + 1} \exp(\tau),$$

получим:

$$|\tilde{\varepsilon} - \varepsilon^2| \leq Ch^2.$$

Учитывая оценки (2.35) и (3.6), получим:

$$\begin{aligned} |\tilde{\varepsilon} - \varepsilon^2| \left| \frac{P_{n+1} - 2P_n + P_{n-1}}{h^2} \right| &\leq Ch \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |P''(s)| ds \leq \\ &\leq Ch[1 - \exp(-2\alpha\varepsilon^{-1}h)] \leq \frac{Ch^2}{h + \varepsilon}, \end{aligned}$$

Теперь оценим второе слагаемое. Учитывая лемму 3.4 и оценку (3.6), получим:

$$\varepsilon^2 \left| \frac{P_{n+1} - 2P_n + P_{n-1}}{h^2} - P_n'' \right| \leq \frac{h\varepsilon^2}{6} \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |P^{(4)}(s)| ds \leq \frac{h^2}{h + \varepsilon}.$$

Итак, при $x_n \leq 1/2$

$$|LP(x_n) - L_n^h[P]| \leq \frac{Ch^2}{h + \varepsilon}.$$

Нетрудно убедиться, что согласно построению схемы

$$\begin{aligned} |LV^0(x_n) - L_n^h[V^0]| &= \left| \varepsilon^2 (V^0)''(x_n) - \tilde{\varepsilon} \frac{V_{n+1}^0 - 2V_n^0 + V_{n-1}^0}{h^2} \right| = \\ &= |\varepsilon^2 (V^0)''(x_n) - q(0)V^0(x_n)| = 0. \end{aligned}$$

Случай $x_n > 1/2$ рассматривается аналогично.

Итак, доказали, что

$$|L_n^h z^h| \leq \frac{Ch^2}{h + \varepsilon}, \quad \forall n.$$

Учитывая, что согласно лемме 3.1

$$\|z^h\| \leq \alpha^{-2} \|L^h z^h\| + \max\{|z_0^h|, |z_N^h|\},$$

получим утверждение теоремы.

3.2. Схема на сетке Бахвалова

Н.С. Бахваловым в [2] рассмотрена система обыкновенных дифференциальных уравнений самосопряженного вида. Доказано, что классическая центрально-разностная схема на сетке, сгущающейся специальным образом в пограничном слое, обладает свойством равномерной по малому параметру сходимости. Для простоты изложения рассмотрим этот вопрос в случае одного уравнения второго порядка. Итак, рассмотрим краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon^2 u''(x) - q(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B. \quad (3.7)$$

Предполагаем, что $\varepsilon > 0$, $q(x) \geq \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$. Пусть Ω – неравномерная сетка исходного интервала:

$$\Omega = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h_n, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1\}.$$

Выпишем для задачи (3.7) разностную схему на неравномерной сетке:

$$L_n^h u^h = \varepsilon^2 \frac{2}{h_n + h_{n+1}} \left[\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{h_{n+1}} - \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h_n} \right] - q_n u_n^h = f_n, \\ u_0^h = A, \quad u_N^h = B, \quad q_n = q(x_n), \quad f_n = f(x_n). \quad (3.8)$$

Строим неравномерную сетку исходя из того, чтобы погрешность аппроксимации была одинаковой во всех узлах сетки. Пусть

$$r_n = L_n^h z^h, \quad z^h = [u]_\Omega - u^h, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Тогда

$$r_n = L_n^h [u]_\Omega - L_n^h u^h = L_n^h [u]_\Omega - Lu(x_n).$$

Следовательно,

$$r_n = \varepsilon^2 \left\{ \frac{2}{h_n + h_{n+1}} \left[\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h_{n+1}} - \frac{u(x_n) - u(x_{n-1}))}{h_n} \right] - u''(x_n) \right\}.$$

Осуществляя разложения функций $u(x_{n+1})$, $u(x_{n-1})$ в ряд Тейлора в точке x_n , получим:

$$r_n = \varepsilon^2 \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{3} u'''(x_n) + \frac{\varepsilon^2 (h_n^3 u^{(4)}(\theta_n^1) + h_{n+1}^3 u^{(4)}(\theta_n^2))}{12(h_n + h_{n+1})}. \quad (3.9)$$

Пусть $\lambda(t)$ – функция распределения узлов сетки на интервале $[0, 1]$:

$$x_n = \lambda(n/N), \quad \lambda(0) = 0, \quad \lambda(1) = 1.$$

Требуем, чтобы при всех n погрешность аппроксимации была равномерно малой,

$$r_n = \frac{C}{N^2}.$$

При оценке r_n , согласно [2], будем ориентироваться на второе слагаемое. Связано это с тем, что это слагаемое содержит $u^{(4)}(x)$ и степень параметра ε в знаменателе выше. В [2] показано, что учет этого слагаемого при построении сетки достаточен для равномерной сходимости разностной схемы.

Учитывая в (3.9) второе слагаемое, получим:

$$\left| \frac{\varepsilon^2}{12(x_{n+1} - x_{n-1})} \{ (x_n - x_{n-1})^3 u^{(4)}(\theta_n^1) + (x_{n+1} - x_n)^3 u^{(4)}(\theta_n^2) \} \right| = \frac{C}{N^2}.$$

Так как с точностью до членов второго порядка малости по $1/N$

$x_n - x_{n-1} \approx \lambda'(n/N)/N$, $x_n = \lambda(n/N)$, получим:

$$\frac{\varepsilon^2 N}{24\lambda'_n} \times \frac{2(\lambda'_n)^3}{N^3} |u^{(4)}(x_n)| = \frac{C}{N^2}.$$

После упрощений имеем:

$$\varepsilon^2 (\lambda'_n)^2 |u^{(4)}(x_n)| = C. \quad (3.10)$$

Интервал $[0, 1]$ разбиваем пополам и неравномерную сетку строим на интервале $[0, 1/2]$. Учитывая, что погранслои расположены у концов интервала, неравномерную сетку на интервале $[1/2, 1]$ строим симметричным отражением построенной сетки на первой половине интервала:

для $n > N/2$ $x_n = 1 - x_{N-n}$. Итак, строим сетку на интервале $[0, 1/2]$. Как и в первой главе, выделяем область пограничного слоя:

$$[0, 1/2] = [0, \sigma] \cup [\sigma, 1/2].$$

Пусть $x \in [0, \sigma]$. В соответствии с леммой 3.3

$$|u^{(4)}(x)| \leq \frac{C_1}{\varepsilon^4} e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x}.$$

Используя эту оценку в (3.10), получим:

$$\frac{\lambda'(t)}{\varepsilon} e^{-\alpha\lambda(t)/(2\varepsilon)} = C.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $\lambda(0) = 0$, получим:

$$\lambda(t) = \Psi(t) = C_2 \varepsilon \ln \left[\frac{C_3}{C_3 - t} \right]. \quad (3.11)$$

Пусть $x \in [\sigma, 1/2]$. Тогда $|u^{(4)}(x)| \leq C$. Из (3.10) получим $\lambda(t) = C_4 t + C_5$. Заметим, что полученная линейная функция соответствует равномерной сетке, так как

$$x_{n+1} - x_n = C_4 \frac{n+1}{N} - C_4 \frac{n}{N} = \frac{C_4}{N}.$$

Требуем, чтобы функция $\lambda(t)$ была непрерывно-дифференцируемой на интервале $[0, 1/2]$ и при $\varepsilon \leq \varepsilon_0 = C_0/(2a_0)$ согласно [2] зададим:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \Psi(t), & \text{если } 0 \leq t \leq \alpha_0, \\ \Psi(\alpha_0) + \Psi'(\alpha_0)(t - \alpha_0), & \text{если } \alpha_0 \leq t \leq 0.5, \end{cases} \quad (3.12)$$

где

$$\Psi(t) = a_0 \varepsilon \ln \frac{C_0}{C_0 - t}, \quad t < C_0,$$

a_0, C_0 – постоянные, удовлетворяющие условиям $a_0 \geq 4/\alpha$, $1/2 > C_0 > 0$.

В случае $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ задаем $\lambda(t) = t$, что соответствует равномерной сетке. Заметим, что $\lambda(\alpha_0) = \sigma$, и α_0 является корнем нелинейного алгебраического уравнения. Дело в том, что величины a_0, C_0 задаются достаточно произвольным образом (об этом сказано выше), а α_0 удовлетворяет условию:

$$\Psi(\alpha_0) + \Psi'(\alpha_0)(1/2 - \alpha_0) = 1/2.$$

Касательную нужно провести в такой точке, чтобы в плоскости (t, x) касательная прошла через точку $(1/2, 1/2)$. Найти эту точку можно методом секущих. Этот метод состоит в следующем.

Берем $\alpha_1 < C_0$. Вычисляем $\beta_1 = \Psi(\alpha_1)$. Через точки (α_1, β_1) и $(1/2, 1/2)$ проводим секущую. Далее определяем следующее итерационное приближение α_2 таким образом, чтобы направление касательной в этой точке совпало с направлением проведенной секущей. Таким образом, итерации можно продолжить, и α_0 может быть найдено с заданной точностью.

В случае $\varepsilon > \varepsilon_0 = C_0/(2a_0)$ зададим $\lambda(t) = t$, что соответствует равномерной сетке. Для $t \in [0.5, 1]$ зададим $\lambda(t) = 1 - \lambda(1 - t)$.

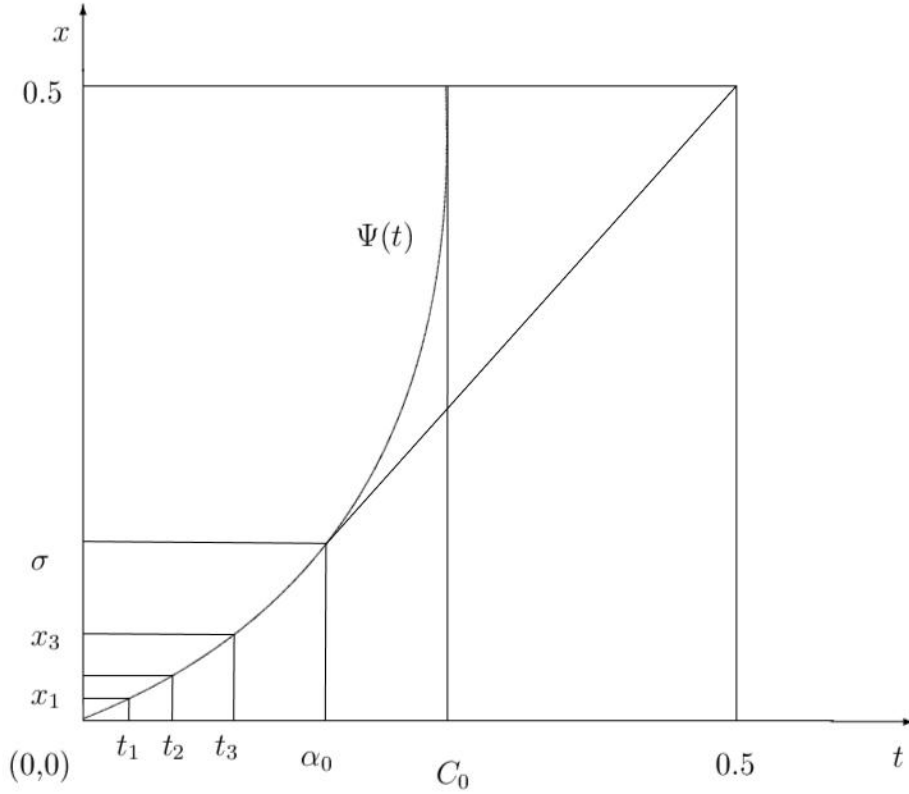


Рис. 7. Построение сетки Бахвалова

Т е о р е м а 3.2. На построенной сетке для схемы (3.8) справедлива оценка точности:

$$\max_n |u_n^h - u(x_n)| \leq \frac{C}{N^2}. \quad (3.13)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Оценим погрешность аппроксимации r_n , соответствующую (3.9). Для $t \geq \alpha_0$ $\lambda(t)$ задается в виде прямой, поэтому при всех $t > 0$ $0 < \lambda'(t) \leq C_1$. Постоянная C_1 – это коэффициент наклона прямой, соединяющей точки $(C_0, 0)$ и $(1/2, 1/2)$. При $t_n < C_0$

$$\lambda'(t_n) \leq \Psi'(t_n) = a_0\varepsilon/(C_0 - t_n).$$

При $t_n \leq C_0 - 2/N$ выполнится $0.5(C_0 - t_n) \leq C_0 - t_{n+1}$, поэтому

$$x_{n+1} - x_n \leq \frac{2a_0\varepsilon}{(C_0 - t_n)N}, \quad t_n \leq C_0 - \frac{2}{N}. \quad (3.14)$$

