$y = xz^{-1} \in R$. Так как $RyR = R$, то элемент $y + J(R)$ обратим в кольце $R/J(R)$. Отсюда следует, что и $y \in U(R)$, а поэтому $Rx = Rz = zR = xR$. Ввиду произвольности элемента x теорема 2 доказана.

В заключение выражаю благодарность рецензенту за замечания, способствовавшие выявлению и исправлению недостатков работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кон П. Свободные кольца и их связи. М., 1975. 422 с.
2. Kaplansky I. Elementary divisors and modules.—Trans. Amer. Math. Soc., 1949, v. 66, p. 464—491.
3. Gillman L., Henriksen M. Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal.— Trans. Amer. Math. Soc., 1956, v. 82, № 2, p. 366—391.
4. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М., 1972. 191 с.
5. Small L. W. Semihereditary rings.— Bull. Amer. Math. Soc., 1967, v. 73, № 5, p. 656—658.
6. Голубчик И. З., Марков В. Т. Локализационная размерность PI-колец.— Тр. семин. им. И. Г. Петровского, 1981, № 6, с. 39—46.
7. Jategaonkar A. V. Left principal ideal rings. Berlin — Heidelberg — New York, 1970. 145 p.
8. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. М., 1979. Ч. 2. 464 с.
9. Ламбек И. Кольца и модули. М., 1971. 280 с.
10. Дубровин Н. И. Некоммутативные кольца нормирования.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1982, т. 45, с. 265—280.

г. Владимир

Поступила
04.06.1985

А. И. Задорин, В. Н. Игнатьев

УДК 519.62

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Построение разностных схем, обладающих свойством равномерной сходимости, является актуальным для численного решения сингулярно-возмущенных уравнений. Разностные схемы целесообразно строить на неравномерной сетке, если требуется информация о решении в узкой погранслойной области.

В данной работе дается обобщение разностной схемы из [1] на случай неравномерной сетки и краевых условий третьего рода.

Итак, рассмотрим исходную краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon u'' + a(x)u' - b(x)u = f(x), \tag{1}$$

$$\delta_1 u(0) - \varepsilon\beta_1 u'(0) = A, \quad \delta_2 u(1) + \beta_2 u'(1) = B. \tag{2}$$

Предполагаем, что a, b, $f \in C^2[0, 1]$, $m \geq |a'(x)|$, $m \geq a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x) \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$, $\delta_1 + \beta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\beta_2 \geq 0$. Под C и C с индексами будем понимать положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов сетки. Под нормой сеточной или непрерывной функции $\Psi(x)$ будем подразумевать $\|\Psi\| = \max|\Psi(x)|$.

Получим сначала оценку на решение задачи (1)—(2).

Лемма 1. *Найдется C такое, что*

$$\|u\| \leq C(|A| + |B| + \|f\|). \tag{3}$$

Доказательство. Определим вспомогательную функцию

$$\Psi(x) = \gamma_1 \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x) + \gamma_2(1 - x) + \gamma_3 \pm u(x).$$

Утверждение леммы следует из принципа максимума [2] при подходящем выборе постоянных γ_1, γ_2, γ_3.

Нетрудно заключить, учитывая (3), что решение задачи (1)—(2) существует и единственно. Задача (1)—(2) эквивалентна первой краевой задаче с некоторыми условиями $u(0)=D_1$, $u(1)=D_2$. В силу леммы 1 величины D_1 и D_2 по модулю ограничены. В соответствии с [3] для решения задачи (1)—(2) справедливо представление

$$u(x)=\gamma V_0(x)+P(x), \tag{4}$$

где $V_0(x)=\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x)$, $|\gamma|\leqslant C$, $a_0=a(0)$, $|d^jP/dx^j|\leqslant C[1+\varepsilon^{1-j}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x)]$, $j\geqslant 0$. Пусть Ω — неравномерная сетка исходного интервала:

$$\Omega=\{x_j: x_j=x_{j-1}+h_j,\ x_0=0,\ x_{N+1}=1\},\quad h=\max h_n,$$

$\Omega^0=\Omega\diagdown\{0,\ 1\}$. При построении разностной схемы учтем, что основной рост решения в погранслойной области задает функция $V_0(x)$.

Введем в (2) аппроксимацию производной $u'(0)$, точную на функции $V_0(x)$:

$$Mu^h=a_0\varepsilon^{-1}(u_1^h-u_0^h)[1-\exp(-a_0\varepsilon^{-1}h_1)]^{-1}. \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ — решение задачи (1)—(2). Найдется C_1 такое, что*

$$|M[u]_h-u'(0)|\leqslant C_1h_1\varepsilon^{-1}. \tag{6}$$

Доказательство. Воспользуемся для решения представлением (4). В результате получим $|M[u]_h-u'(0)|=|M[P]_h-P'(0)|=|a_0\varepsilon^{-1}(P(h_1)-P(0))[1-\exp(-a_0\varepsilon^{-1}h_1)]^{-1}-P'(0)|$. Рассматривая два соотношения между ε и h_1 ($\varepsilon\leqslant mh_1$, $\varepsilon>mh_1$) и учитывая представление (4), приходим к (6). Лемма доказана.