Оценим $|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}|$. Справедливо равенство:

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \lambda''(\theta_n)/N^2.$$

При всех $t \leq \alpha_0$

$$\lambda''(t) = \frac{a_0\varepsilon}{(C_0 - t)^2} \leq \frac{a_0\varepsilon}{(C_0 - \alpha_0)^2},$$

причем

$$C_0 - \alpha_0 \geq C_0 - \alpha_1 = \frac{a_0 \varepsilon}{C_1},$$

где α_1 – точка, в которой $\Psi'(\alpha_1) = C_1$ (в которой касательная параллельна прямой, соединяющей $(C_0, 0)$ и $(1/2, 1/2)$.) Следовательно,

$$|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}| \leq \frac{C_1^2}{a_0 \varepsilon N^2}, \quad \forall n. \quad (3.15)$$

Пусть $\theta_n < C_0$. Тогда $\lambda''(\theta_n) \leq a_0 \varepsilon / (C_0 - \theta_n)^2$ и поэтому

$$|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}| \leq \frac{4a_0 \varepsilon}{((C_0 - t_n)N)^2}, \quad \text{при } t_n \leq C_0 - \frac{2}{N}. \quad (3.16)$$

Вследствие определения $\lambda(t)$ выполняются соотношения:

$$e^{-\alpha \varepsilon^{-1} x_n} = [(C_0 - t_n)/C_0]^{\alpha a_0} \quad \text{при } t_n \leq \alpha_0, \quad (3.17)$$

$$e^{-\alpha \varepsilon^{-1} x_n} \leq e^{-\alpha a_0 \ln\{C_0/(a_0 \varepsilon)\}} = (a_0 \varepsilon / C_0)^{\alpha a_0} \quad \text{при } \alpha_2 \leq t_n, \quad (3.18)$$

$$e^{-\alpha \varepsilon^{-1} x_n} \leq (3/(C_0 N))^{\alpha a_0} \quad \text{при } C_0 - 3/N \leq t_n. \quad (3.19)$$

В (3.18) α_2 соответствует точке, в которой касательная к $\Psi(t)$ параллельна прямой, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(1/2, 1/2)$, то есть $\Psi'(\alpha_2) = 1$, тогда $\alpha_2 = C_0 - a_0 \varepsilon$. С учетом условия $\varepsilon \leq C_0/(2a_0)$ $\alpha_2 \geq C_0/2$. Из геометрических соображений понятно, что $\alpha_2 < \alpha_0 < \alpha_1$. Учитывая соотношение (3.9) для погрешности аппроксимации r_n и используя оценки производных в соответствии с леммой 3.3, получим:

$$\begin{aligned} |r_n| \leq & \frac{C}{\varepsilon} |x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}| e^{-\alpha \varepsilon^{-1} x_n} + C \varepsilon^2 |x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}| + \\ & + \frac{C(x_{n+1} - x_n)^3}{12(x_{n+1} - x_{n-1})} + \frac{C(x_{n+1} - x_n)^3}{12\varepsilon^2(x_{n+1} - x_{n-1})} e^{-\alpha \varepsilon^{-1} \theta_n^1} + \\ & + \frac{C(x_n - x_{n-1})^3}{12(x_{n+1} - x_{n-1})} + \frac{C(x_n - x_{n-1})^3}{12\varepsilon^2(x_{n+1} - x_{n-1})} e^{-\alpha \varepsilon^{-1} \theta_n^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для оценки r_n рассмотрим различные случаи на t_n .

Пусть $t_n \leq \min\{\alpha_0, C_0 - 2/N\}$. Учитывая оценки (3.14),(3.16),(3.17), $a_0 \alpha \geq 2$, из(3.20) несложно получить

$$|r_n| \leq \frac{C}{N^2}, \quad \forall n. \quad (3.21)$$

Пусть $t_{n-1} \geq \alpha_2 = C_0 - a_0 \varepsilon$. Учитывая (3.15),(3.18), из (3.20) получим (3.21).

Другие случаи рассматриваются аналогично. Итак, при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедлива оценка (3.21).

Рассмотрим случай $\varepsilon \geq \varepsilon_0$. Обратимся к (3.9). В этом случае шаг сетки постоянен, $h = 1/N$, $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 0$, производные ограничены равномерно по ε ($|u^{(4)}(x)| \leq C/\varepsilon_0^4$), из чего следует оценка (3.21).

Итак, равномерно по ε имеет место оценка (3.21). Теперь придем к утверждению теоремы, если используем следствие леммы 3.1:

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq \frac{\max |r_n|}{\alpha^2}.$$

4. Третья краевая задача для нелинейного уравнения

Рассмотрим краевую задачу для нелинейного уравнения:

$$Tu = \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - f(x, u) = 0, \quad (4.1)$$

$$L_0 u = \delta_1 u(0) - \varepsilon \beta_1 u'(0) = A, \quad u(1) = B, \quad (4.2)$$

где функции $a(x)$, $f(x, u)$ – дважды непрерывно дифференцируемы по x и $f(x, u)$ – непрерывно дифференцируема по u . Предполагаем, что

$$\varepsilon > 0, \quad a(x) \geq \alpha > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} \geq 0, \quad \delta_1 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \delta_1 + \beta_1 > 0. \quad (4.3)$$

4.1. Анализ дифференциальной задачи

Принцип максимума. Рассмотрим вспомогательный линейный оператор с крайвыми условиями третьего рода:

$$Lu(x) = \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x),$$

$$L_0 u = \delta_1 u(0) - \varepsilon \beta_1 u'(0), \quad L_1 u = u(1). \quad (4.4)$$

Л е м м а 4.1. Пусть существует $\phi(x)$:

$$\phi(x) > 0, \quad L\phi(x) < 0, \quad x \in I, \quad I = [0, 1], \quad L_0 \phi(x) > 0. \quad (4.5)$$

Тогда для оператора L с заданными операторами в крайвых условиях справедлив принцип максимума: если

$$L_0 \Psi(x) \geq 0, \quad \Psi(1) \geq 0, \quad L\Psi(x) \leq 0, \quad 0 < x < 1, \quad (4.6)$$

то $\Psi(x) \geq 0$, $x \in I$.

Доказательство. Представим $\Psi(x)$ в виде произведения $\Psi(x) = \phi(x)y(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} L\Psi(x) &= \varepsilon\phi(x)y''(x) + [2\varepsilon\phi'(x) + a(x)\phi(x)]y'(x) + L\phi(x)y(x), \\ L_0\Psi(x) &= L_0\phi(x)y(0) - \varepsilon\beta_1\phi(0)y'(0), \quad L_1\Psi(x) = \phi(1)y(1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Предположим, что найдется $s: y(s) < 0$. Тогда в силу непрерывности $y(x)$ найдется точка $s_0 < 1$, в которой для функции $y(x)$ достигается отрицательный минимум.

Пусть $s_0 = 0$. Тогда $y(0) < 0$, $y'(0) \geq 0$. С учетом условий (4.5) и соотношений (4.7) получим $L_0\Psi(x) < 0$, что противоречит (4.6).

Пусть $0 < s_0 < 1$. Тогда в точке s_0 локальный отрицательный минимум функции $y(x)$. В точке минимума

$$y(s_0) < 0, \quad y'(s_0) = 0, \quad y''(s_0) \geq 0.$$

Тогда из соотношений (4.7) и условий (4.5) получим $L\Psi(s_0) > 0$, что противоречит (4.6). Лемма доказана.

Покажем, что для задачи (4.1),(4.2) при ограничениях (4.3) справедлив принцип максимума. Для этого достаточно воспользоваться леммой 4.1 и выбрать $\phi(x) = 2-x$. Заметим, что можно наложить более слабые ограничения, чем (4.3), и при этом все равно будет справедлив принцип максимума. Но останавливаться на этом не будем.

Получим оценку устойчивости для задачи (4.1)-(4.2) в предположении ограничений (4.3).

Л е м м а 4.2. Пусть $p(x), q(x) \in C_2[0, 1]$. Тогда

$$\|p - q\| \leq \frac{1}{\alpha} \|Tp - Tq\| + \frac{1}{\delta_1 + \alpha\beta_1} |L_0p - L_0q| + |p(1) - q(1)|. \quad (4.8)$$

Доказательство. Пусть $z(x) = p(x) - q(x)$. Исходя из (4.1),(4.2), получим линейную задачу на z :

$$\begin{aligned} Lz(x) &= \varepsilon z''(x) + a(x)z'(x) - b(x)z(x) = Tp(x) - Tq(x), \\ L_0z(x) &= \delta_1 z(0) - \varepsilon\beta_1 z'(0) = L_0p - L_0q, \quad z(1) = p(1) - q(1), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$b(x) = \frac{f(x, p(x)) - f(x, q(x))}{p(x) - q(x)} = f'_u(x, \tau(x)) \geq 0.$$

Учитывая, что в краевом условии при β_1 стоит малый параметр ε , а в то же время $\delta_1 + \beta_1 > 0$, подберем функцию $\Psi(x)$ в виде:

$$\Psi(x) = \frac{1-x}{\alpha} \|Tp - Tq\| + \frac{1}{\delta_1 + \alpha\beta_1} e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x} |L_0p - L_0q| + |p(1) - q(1)| \pm z(x).$$

Основываясь на задаче (4.9), несложно показать, что для $\Psi(x)$ выполнены условия (4.6). В силу принципа максимума при всех x $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает лемму.

Следствие 1. Для решения задачи (4.1), (4.2) справедлива оценка:

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f(x, 0)\| + \frac{1}{\delta_1 + \alpha\beta_1} |A| + |B|. \quad (4.10)$$

Это следует из (4.8), если задать $p(x) = u(x)$, $q(x) = 0$.

Следствие 2. Решение задачи (4.1), (4.2) единственно.

Если $p(x)$ и $q(x)$ – два решения, то в соответствии с (4.8)

$$\|p(x) - q(x)\| = 0, \text{ поэтому } p(x) = q(x).$$

По аналогии с леммой 2.4 можно показать, что справедлива оценка производных решения задачи (4.1), (4.2):

$$|u^{(j)}(x)| \leq C[1 + \varepsilon^{-j} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x)]. \quad (4.11)$$

Кроме этого, по аналогии со случаем линейной задачи (глава 2) можно в явном виде выделить составляющую, задающую основной погранслоный рост решения: $u(x) = V(x) + p(x)$, где $V(x) = \gamma \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x)$, $p(x)$ удовлетворяет оценке (2.10).

4.2. Построение разностной схемы

В соответствии с оценкой (4.11) решение содержит пограничный слой у границы $x = 0$. Построим схему подгонки к экспоненциальной функции $V(x)$. Во внутренних узлах подгонку осуществляем согласно схеме Ильина, рассмотренной выше. Остановимся на вопросе аппроксимации производной в левом краевом условии.

Остановимся на классической аппроксимации производной:

$$u'(0) \approx u_{x,0} = \frac{u(h) - u(0)}{h}.$$

Так как производная $u'(0)$ порядка $1/\varepsilon$, то на примере оценим погрешность $|\varepsilon u'(0) - \varepsilon u_{x,0}|$ аппроксимации потока $\varepsilon u'(0)$ через границу. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon u''(x) + u'(x) = 0$$

с решением $u(x) = \exp(-x/\varepsilon)$. Тогда при $\varepsilon = h$

$$|\varepsilon u'(0) - \varepsilon u_{x,0}| = e^{-1}.$$

С уменьшением h погрешность аппроксимации потока не уменьшается.

Определим аппроксимацию производной, точную на погранслоной функции:

$$V'(0) = \tilde{V}_{x,0} = \tilde{\varepsilon} \frac{V(h) - V(0)}{h}.$$

Подставляя $V(x)$, получим:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tau}{1 - e^{-\tau}}, \quad \tau = \frac{a_0 h}{\varepsilon}.$$

Л е м м а 4.3. Для некоторой постоянной C_1

$$|\varepsilon \tilde{u}_{x,0} - \varepsilon u'(0)| \leq C_1 h. \quad (4.12)$$

Доказательство. Воспользуемся представлением решения $u(x) = V(x) + p(x)$ и тем, что исследуемая аппроксимация производной точна на функции $V(x)$, и получим:

$$\varepsilon |\tilde{u}_{x,0} - u'(0)| = \varepsilon |\tilde{p}_{x,0} - p'(0)| = a_0 \left| \frac{p(h) - p(0)}{1 - \exp(-a_0 h/\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{a_0} p'(0) \right|. \quad (4.13)$$

Пусть $\varepsilon \leq a_0 h$. Тогда

$$1 - \exp(-a_0 h/\varepsilon) \geq 1 - \exp(-1) > 0.5 .$$

Согласно (2.10) $|p'(x)| \leq C$, тогда из (4.13) следует:

$$\varepsilon |\tilde{u}_{x,0} - u'(0)| \leq C_2 (h + \varepsilon).$$

Учитывая, что $\varepsilon \leq a_0 h$, получим оценку (4.12).

Пусть $\varepsilon > a_0 h$. Осуществляя в (4.13) разложения в ряд, получим оценку (4.12). Лемма доказана.

С учетом экспоненциальной подгонки во внутренних узлах и в краевом условии, получим разностную схему:

$$\begin{aligned} T_n^h u^h &= \varepsilon_n \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} + a_n \frac{u_{n+1}^h - u_{n-1}^h}{2h} - f(x_n, u_n^h) = 0, \\ L_0^h u^h &= \delta_1 u_0^h - a_0 \beta_1 \frac{u_1^h - u_0^h}{1 - \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} h)} = A, \quad L_N^h u^h = u_N^h = B, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $0 < n < N$, $a_n = a(x_n)$, ε_n соответствует (2.30).

Для анализа нелинейной задачи (4.14) определим линейный оператор:

$$L_n^h z^h = \varepsilon_n \frac{z_{n+1}^h - 2z_n^h + z_{n-1}^h}{h^2} + a_n \frac{z_{n+1}^h - z_{n-1}^h}{2h} - b_n z_n^h. \quad (4.15)$$

Предполагаем, что для всех $0 < n < N$ $b_n \geq 0$.

Л е м м а 4.4. (Принцип максимума.) Пусть существует сеточная функция ϕ^h :

$$\forall n \phi_n^h > 0, \quad L_n^h \phi^h < 0, \quad 0 < n < N, \quad L_0^h \phi^h > 0. \quad (4.16)$$

Тогда для произвольной сеточной функции Ψ^h из условий:

$$L_n^h \Psi^h \leq 0, \quad 0 < n < N, \quad L_0^h \Psi^h \geq 0, \quad \Psi_N^h \geq 0 \quad (4.17)$$

следует $\forall n \Psi_n^h \geq 0$.

Доказательство. Остановимся кратко на доказательстве, так как оно аналогично лемме 2.6. Представим Ψ^h в виде произведения

$\Psi_n^h = \phi_n^h V_n^h$. Предположим, что при некотором n $\Psi_n^h < 0$. Тогда $V_n^h < 0$. В этом случае в сеточной области существует точка отрицательного минимума x_m . Если $0 < m < N$ (внутренняя точка), то противоречие получается, как и в лемме 2.6.

Остается рассмотреть случай $m = 0$. Несложно показать, что

$$L_0^h \Psi^h = L_0^h \phi^h V_0^h + \frac{a_0 \beta_1 \phi_1^h}{1 - \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} h)} (V_0^h - V_1^h).$$

Учитывая, что $V_0^h < 0$, $V_0^h \leq V_1^h$, получим $L_0^h \Psi^h < 0$, что противоречит (4.17). Итак, при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Лемма доказана.

Замечание. Для оператора L^h из (4.15) с операторами краевых условий L_0^h , L_N^h справедлив принцип максимума.

Чтобы показать это, воспользуемся леммой 4.4 и определим ϕ^h : $\phi_n^h = 2 - x_n$. Тогда для сеточной функции ϕ^h выполняются условия (4.16), из чего следует справедливость принципа максимума.

Получим оценку устойчивости для нелинейной сеточной задачи (4.14).

Л е м м а 4.5. Пусть p^h, q^h – две произвольные сеточные функции. Тогда для схемы (4.14) справедлива оценка устойчивости:

$$\|p^h - q^h\| \leq \frac{1}{\alpha} \|T^h p^h - T^h q^h\| + \frac{1}{\delta_1 + \alpha \beta_1} |L_0^h p^h - L_0^h q^h| + |p_N^h - q_N^h|. \quad (4.18)$$

Доказательство. Пусть $z^h = p^h - q^h$. Тогда, используя операторы, которыми определяется схема (4.14), относительно z^h получим линейную краевую задачу:

$$\begin{aligned} L_n^h z^h &= \varepsilon_n \frac{z_{n+1}^h - 2z_n^h + z_{n-1}^h}{h^2} + a_n \frac{z_{n+1}^h - z_{n-1}^h}{2h} - b_n z_n^h = T_n^h p^h - T_n^h q^h, \\ L_0^h z^h &= \delta_1 z_0^h - a_0 \beta_1 \frac{z_1^h - z_0^h}{1 - \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} h)} = L_0^h p^h - L_0^h q^h, \\ z_N^h &= p_N^h - q_N^h, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где

$$b_n = \frac{f(x_n, p_n^h) - f(x_n, q_n^h)}{p_n^h - q_n^h} = f'_u(x_n, \tau_n^h) \geq 0.$$

Итак, $b_n \geq 0$. Для задачи (4.19) в соответствии с леммой 4.4 и замечанием к ней справедлив принцип максимума.

Определим сеточную функцию Φ^h с компонентами:

$$\Phi_n^h = e^{-\alpha \varepsilon^{-1} x_n}.$$

Покажем, что при всех n

$$L_n^h \Phi^h \leq 0. \quad (4.20)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} L_n^h \left[e^{-\alpha \varepsilon^{-1} x} \right] &\leq e^{-\alpha \varepsilon^{-1} x_n} \left[\varepsilon_n \frac{e^{-\alpha \varepsilon^{-1} h} - 2 + e^{\alpha \varepsilon^{-1} h}}{h^2} + \alpha \frac{e^{-\alpha \varepsilon^{-1} h} - e^{\alpha \varepsilon^{-1} h}}{2h} \right] \leq \\ &e^{-\alpha \varepsilon^{-1} x_n} \frac{\alpha}{2h} \left[\operatorname{cth} \frac{\alpha}{2\varepsilon} \left(e^{-\alpha \varepsilon^{-1} h} - 2 + e^{\alpha \varepsilon^{-1} h} \right) + e^{-\alpha \varepsilon^{-1} h} - e^{\alpha \varepsilon^{-1} h} \right] = 0. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (4.20) имеет место.

Теперь докажем, что

$$L_0^h \Phi^h \geq \delta_1 + \alpha \beta_1. \quad (4.21)$$

Имеем:

$$L_0^h \left[e^{-\alpha \varepsilon^{-1} x} \right] = \delta_1 + a_0 \beta_1 \frac{1 - e^{-\alpha \varepsilon^{-1} h}}{1 - e^{-a_0 \varepsilon^{-1} h}}.$$

В силу того, что функция $(1 - e^{-x})/x$ – убывающая,

$$\frac{1 - e^{-\alpha \varepsilon^{-1} h}}{1 - e^{-a_0 \varepsilon^{-1} h}} \geq \frac{\alpha \varepsilon^{-1} h}{a_0 \varepsilon^{-1} h} = \frac{\alpha}{a_0}.$$

Теперь из последнего равенства получим требуемую оценку (4.21).

Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_n^h = \frac{1 - x_n}{\alpha} \|T^h p^h - T^h q^h\| + \frac{|L_0^h p^h - L_0^h q^h|}{\delta_1 + \alpha \beta_1} \Phi_n^h + |p_N^h - q_N^h| \pm z_n^h.$$

Учитывая неравенства (4.20), (4.21), соотношения (4.19), убеждаемся в справедливости условий (4.17). Тогда в силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Из этого неравенства следует утверждение леммы.

Следствие 1. Для решения схемы (4.14) справедлива оценка:

$$\|u^h\| \leq \frac{1}{\alpha} \max_n |f(x_n, 0)| + \frac{1}{\delta_1 + \alpha \beta_1} |A| + |B|. \quad (4.22)$$

Это следует из (4.18), если задать $p^h = u^h$, $q^h = 0$.

Следствие 2. Решение задачи (4.14) единственно.

Если p^h и q^h – два решения, то в соответствии с (4.18)

$$\|p^h - q^h\| = 0, \text{ поэтому } p^h = q^h.$$

Докажем, что построенная схема (4.14) обладает свойством равномерной сходимости.

Т е о р е м а 4.1. Для некоторой постоянной C

$$\max_n |u_n^h - u(x_n)| \leq Ch. \quad (4.23)$$

Доказательство. Пусть $z^h = [u] - u^h$. Тогда z^h является решением линейной задачи по аналогии с (4.19):

$$\begin{aligned} L_n^h z^h &= \varepsilon_n \frac{z_{n+1}^h - 2z_n^h + z_{n-1}^h}{h^2} + a_n \frac{z_{n+1}^h - z_{n-1}^h}{2h} - b_n z_n^h = T_n^h[u] - T_n^h u^h, \\ L_0^h z^h &= \delta_1 z_0^h - a_0 \beta_1 \frac{z_1^h - z_0^h}{1 - \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} h)} = L_0^h[u]^h - L_0^h u^h, \quad z_N^h = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где, как и в (4.19), $b_n \geq 0$. Доказательство проводим за несколько шагов.

1). Докажем, что при всех n

$$|L_n^h z^h| \leq C_1 \left[h + \frac{h}{h + \varepsilon} \exp\left(-\frac{\alpha x_{n-1}}{2\varepsilon}\right) \right]. \quad (4.25)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} L_n^h z^h &= T_n^h[u] - T_n^h u^h = T_n^h[u] - 0 = T_n^h[u] - T u(x_n) = \\ &= \varepsilon_n \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} - \varepsilon u''(x_n) + a_n \frac{u_{n+1}^h - u_{n-1}^h}{2h} - a_n u'(x_n). \end{aligned}$$

В соответствии с оценкой (4.11) для производных решения нелинейной задачи (4.1),(4.2) справедливы такие же оценки, как и для решения линейной задачи (2.1). Справедливо и аналогичное разложение решения в сумму $u(x) = V(x) + p(x)$. Полученное выражение для $L_n^h z^h$ ничем не отличается от случая линейной задачи, поэтому, по аналогии с теоремой 2.2, убеждаемся в справедливости неравенства (4.25).

2). Докажем, что

$$|L_0^h z^h| \leq C_2 h. \quad (4.26)$$

Имеем:

$$|L_0^h z^h| = |L_0^h[u] - L_0^h u^h| = |L_0^h[u] - L_0 u(x)| = \beta_1 \varepsilon |\tilde{u}_{x,0} - u'(0)|.$$

Учитывая (4.12), получим требуемую оценку (4.26).

3). Строим подходящую сеточную функцию Ψ^h для использования принципа максимума:

$$\Psi_n^h = C \left[1 - x_n + \exp\left(-\frac{\alpha x_{n-1}}{2\varepsilon}\right) + \Phi_n^h \right] h \pm z_n^h.$$

Учитывая неравенство (2.41), неравенства (4.20) и (4.21) для Φ^h и то, что

$$L_0^h \left[\exp\left(-\frac{\alpha x}{2\varepsilon}\right) \right] \geq 0,$$

получим, что для некоторой постоянной C для сеточной функции Ψ^h выполнены условия (4.17). В силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает требуемую оценку (4.23) при всех n , кроме $n = 0$, так как при $n = 0$ слагаемое в Ψ_n^h

$$C \exp\left(-\frac{\alpha x_{n-1}}{2\varepsilon}\right) h = C \exp\left(\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right) h$$

не ограничено равномерно по ε .

В случае $n = 0$ используем оценку (4.26). В соответствии с этой оценкой

$$\left| \delta_1 z_0^h - a_0 \beta_1 \frac{z_1^h - z_0^h}{1 - \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} h)} \right| \leq C_2 h.$$

Мы доказали, что $|z_1^h| \leq Ch$. Следовательно,

$$|z_0^h| \left(\delta_1 + \frac{a_0 \beta_1}{1 - \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} h)} \right) \leq \frac{Ch}{1 - \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} h)}.$$

В случае $\delta_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$ сразу получим $|z_0^h| \leq Ch$.

В случае $\delta_1 \neq 0$, $a_0 \beta_1 \neq 0$ выбираем из них минимум и получим $|z_0^h| \leq Ch$.

Остается рассмотреть случай $\delta_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$. Тогда $z_0^h = u_0^h - u(0) = 0$, так как $u_0^h = u(0) = A/\delta_1$.

Итак, $|z_0^h| \leq Ch$, что завершает доказательство теоремы.

4.3. Линеаризация разностной схемы

Разностная схема (4.14) представляет собой нелинейную систему алгебраических уравнений. Для нахождения численного решения этой схемы осуществим линеаризацию на основе итераций Пикара и Ньютона. Будем предполагать, что

$$D \geq \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \geq d > 0.$$

Линеаризация Пикара. Осуществляем линеаризацию в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2} + a_n \frac{u_{n+1}^m - u_{n-1}^m}{2h} - M u_n^m &= f(x_n, u_n^{m-1}) - M u_n^{m-1}, \\ \delta_1 u_0^m - a_0 \beta_1 \frac{u_1^m - u_0^m}{1 - \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} h)} &= A, \quad u_N^m = B, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где m – номер итерации, u^0 – некоторое начальное приближение.

Пусть $z^m = u^m - u^h$ – погрешность итерации с номером m . Вычитая из (4.27) разностную схему (4.14), получим краевую задачу:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \frac{z_{n+1}^m - 2z_n^m + z_{n-1}^m}{h^2} + a_n \frac{z_{n+1}^m - z_{n-1}^m}{2h} - M z_n^m &= \\ = f(x_n, u_n^{m-1}) - f(x_n, u_n^h) - M z_n^{m-1}, \\ \delta_1 z_0^m - a_0 \beta_1 \frac{z_1^m - z_0^m}{1 - \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} h)} &= 0, \quad z_N^m = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Применяя к задаче (4.28) принцип максимума, несложно получить:

$$\|z^m\| \leq \frac{1}{M} \max_n |f(x_n, u_n^{m-1}) - f(x_n, u_n^h) - Mz_n^{m-1}|.$$

Используя теорему о среднем значении, получим:

$$\|z^m\| \leq \max_n \left| \frac{f'_u(x_n, \theta_n) - M}{M} z_n^{m-1} \right|.$$

Зададим $M = D$. Тогда

$$\|z^m\| \leq \left(1 - \frac{d}{D}\right) \|z^{m-1}\|.$$

Таким образом, независимо от начального приближения метод линеаризации сходится и за m итераций погрешность уменьшится согласно оценке

$$\|z^m\| \leq \left(1 - \frac{d}{D}\right)^m \|z^0\|.$$

На каждой итерации линейная схема (4.27) является монотонной и метод прогонки для нахождения решения устойчив.

Линеаризация Ньютона. К схеме (4.14) можно применить линеаризацию Ньютона. Разностное уравнение (4.14) при этом линеаризуется на основе разложения функции от решения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2} + a_n \frac{u_{n+1}^m - u_{n-1}^m}{2h} - \\ - f(x_n, u_n^{m-1}) - f'_u(x_n, u_n^{m-1})(u_n^m - u_n^{m-1}) = 0. \end{aligned}$$

Тогда линеаризованная схема (4.14) принимает вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2} + a_n \frac{u_{n+1}^m - u_{n-1}^m}{2h} - f'_u(x_n, u_n^{m-1})u_n^m = \\ = f(x_n, u_n^{m-1}) - f'_u(x_n, u_n^{m-1})u_n^{m-1}, \\ \delta_1 u_0^m - a_0 \beta_1 \frac{u_1^m - u_0^m}{1 - \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} h)} = A, \quad u_N^m = B. \end{aligned} \quad (4.29)$$

На каждой итерации схема (4.29) монотонна и разрешима методом прогонки.

Остановимся на вопросе сходимости итераций. Пусть $z^m = u^m - u^h$. Запишем краевую задачу относительно погрешности z^m :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \frac{z_{n+1}^m - 2z_n^m + z_{n-1}^m}{h^2} + a_n \frac{z_{n+1}^m - z_{n-1}^m}{2h} - f'_u(x_n, \theta_n)z_n^m = \\ = f(x_n, u_n^{m-1}) - f(x_n, u_n^h) - f'_u(x_n, \theta_n)z_n^{m-1}, \\ \delta_1 z_0^m - a_0 \beta_1 \frac{z_1^m - z_0^m}{1 - \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} h)} = 0, \quad z_N^m = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Преобразуя правую часть разностного уравнения и применяя принцип максимума к схеме (4.30), несложно показать, что

$$\|z^m\| \leq d^{-1} \max |f''_{uu}(x, u)| \|z^{m-1}\|^2. \quad (4.31)$$

В соответствии с оценкой (4.31) метод линеаризации Ньютона квадратично сходится при достаточно хорошем начальном приближении. В соответствии с оценкой (4.31) метод сходится, если

$$d^{-1} \max |f''_{uu}(x, u)| \|z^0\| < 1.$$

5. Эллиптические сингулярно возмущенные краевые задачи

Эллиптические сингулярно-возмущенные краевые задачи активно изучались, начиная работы М.И. Вишика и Л.А. Люстерника 1957 года [7]. В этой работе показывается, как при вырождении теряется часть граничных условий и появляется регулярный пограничный слой. Показывается, что решение можно представить в виде суммы внешнего и погранслоя рядов. Метод согласования асимптотических разложений исследовался в работах А.М. Ильина [15], А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова [6] [3], С.А. Ломова [?]. В работах В.Ф. Бутузова изучались задачи с угловым пограничным слоем, возникающие в случае негладкой границы исходной области (например, прямоугольная область). В этом случае решение строилось в виде суммы внешнего разложения (функции с ограниченной производной), разложений вблизи погранслоя (внутренних разложений) и разложений для угловых погранслоя функций. Доказывается, что если в асимптотических рядах взять m членов, то точность построения решения исходной сингулярно-возмущенной задачи будет порядка $O(\varepsilon^{m+1})$. Для нахождения решения в соответствии с данным подходом необходимо решать ряд вспомогательных дифференциальных задач (опять же численным методом), причем метод работоспособен лишь при малых значениях параметра ε , так как точность разложений выражается в виде некоторой степени параметра ε .

Разностные схемы для сингулярно-возмущенных эллиптических краевых задач строились, начиная с работ 1969 года Н.С. Бахвалова и А.М. Ильина. Преимущество данного подхода, во-первых, в том, что дифференциальная задача сводится к системе алгебраических уравнений и в линейном случае дело сводится к обращению матриц. Во-вторых, параметр ε может быть произвольным. Точность зависит только от числа узлов схемы. В любом случае, для того, чтобы схема сходилась равномерно по параметру ε , она должна каким-то образом учитывать погранслои в решении. Учет погранслоев может быть как за счет подгонки коэффициентов схемы к погранслою составляющей решения, так и за счет сгущения сетки в пограничных слоях (подгонка не схемы, а разностной сетки).

Какой подход лучше? Подход, основанный на сгущении сетки, как показывают результаты целого ряда работ, оказывается более универсальным. Прежде всего, необходимо различать вид пограничного слоя.

Если пограничный слой регулярный (задается в виде экспоненциальной или степенной функции), то можно построить схему подгонки к этой функции, которая будет равномерно сходящейся. Схема может быть громоздкой, особенно, если речь идет о схеме повышенной точности, может при этом потерять свойство монотонности, что затрудняет анализ сходимости этой схемы и нахождение ее решения. Если погранслои параболический, то функция погранслоя является решением параболической задачи.

ческого уравнения и сложным образом зависит от двух переменных. Г.И. Шишкин в 1992 году [23] доказал, что в случае параболического пограничного слоя нельзя построить на произвольной равномерной сетке равномерно сходящуюся разностную схему. Тем самым показано, что в случае уравнений в частных производных метод подгонки на равномерной сетке не может быть универсальным.

Как показали исследования Г.И. Шишкина, J.J.H. Miller, P.A. Farrell, E. o'Riordan и ряда других авторов, в случаях регулярных и параболических пограничных слоев метод сгущения сетки приводит к равномерно сходящимся разностным схемам. Первоначально неравномерную сетку предложил Н.С. Бахвалов, о ней говорилось выше. Доказано, что в случае обыкновенного дифференциального уравнения точность обычной центрально-разностной схемы на этой сетке $O(1/N^2)$, где N - число узлов сетки. Но в предложенной сетке, во-первых, шаг неравномерен, а, во-вторых, необходимо итерационным путем (!) искать точку, при переходе через которую сетка становится равномерной. Эта сетка совершенствовалась в работах В.Д. Лисейкина [18] и R. Vulcanovic [29].

В 1992 году в [23] Г.И. Шишкин предложил свою сетку для погранслоевых задач. Эта сетка кусочно-равномерная, то есть равномерная с крупным шагом вне пограничных слоев и равномерная с достаточно мелким шагом в пограничных слоях.

На такой сетке, как показано в работах В.Б. Андреева и его учеников, даже схема центральных разностей, заведомо не являющаяся монотонной, обладает свойством равномерной сходимости. Так как принцип максимума в этом случае не работает, для оценки точности разностных схем применяется аппарат сеточных функций Грина. Таким образом, сама сетка Шишкина проста, и классические разностные схемы на этой сетке обладают свойством равномерной по малому параметру сходимости. Простота сетки приводит к некоторой потере точности (в сравнении с сеткой Бахвалова точность $O(1/N^2)$ меняется на $O((1/N^2) \ln^2 N)$, но при больших N потеря точности не существенна.

В данное время существенная тенденция в развитии численных методов решения задач с пограничным слоем - разработка разностных схем для нелинейных задач механики сплошных сред, в частности, для уравнений Навье-Стокса с большими числами Рейнольдса, для моделирования процессов горения с учетом зоны горения (большие числа Пекле). Отметим, например, работу [26].

Мы не останавливались на методе конечных элементов для решения задач с пограничным слоем. Конечно-элементные методы рассматриваются на сгущающихся в пограничных слоях сетках или на равномерных сетках с включением в базис экспоненциальных функций пограничного слоя. Здесь необходимо отметить работы В.В. Шайдурова, Б.М. Багаева, например, [1], И.А. Блатова, H. Roos, L. Tobiska и других авторов. Подробно останавливаться на методе конечных элементов и его связи с методом конечных разностей не будем.

5.1. Уравнение типа реакция-диффузия в области с гладкой границей

Сначала рассмотрим эллиптическое уравнение в области с гладкой границей. Пусть D - ограниченная область в R^2 с бесконечно дифференцируемой границей S , $u(x, y, \varepsilon)$ - решение краевой задачи:

$$Lu = \varepsilon^2 \Delta u - q(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (5.1)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S. \quad (5.2)$$

Здесь q, f - бесконечно дифференцируемые функции в \bar{D} ,

$$q(x, y) \geq \alpha^2, \quad \alpha > 0, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Эллиптические уравнения с малым параметром при старших производных возникают, например, при математическом моделировании распространения тепла или субстанции на плоскости.

Известно [17], что при всех $\varepsilon > 0$ существует единственное решение задачи (5.1), (5.2) и для этой задачи справедлив принцип максимума:

$$L\Psi(x, y) \leq 0, \quad (x, y) \in D \quad \Psi(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in S \Rightarrow \Psi(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in D. \quad (5.3)$$

Из принципа максимума вытекает оценка решения, не зависящая от ε :

$$|u(x, y, \varepsilon)| \leq \max_D \frac{|f(x, y)|}{|q(x, y)|}. \quad (5.4)$$

Найдем асимптотику решения при малых значениях ε . При переходе от уравнения (5.1) к вырожденному $-q(x, y)u_0 = f(x, y)$ теряется краевое условие (5.2) на всей границе S . Вследствие этого в решении исходной задачи (5.1), (5.2) имеет место пограничный слой вдоль всей границы S . Схематично область D с выделенным у границы пограничным слоем изображена на рис.8.

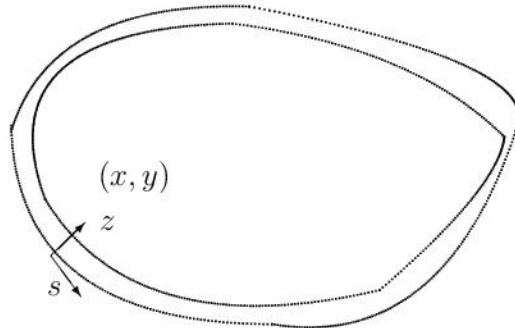


Рис. 8. Пограничный слой вдоль гладкой границы

Сначала строим внешнее разложение:

$$P(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} u_{2k}(x, y). \quad (5.5)$$

Подставляя разложение (5.5) в уравнение (5.1), получим рекуррентную формулу относительно $u_k(x, y)$:

$$u_{2k+2}(x, y) = \Delta u_{2k}(x, y)/q(x, y), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad u_0(x, y) = -f(x, y)/q(x, y).$$

Отметим, что внешнее разложение $P(x, y, \varepsilon)$ не удовлетворяет условию на границе (5.2). Для того, чтобы устранить невязку в граничном условии, надо построить пограничные функции вдоль всей границы S .

В силу гладкости границы S , в ее окрестности можно ввести систему координат (s, z) , где s - координата вдоль границы и z - ортогональная к границе координата - расстояние от точки (x, y) до границы. В новых переменных однородное уравнение, соответствующее (5.1) и рассматриваемое только около границы, принимает вид:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - q(s, z)u = 0. \quad (5.6)$$

Как и в случае обыкновенного дифференциального уравнения, перейдем к "растянутой" координате $\eta = z/\varepsilon$. Тогда уравнение (5.6) преобразится:

$$L_0 u = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - q(s, \eta\varepsilon)u = 0. \quad (5.7)$$

Решение этого уравнения ищем в виде ряда:

$$V(s, \eta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k(s, \eta). \quad (5.8)$$

Мы требуем, чтобы выполнялось

$$LP(x, y, \varepsilon) = f(x, y), \quad L_0 V(s, \eta, \varepsilon) = 0.$$

Тогда в исходных координатах

$$Lu(x, y, \varepsilon) = L(P(x, y, \varepsilon) + V(x, y, \varepsilon)) = 0,$$

функция V служит для компенсации невыполненного граничного условия. Подставляя (5.8) в (5.7) и делая разложения по параметру ε , получим рекуррентные задачи относительно коэффициентов $V_k(s, \eta)$:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} - q(s, 0)V_0 = 0, \quad \frac{\partial^2 V_k}{\partial \eta^2} - q(s, 0)V_k = F_k(s, \eta), \quad k \geq 1, \quad (5.9)$$

где $F_k(s, \eta)$ зависит от уже вычисленных функций $V_k(s, \eta)$. Поставим граничные условия на погранслойные функции:

$$\begin{aligned} V_k(s, 0) &= -u_k(s, 0), \quad V_k(s, \eta) \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad k \geq 0, \quad k - \text{четное}, \\ V_k(s, 0) &= 0, \quad V_k(s, \eta) \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad k \geq 0, \quad k - \text{нечетное}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $u_k(s, 0) = u_k(x, y)$, $(x, y) \in S$, причем этой точке при параметрическом задании кривой S , $S = S(s)$ соответствует параметр s . Рассматриваем два случая, так как при нечетных k нет членов порядка ε^k внешнего разложения.

Учитывая, что погранслойные функции $V_k(s, \eta)$ являются решением уравнений (5.9) с соответствующими краевыми условиями, можно убедиться, что справедлива оценка:

$$|V_k(s, \eta)| \leq C e^{-\alpha \eta}, \quad |V_k(s, z)| \leq C e^{-\alpha z / \varepsilon}. \quad (5.11)$$

Согласно этим оценкам в исходных переменных (x, y) погранслойные функции экспоненциально стремятся к нулю при удалении от границы. (z - расстояние от точки (x, y) до границы).

Пусть

$$u_m(x, y) = \sum_{k=0}^{[m/2]+1} \varepsilon^{2k} u_{2k}(x, y) + \sum_{k=0}^m \varepsilon^k V_k(x, y). \quad (5.12)$$

Оценим точность такого приближения решения. Пусть $z_m = u - u_m$. Тогда

$$|Lz_m(x, y)| \leq C \varepsilon^{m+1}, \quad (x, y) \in D, \quad |z_m(x, y)| \leq C \varepsilon^{m+1}, \quad (x, y) \in S.$$

Из принципа максимума следует справедливость оценки:

$$|z_m(x, y)| \leq \max_D \frac{|Lz_m(x, y)|}{|q(x, y)|} + \max_S |z_m(x, y)|.$$

Используя эту оценку, получим:

$$\max_D |z_m(x, y)| \leq C \varepsilon^{m+1}. \quad (5.13)$$

5.2. Уравнение типа реакция-диффузия в прямоугольной области

Рассмотрим задачу (5.1),(5.2) в квадратной области $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Решение этой задачи существует, непрерывно в \bar{D} , удовлетворяет оценке (5.4). Внутри области асимптотику решения находим, как и в предыдущем случае, согласно (5.5). В данном случае около каждой границы (их четыре) будет свой погранслоный ряд.

Рассмотрим случай границы $\{x = 0, 0 < y < 1\}$. Погранслоный ряд около этой границы имеет вид:

$$V_1(\eta, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k^{(1)}(\eta, y), \quad (5.14)$$

где $\eta = x/\varepsilon$. Подставляя это разложение в однородное уравнение, в переменных (η, y) , приравнивая слагаемые при одинаковых степенях ε , получим задачи:

$$\frac{\partial^2 V_0^{(1)}}{\partial \eta^2} - q(y, 0)V_0^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial^2 V_1^{(1)}}{\partial \eta^2} - q(y, 0)V_1^{(1)} = \eta q_1(y)V_0^{(1)}, \quad \dots \quad (5.15)$$

Здесь $q_j(y)$ – коэффициенты разложения в ряд Тейлора:

$$q(\varepsilon \eta, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \eta^j q_j(y).$$

Предполагаем, что по аналогии с условиями (5.10) погранслоная функция $V_k^{(1)}(\eta, y)$ компенсирует погрешность $u_k(0, y)$ нулевого краевого условия на выбранной границе, вызванную внутренним разложением и $V_k^{(1)}(\eta, y) \rightarrow 0, \eta \rightarrow \infty$. Последнее условие означает, что $V_k^{(1)}(x, y)$ есть функция пограничного слоя, соответствующая выбранной границе.

Учитывая вид решения задач (5.15), с учетом поставленных краевых условий, нетрудно показать, что

$$|V_k^{(1)}(x, y)| \leq C e^{-\alpha \varepsilon^{-1} x}. \quad (5.16)$$

Аналогичным образом могут быть построены функции погранслоя для остальных трех границ и получены оценки вида (5.16), которые показывают, что все эти погранслоные функции стремятся к нулю при удалении от соответствующей границы.

Таким образом, на основе асимптотических разложений можно сформировать приближение

$$\tilde{u}(x, y) = P(x, y) + V^{(1)}(x, y) + V^{(2)}(x, y) + V^{(3)}(x, y) + V^{(4)}(x, y). \quad (5.17)$$

Взяв m членов в каждом из асимптотических рядов, получим ли приближение решения с точностью до ε^{m+1} ? Да, получим, но вне окрестности угловых точек. Дело

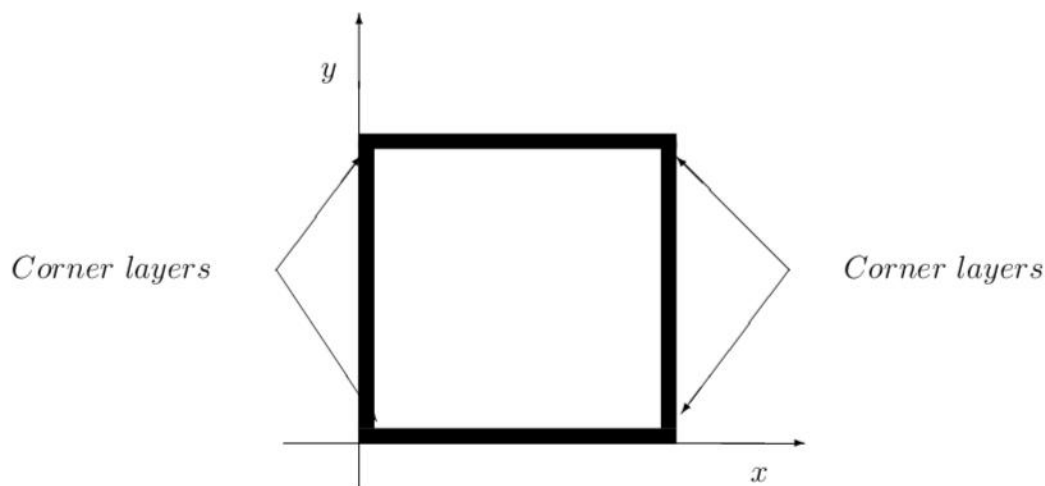


Рис. 9. Пограничные слои в случае полного вырождения

в том, что смежные погранслоиные функции вносят погрешность в этой окрестности. Например, функция $V^{(1)}(x, y)$ компенсирует погрешность на границе квадрата $\{x = 0\}$, но при малых x вносит существенную погрешность на границе $y = 0$. В областях с негладкой границей имеют место угловые пограничные слои. Угловые погранслоиные функции, устраняющие влияние пограничных функций смежных сторон, исследованы в работах В.Ф. Бутузова. Если в разложение (5.17) добавить четыре угловые погранслоиные функции, то разложение станет равномерно точным по области, точность по ε зависит от числа членов асимптотического ряда для каждой функции. Останавливаться на вопросе построения угловых погранслоиных функций не будем, это делалось, например, в [3]. Схематично пограничный слой в случае квадратной области изображен на рис. 9.

5.3. Уравнение типа диффузия-конвекция в прямоугольной области

В квадрате $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ рассмотрим краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon \Delta u - a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} - a_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - b(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (5.18)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in S. \quad (5.19)$$

Предполагаем a_1, a_2, b, f достаточно гладкими,

$$\varepsilon > 0, \quad a_1(x, y) \geq \alpha_1 > 0, \quad a_2(x, y) \geq \alpha_2 > 0, \quad b(x, y) \geq 0. \quad (5.20)$$

При наложенных ограничениях для оператора L справедлив принцип максимума, на основе которого можно получить оценку:

$$\max_D |\Psi(x, y)| \leq \frac{1}{\alpha_i} \max_D |L\Psi(x, y)| + \max_S |\Psi(x, y)|.$$

Выясним, какую роль играет вырожденное уравнение для анализа решения исходной задачи. Отвлечемся от условий (5.20).

Запишем вырожденное уравнение для уравнения (5.18):

$$a_1(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial y} + b(x, y)u = -f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (5.21)$$

Уравнение (5.21) – уравнение первого порядка в частных производных, и для него можно выписать систему уравнений на характеристики:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_1(x(t), y(t)), \quad \frac{dy(t)}{dt} = a_2(x(t), y(t)). \quad (5.22)$$

Характеристики уравнения (5.21) - это не пересекающиеся линии на плоскости переменных (x, y) . Учитывая (5.22) в (5.21), можно заключить, что уравнение (5.21) вдоль характеристик принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{du_0}{dt} + b(x(t), y(t))u_0 = -f(x(t), y(t)). \quad (5.23)$$

Как известно, решение уравнения (5.23) однозначно определено, если в какой-нибудь точке характеристики задать $u_0(x(t_0), y(t_0))$. Следовательно, если характеристики дважды пересекают границу S , то условия на части границы для вырожденного уравнения (5.21) становятся лишними. В окрестности этой части границы решение исходной задачи (5.18),(5.19) не стремится к решению вырожденной задачи, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Выясним, на какой части границы имеет место потеря граничных условий при переходе к вырожденному уравнению. Заметим, что, когда знаки коэффициентов a_1, a_2 определены, то из системы на характеристики (5.22) можно выяснить, в каком направлении вдоль характеристик меняются координаты $x(t), y(t)$.

1) $a_1 > 0, a_2 > 0$. Из (5.22) следует, что тогда $x'(t) > 0, y'(t) > 0$, то есть вдоль характеристик возрастают $x(t), y(t)$. Это означает, что для вырожденного уравнения условия на границах квадрата $x = 1$ и $y = 1$ однозначно определяются через условия на границах $x = 0$ и $y = 0$, то есть решение исходной задачи (5.18),(5.19) имеет пограничные слои у границ $x = 1$ и $y = 1$. Схематично перенос решения вырожденного уравнения вдоль характеристик изображен на рис. 10. Пограничные слои показаны на рис. 11.

2) $a_1 < 0, a_2 < 0$. Тогда погранслои у границ $x = 0$ и $y = 0$.

Таким же образом можно выяснить, где находятся пограничные слои в случае других знаков a_1 и a_2 .

Приведем определение [28], которым можно пользоваться для локализации пограничных слоев.

Определение. Граница входящего потока S_i определяется следующим образом:

$$S_{input} = \{(x, y) \in S : (\vec{a}(x, y), \vec{n}(x, y)) < 0\}.$$

Граница выходящего потока определяется соотношением:

$$S_{output} = \{(x, y) \in S : (\vec{a}(x, y), \vec{n}(x, y)) > 0\}.$$

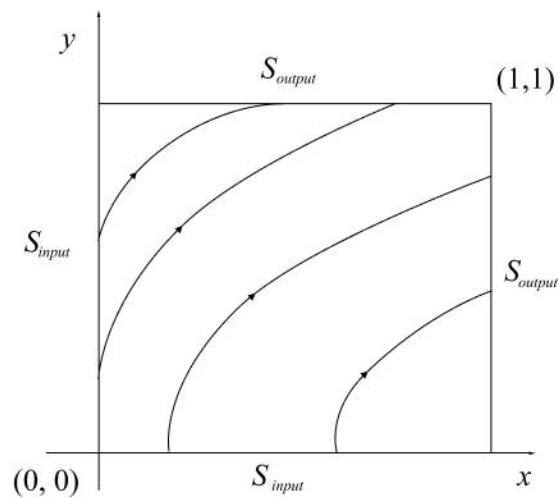


Рис. 10. Перенос решения вдоль характеристик

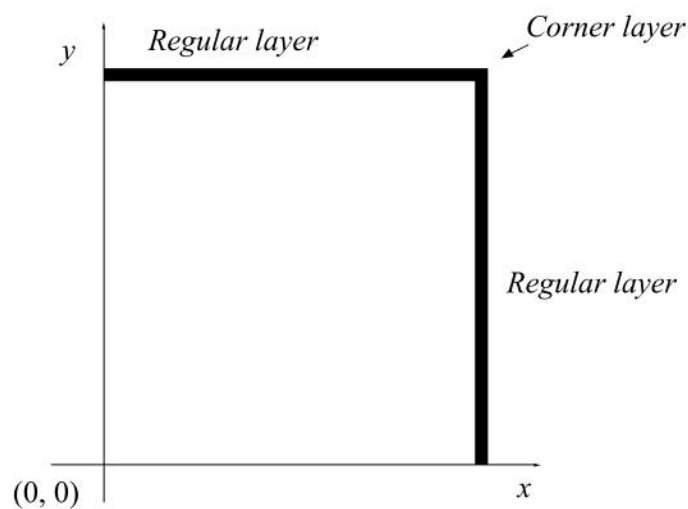


Рис. 11. Пограничные слои при неполном вырождении

Граница совпадает с характеристикой, если

$$S_{haract} = \{(x, y) \in S : (\vec{a}(x, y), \vec{n}(x, y)) = 0\}.$$

Здесь $\vec{n}(x, y)$ – вектор внешней нормали к границе в точке $(x, y) \in S$.

Пограничные слои, имеющие место около границ выходного потока, называются регулярными пограничными слоями. Пограничные слои, имеющие место около характеристической границы, называются параболическими пограничными слоями. Терминология соответствует типу уравнений, задающих погранслойные функции.

Вернемся к выполнению условий (5.20). Как мы выяснили, в этом случае имеют место регулярные пограничные слои у границ $x = 1$ и $y = 1$. Как указывалось выше, на стыке этих пограничных слоев имеет место угловой пограничный слой. Чтобы не выяснять характер этого погранслоя, предположим, что выполнены условия согласования, когда угловой пограничный слой отсутствует. Выпишем вырожденную задачу для исходной задачи (5.18), (5.19):

$$\begin{aligned} a_1(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial y} + b(x, y) u_0 &= -f(x, y), \quad (x, y) \in D, \\ u_0(x, y) &= g(x, y), \quad (x, y) \in S_1 \cup S_2, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где

$$S_1 = \{(x, y), y = 0, 0 \leq x \leq 1, \} \quad S_2 = \{(x, y), x = 0, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Решение этой задачи не удовлетворяет граничным условиям на двух сторонах квадрата, соответствующих $y = 1$ и $x = 1$. Разберемся с пограничными слоями, имеющими место около этих границ.

Рассмотрим случай границы $x = 1$. Введем в пограничном слое "растянутую" координату $\eta = (1 - x)/\varepsilon$. Тогда однородное уравнение, соответствующее (5.18), принимает вид:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\varepsilon} a_1(1 - \eta\varepsilon, y) \frac{\partial u}{\partial \eta} - a_2(1 - \eta\varepsilon, y) \frac{\partial u}{\partial y} - b(1 - \eta\varepsilon, y) u = 0.$$

Как и в случае гладкой границы, по аналогии с (5.8), ищем решение этого уравнения в виде асимптотического ряда:

$$V(\eta, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k(\eta, y).$$

Подставляя это разложение в последнее уравнение, осуществляя разложения по ε и собирая члены при одинаковых степенях ε , получим уравнения на $V_k(\eta, y)$, в частности:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} + a_1(1, y) \frac{\partial V_0}{\partial \eta} = 0. \quad (5.25)$$

Учитывая, что $V_0(\eta, y)$, как функция пограничного слоя, стремится к нулю при $\eta \rightarrow \infty$ и компенсирует погрешность выполнения граничного условия (на границе квадрата $x = 1$) решением вырожденной задачи, получим:

$$V_0(\eta, y) = [g(1, y) - u_0(1, y)] e^{-a_1(1, y)\eta}.$$

В терминах исходных переменных (x, y)

$$V_0(x, y) = [g(1, y) - u_0(1, y)]e^{-a_1(1,y)(1-x)/\varepsilon}. \quad (5.26)$$

Остановимся на случае границы $y = 1$. Пусть $W_0(x, y)$ – погранслоиная функция этой границы (если сказать точнее, нулевой член соответствующего асимптотического ряда, задающий основной погранслоиный рост решения). По аналогии с (5.26)

$$W_0(x, y) = [g(x, 1) - u_0(x, 1)]e^{-a_2(x,1)(1-y)/\varepsilon}. \quad (5.27)$$

Зная погранслоиные функции, можно построить асимптотическое приближение для решения исходной задачи (5.18)-(5.19):

$$u_\varepsilon(x, y) = u_0(x, y) + V_0(x, y) + W_0(x, y). \quad (5.28)$$

Если предположить, что выполнены некоторые условия согласования (которые здесь не обсуждаем), то можно показать, что

$$\max_D |u_\varepsilon(x, y) - u(x, y)| \leq C\varepsilon.$$

Это следует из оценок

$$|Lz(x, y)| \leq C\varepsilon, \quad (x, y) \in D, \quad |z(x, y)| \leq C\varepsilon, \quad (x, y) \in S$$

и оценки, следующей за (5.20). Таким образом, если найти (с помощью разностной схемы) решение вырожденной задачи (5.24) и учесть погранслоиные функции на основе (5.26),(5.27), применяя соотношение (5.28), можно с точностью $O(\varepsilon)$ найти решение исходной задачи (5.18)-(5.19). Порядок точности по ε можно увеличить, если учесть больше членов внешнего разложения и погранслоиных разложений решения исходной задачи.

Отметим, что метод асимптотических разложений применим лишь при достаточно малых значениях параметра возмущения ε , так как точность связана с малостью этого параметра. Если находить решение с помощью равномерно по параметру ε сходящейся разностной схемы, то заданную точность можно обеспечить выбором числа узлов разностной схемы.

Схема экспоненциальной подгонки. Учитывая явный вид функций пограничного слоя (5.26) и (5.27), имеющих экспоненциальное убывание при удалении от границы, можно построить на произвольной равномерной сетке схему экспоненциальной подгонки по аналогии со схемой Ильина (раздел 2.5). Кстати, эта схема первоначально и была получена для эллиптического уравнения в [25], но без обоснования равномерной сходимости. По другой терминологии, такие схемы называются локально-точными.

Итак, для задачи (5.18),(5.19) на равномерной двумерной сетке Ω выпишем схему экспоненциальной подгонки:

$$L_{nm}^h u^h = \varepsilon_{nm}^1 \frac{u_{n+1,m}^h - 2u_{n,m}^h + u_{n-1,m}^h}{h^2} - a_{n,m}^1 \frac{u_{n+1,m}^h - u_{n-1,m}^h}{2h} +$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_{nm}^2 \frac{u_{n,m+1}^h - 2u_{n,m}^h + u_{n,m-1}^h}{h^2} - a_{n,m}^2 \frac{u_{n,m+1}^h - u_{n,m-1}^h}{2h} - b_{n,m} u_{n,m}^h = f_{n,m}^h, \\
& 0 < n, m < N, \quad u_{n,m}^h = \phi(x_n, y_m), \quad (x_n, y_m) \in \partial D^h,
\end{aligned} \tag{5.29}$$

где $a_{n,m}^i = a_i(x_n, y_m)$, $b_{n,m} = b(x_n, y_m)$, $f_{n,m}^h = f(x_n, y_m)$, $h = 1/N$,

$$\varepsilon_{n,m}^1 = \frac{a_{n,m}^1 h}{2} \coth \frac{a_{n,m}^1 h}{2\varepsilon}, \quad \varepsilon_{n,m}^2 = \frac{a_{n,m}^2 h}{2} \coth \frac{a_{n,m}^2 h}{2\varepsilon}. \tag{5.30}$$

Подгоночные параметры $\varepsilon_{nm}^1, \varepsilon_{nm}^2$ получены по аналогии с разделом 2.5.

Для получения выражения для ε_{nm}^1 мы от уравнения (5.25) перешли к уравнению в переменных (x, y) :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} - a_1(1, y) \frac{\partial V_0}{\partial x} = 0. \tag{5.31}$$

Далее осуществили сеточную аппроксимацию этого уравнения

$$\tilde{\varepsilon} \frac{u_{n+1,m}^h - 2u_{n,m}^h + u_{n-1,m}^h}{h^2} - a_1(1, y_m) \frac{u_{n+1,m}^h - u_{n-1,m}^h}{2h} = 0$$

и потребовали, чтобы на точном решении этого уравнения, соответствующем (5.26),

$$V_0(x, y_m) = \gamma_m e^{-a_1(1, y_m)(1-x)/\varepsilon}$$

аппроксимация была точной. В итоге, как и в разделе 2.5, получили выражение для $\tilde{\varepsilon}$, а затем для получения монотонной разностной схемы $\tilde{\varepsilon}$ заменили на ε_{nm}^1 .

Итак, пятиточечная разностная схема (5.29), (5.30) – второго порядка аппроксимации, монотонна (монотонные схемы мы изучали в разделе 2.3), является подогнанной к регулярным погранслоям у границ $x = 1$ и $y = 1$. Если предположить, что угловой пограничный слой, около точки $(1, 1)$, отсутствует, то для схемы (5.29), (5.30) справедлива равномерная оценка точности:

$$\max_{n,m} |u_{n,m}^h - u(x_n, y_m)| \leq Ch. \tag{5.32}$$

Кратко остановимся на обосновании оценки (5.32). Доказательство можно провести по аналогии с обоснованием схемы А.М. Ильина (раздел 2.5). Исходим из представления решения в виде суммы функции без больших градиентов и двух погранслоевых функций:

$$u(x, y) = P(x, y) + V_0(x, y) + W_0(x, y), \tag{5.33}$$

где

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} P(x, y) \right| & \leq C \left[1 + \varepsilon^{1-j} e^{\alpha \varepsilon^{-1}(x-1)} \right], \\
\left| \frac{\partial^j}{\partial y^j} P(x, y) \right| & \leq C \left[1 + \varepsilon^{1-j} e^{\alpha \varepsilon^{-1}(y-1)} \right].
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Пусть $z^h = [u] - u^h$. Тогда

$$|L_{nm}^h z^h| = |L_{nm}^h [u] - Lu(x_n, y_m)| \leq$$

$$|L_{nm}^h[P] - LP(x_n, y_m)| + |L_{nm}^h[V_0] - LV_0(x_n, y_m)| + |L_{nm}^h[W_0] - LW_0(x_n, y_m)|.$$

Оценивая каждое слагаемое этой суммы по аналогии со случаем обыкновенного дифференциального уравнения (раздел 2.5), получим:

$$|L_{nm}^h z^h| \leq C \left[h + \frac{h}{h + \varepsilon} \left\{ \exp\left(\frac{\alpha(x_{n+1} - 1)}{2\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{\alpha(y_{m+1} - 1)}{2\varepsilon}\right) \right\} \right],$$

$$0 < n, m < N. \quad (5.35)$$

С учетом согласованности краевых условий и отсутствия влияния функций погранслоя на соседний слой, справедлива оценка:

$$|z_{n,m}^h| \leq Ch, \quad (x_n, y_m) \in \partial D^h. \quad (5.36)$$

По аналогии с (2.41)

$$L_{nm}^h \exp\left(\frac{\alpha(x - 1)}{2\varepsilon}\right) \leq -\frac{C_0}{h + \varepsilon} \exp\left(\frac{\alpha(x_n - 1)}{2\varepsilon}\right). \quad (5.37)$$

Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_{n,m}^h = C_1 \left[2 - x_n - y_m + \exp\left(\frac{\alpha(x_{n+1} - 1)}{2\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{\alpha(y_{m+1} - 1)}{2\varepsilon}\right) \right] h \pm z_{n,m}^h.$$

Учитывая неравенства (5.35), (5.36), (5.37), заключаем, что для некоторой достаточно большой постоянной C_1 , не зависящей от ε ,

$$L_{nm}^h \Psi^h \leq 0, \quad (x_n, y_m) \in D, \quad \Psi_{n,m}^h \geq 0, \quad (x_n, y_m) \in \partial D^h.$$

В силу принципа максимума при всех $n, m : 1 \leq n, m \leq N$ $\Psi_{n,m}^h \geq 0$. Это доказывает требуемую оценку (5.32).

Схема на сетке Шишкина. Определим двумерную сетку $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Строим сетку по x . Пусть $[0, 1] = [0, 1 - \sigma_1] \cup [1 - \sigma_1, 1]$, где

$$\sigma_1 = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha_1} \varepsilon \ln N \right\}.$$

Определим $H_1 = 2(1 - \sigma_1)/N$, $h_1 = 2\sigma_1/N$ – равномерные шаги вне погранслоя и внутри погранслоя по x .

Аналогичным образом определим сетку Ω_2 по y . При этом σ_1 меняется на σ_2 , α_1 на α_2 , H_1, h_1 на H_2, h_2 . Схематично построенная сетка Ω приведена на рис. 12. Выпишем схему направленных разностей на построенной сетке Ω :

$$L_{nm}^h u^h = \frac{2\varepsilon}{h_n^{(1)} + h_{n+1}^{(1)}} \left[\frac{u_{n+1,m}^h - u_{n,m}^h}{h_{n+1}^{(1)}} - \frac{u_{n,m}^h - u_{n-1,m}^h}{h_n^{(1)}} \right] +$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{h_m^{(2)} + h_{m+1}^{(2)}} \left[\frac{u_{n,m+1}^h - u_{n,m}^h}{h_{m+1}^{(2)}} - \frac{u_{n,m}^h - u_{n,m-1}^h}{h_m^{(2)}} \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -a_{n,m}^1 \frac{u_{n,m}^h - u_{n-1,m}^h}{h_n^{(1)}} - a_{n,m}^2 \frac{u_{n,m}^h - u_{n,m-1}^h}{h_m^{(2)}} - b_{n,m} u_{n,m}^h = f_{n,m}^h, \\
& 0 < n, m < N, \quad u_{n,m}^h = \phi(x_n, y_m), \quad (x_n, y_m) \in \partial D^h.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

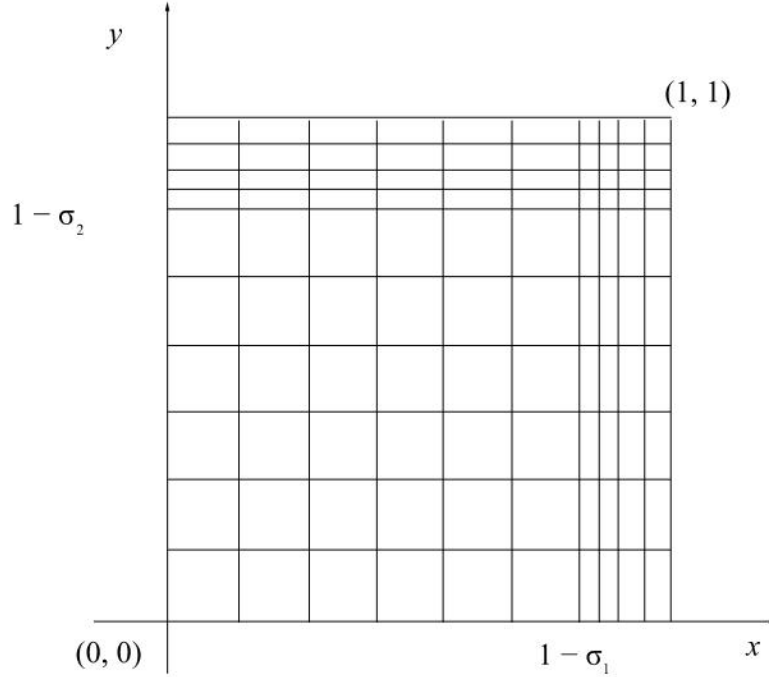


Рис. 12. Сетка Шишкина в случае регулярных слоев

В соответствии с [28] для схемы направленных разностей (5.38) на сетке Шишкина Ω справедлива оценка точности:

$$\|u^h - [u]_{\Omega}\| \leq CN^{-1} \ln^2 N. \tag{5.39}$$

5.4. Задача с параболическими пограничными слоями

В квадрате $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}$ рассмотрим краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon \Delta u - a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} - b(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{5.40}$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in S. \tag{5.41}$$

Предполагаем a_1, b, f достаточно гладкими,

$$\varepsilon > 0, \quad a_1(x, y) \geq \alpha_1 > 0, \quad b(x, y) \geq 0. \quad (5.42)$$

Из принципа максимума следует оценка решения

$$\max_{\bar{D}} |u(x, y)| \leq \frac{1}{\alpha_1} \max_{\bar{D}} |f(x, y)| + \max_S |g(x, y)|. \quad (5.43)$$

Выясним вид пограничного слоя у границ $y = 0$ и $y = 1$. Рассмотрим границу $y = 1$. Для этой границы вектор внешней нормали $(0, 1)$, поэтому

$$(\vec{a}(x, y), \vec{n}(x, y)) = a_1(x, y) \times 0 + 0 \times 1 = 0.$$

В соответствии с определением в разделе 6.3 граница $y = 1$ является характеристической, аналогично совпадает с характеристикой граница $y = 0$. Пограничные слои около этих границ, по определению, являются параболическими. Около границы $x = 1$ имеет место регулярный, как и в предыдущем параграфе, пограничный слой. На рис. 13 схематично показано направление характеристик. На рис. 14 показано, где локализуются погранслои в случае задачи (5.40)-(5.42).

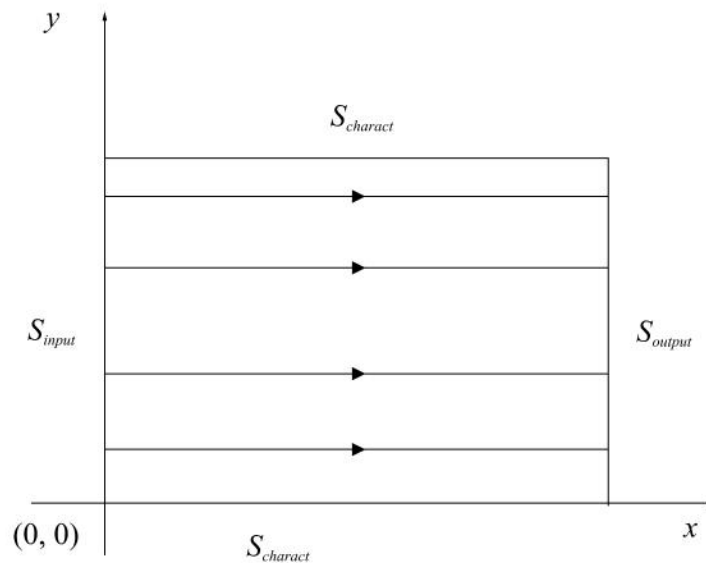


Рис. 13. Направление характеристик вдоль границы

Выясним, какова функция пограничного слоя у границы $y = 0$. В окрестности этой границы сделаем замену переменной: $s = y/\varepsilon$. Тогда уравнение (5.40) с нулевой

правой частью принимает вид:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - a_1(x, s\varepsilon) \frac{\partial V}{\partial x} - b(x, s\varepsilon)V = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (5.44)$$

Функцию пограничного слоя строим в виде:

$$V(x, s, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k(x, s). \quad (5.45)$$

Подставляя $V(x, s, \varepsilon)$ из (5.45) в (5.44), осуществляя разложения в ряд по параметру ε , получим уравнения на $V_k(x, s)$. В частности, уравнение на функцию $V_0(x, s)$, задающую основной погранслоиный рост решения, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial s^2} - a_1(x, 0) \frac{\partial V_0}{\partial x} - b(x, 0)V_0 = 0. \quad (5.46)$$

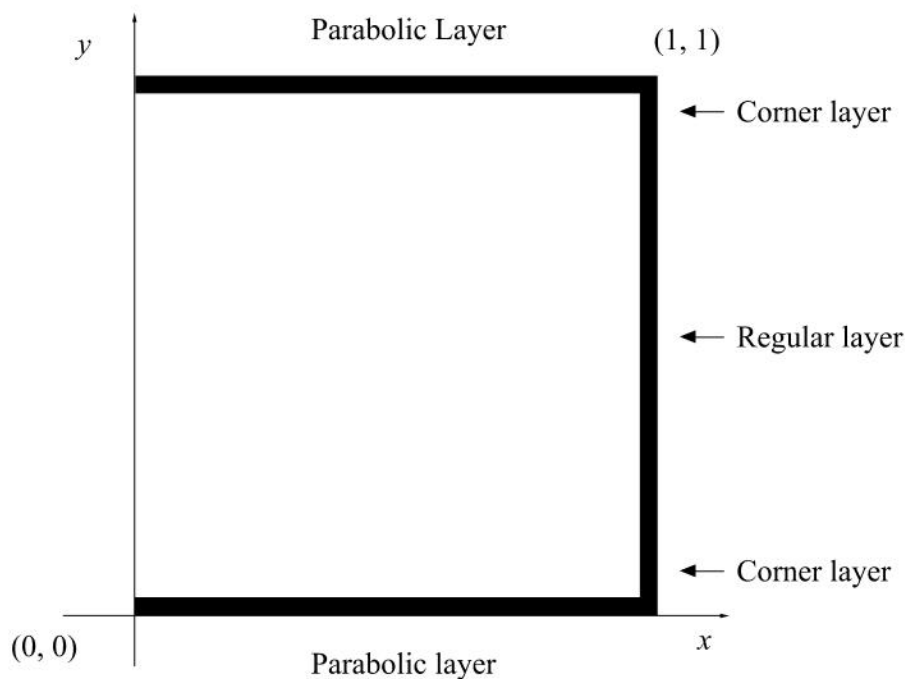


Рис. 14. Параболические и экспоненциальный погранслои

В работах Г.И. Шишкина, например в [23], доказано, что в случае параболического пограничного слоя не существует равномерно сходящейся схемы подгонки на равномерной сетке. С чем это связано? В случае регулярного пограничного слоя

решение экспоненциально меняется по одной переменной, а вторая переменная играет роль параметра, от нее зависит только значение погранслойной функции на границе. Поэтому подгонка разностной схемы осуществляется, по сути, по одной переменной, как и в случае обыкновенного дифференциального уравнения. В случае параболического пограничного слоя функция погранслоя является решением параболического уравнения (5.46), а не обыкновенного дифференциального уравнения, градиенты функции $V_0(x, y, \varepsilon)$ более сложным образом зависят от x и y , что и приводит к несостоятельности метода подгонки (нельзя выделить функцию, к которой нужно подгонять разностную схему).

В то же время метод сгущения сетки в пограничном слое приводит к равномерной сходимости разностной схемы! Впервые это доказывалось в работах Г.И. Шишкина, а затем и другими авторами. При данном подходе не нужно выделять функцию пограничного слоя, а достаточно оценить производные решения и сгустить сетку в области больших градиентов, что приводит к равномерной сходимости разностной схемы. Зададим сетку Шишкина по переменным x, y . Пусть

$$\tau_1 = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon \ln N}{\alpha_1} \right\}.$$

На интервале $[0, 1 - \tau_1]$ задаем $H_1 = (1 - \tau_1)/(N/2)$. На интервале $[1 - \tau_1, 1]$ задаем $h_1 = (\tau_1/(N/2))$. Аналогичным образом зададим сетку по переменной y . Пусть

$$\tau_2 = \min \left\{ \frac{1}{4}, \sqrt{\varepsilon \ln N} \right\}.$$

На интервале $[0, \tau_2]$ задаем $N/4$ равных шагов, как и на интервале $[1 - \tau_2, 1]$. На интервале $[\tau_2, 1 - \tau_2]$ задаем $N/2$ равных шагов. Схематично построенная сетка изображена на рис. 15.

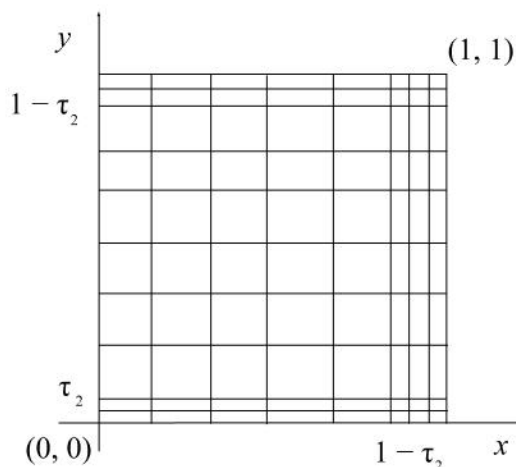


Рис. 15. Сетка Шишкина для задачи (5.40)-(5.41)

В соответствии с [23] схема направленных разностей на построенной сетке обладает свойством равномерной сходимости.

Список литературы

- [1] *Багаев Б.М., Шайдулов В.В.* Сеточные методы решения задач с пограничным слоем. Новосибирск: Наука, 1998.
- [2] *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. 4. С. 841-890.
- [3] *Бутузов В.Ф.* Угловой погранслоем в сингулярно возмущенных задачах с частными производными // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. 10. С. 1848-1862.
- [4] *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
- [5] *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
- [6] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [7] *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. 5. С. 3-122.
- [8] *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
- [9] *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Введение в теорию разностных схем. М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962.
- [10] *Дулан Э., Миллер Д., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М: Мир, 1983.
- [11] *Задорин А.И.* О численном решении третьей краевой задачи для уравнения с малым параметром // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. 1984. Т. 24. 7. С. 1008-1015.
- [12] *Задорин А.И.* Численное решение эллиптического уравнения с параболическим погранслоем // Моделирование в механике. 1993. Т. 7. 1. С. 52- 59.
- [13] *Задорин А.И.* Численное решение краевой задачи для системы уравнений с малым параметром // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1998. Т. 38. 8. С. 1255-1265.
- [14] *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6. 2. С. 237-248.

- [15] *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [16] *Коул Д.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
- [17] *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
- [18] *Лисейкин В.Д., Петренко В.Е.* Адаптивно-инвариантный метод численного решения задач с пограничными и внутренними слоями. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1989.
- [19] *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
- [20] *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
- [21] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
- [22] *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.
- [23] *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
- [24] *Шишкин Г.И.* Аппроксимация решений сингулярно возмущенных краевых задач с угловым пограничным слоем // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. 1. С. 39-43.
- [25] *Allen D.N., Southwell R. V.* Relaxation methods applied to determine the motion, in 2D, of a viscous fluid past a fixed cylinder // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1955. 8. P. 129-145.
- [26] *Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., o’Riordan E., Shishkin G.I.* Robust computational techniques for boundary layers. Chapman and Hall.: CRC Press, Boca Raton, FL, 2000.
- [27] *Kellogg R.B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points // Math. Comput. 1978. V. 32, 144. P. 1025-1039.
- [28] *Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Singapore: World Scientific, 1996.
- [29] *Vulanovic R.* Non-equidistant finite-difference methods for elliptic singular perturbation problems // Computational Methods for Boundary and Interior Layers in Several Dimensions (J.J.H. Miller, ed.). Dublin: Boole Press, 1991. P. 203-223.

А.И. Задорин

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ
ДЛЯ ЗАДАЧ
С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Омск 2002