Аппроксимацию уравнения (1) осуществим по аналогии с [1], производную $u'(0)$ заменим с учетом (5). Тогда придем к разностной схеме

$$\begin{gathered}L_n^hu^h=\varepsilon_n\lambda_{xx}u_n^h+a_n\lambda_xu_n^h-b_nu_n^h=f_n^h,\\ L_0^hu^h=-\delta_1u_0^h+a_0\beta_1[1-\exp(-a_0\varepsilon^{-1}h_1)]^{-1}(u_1^h-u_0^h)=-A,\\ L_{N+1}^hu^h=-\delta_2u_{N+1}^h-\beta_2h_{N+1}^{-1}(u_{N+1}^h-u_N^h)=-B,\end{gathered} \tag{7}$$

где $a_n=a(x_n)$, $b_n=b(x_n)$, $f_n^h=f(x_n)$, $x_n\in\Omega^0$, $n=1,\ 2,\ \ldots,\ N$,

$$\lambda_xu_n^h=[h_n^2(u_{n+1}^h-u_n^h)+h_{n+1}^2(u_n^h-u_{n-1}^h)][h_nh_{n+1}(h_n+h_{n+1})]^{-1},$$

$$\lambda_{xx}u_n^h=2[h_n(u_{n+1}^h-u_n^h)-h_{n+1}(u_n^h-u_{n-1}^h)][h_nh_{n+1}(h_n+h_{n+1})]^{-1},$$

$$\varepsilon_n=\frac{a_n}{2}\,\frac{h_{n+1}^2[\exp(a_nh_n\varepsilon^{-1})-1]+h_n^2[1-\exp(-a_nh_{n+1}\varepsilon^{-1})]}{h_{n+1}[\exp(a_nh_n\varepsilon^{-1})-1]-h_n[1-\exp(-a_nh_{n+1}\varepsilon^{-1})]}.$$

Нетрудно убедиться в монотонности схемы (7). В случае первой краевой задачи это показано в [4], аппроксимация краевых условий монотонности не нарушает.

В дальнейшем нам потребуется неравенство, в справедливости которого легко убедиться:

$$1\geqslant\frac{z}{y}\,\frac{1-\exp(-y)}{1-\exp(-z)}\geqslant\exp(-y)\ \text{ при }\ y\geqslant z>0. \tag{8}$$

Лемма 3. *Пусть u^h — решение схемы (7). Найдется C_3 такое, что*

$$\|u^h\|\leqslant C_3(|A|+|B|+\|f^h\|). \tag{9}$$

Доказательство. Воспользуемся принципом максимума [5]. Определим сеточную функцию

$$\Psi^h(x)=\gamma_1\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x)+\gamma_2(1-x)+\gamma_3\pm u^h(x),\quad x\in\Omega.$$

Подберем положительные величины γ_i таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$L_n^h \Psi^h \leqslant 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N+1. \tag{10}$$

Пусть $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Предварительно докажем, что

$$L_n^h \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x) \leqslant 0, \quad x \in \Omega^0. \tag{11}$$

Определим

$$E_n(\theta) = \frac{h_{n+1}^2 [\exp(\theta h_n) - 1] + h_n^2 [1 - \exp(-\theta h_{n+1})]}{h_{n+1} [\exp(\theta h_n) - 1] - h_n [1 - \exp(-\theta h_{n+1})]}.$$

Отсюда получим $L_n^h \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x) = a_n \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_n) [E_n(a_n\varepsilon^{-1}) - E_n(\alpha\varepsilon^{-1})] \{h_{n+1} \times \times [\exp(\alpha\varepsilon^{-1}h_n) - 1] - h_n [1 - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}h_{n+1})]\} [h_n h_{n+1} (h_n + h_{n+1})]^{-1} - b_n \exp(-\alpha \times \times \varepsilon^{-1}x_n)$. Нетрудно убедиться, что выражение в фигурной скобке всегда положительно, функция $E_n(\theta)$ убывающая при $\theta > 0$. Отсюда вытекает (11). Следовательно, при $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ выполняются неравенства $L_n^h \Psi^h \leqslant -\gamma_2 a_n \pm \pm f_n^h \leqslant 0$, если $\gamma_2 \geqslant \alpha^{-1} \| f^h \|$. Пусть $n = 0$. Тогда имеем $L_0^h \Psi^h \leqslant -\gamma_1 [\delta_1 + a_0\beta_1 \times \times (1 - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}h_1))^{-1} (1 - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}h_1))] \mp A$. Учитывая (8), получим оценку

$$(1 - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}h_1))^{-1} (1 - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}h_1)) \geqslant \alpha a_0^{-1}. \tag{12}$$

Следовательно, $L_0^h \Psi^h \leqslant 0$, если $\gamma_1 \geqslant |A|/(\delta_1 + \alpha\beta_1)$. Пусть $n = N+1$. Тогда $L_{N+1}^h \Psi^h \leqslant \gamma_1 h_{N+1}^{-1} \beta_2 \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}) [\exp(\alpha\varepsilon^{-1}h_{N+1}) - 1] + \gamma_2\beta_2 + \delta_2 |B| - \delta_2\gamma_3$. Найдется C_4 такое, что $h_{N+1}^{-1} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}) [\exp(\alpha\varepsilon^{-1}h_{N+1}) - 1] \leqslant C_4$. Поэтому $L_{N+1}^h \Psi^h \leqslant 0$, если $\gamma_3 \geqslant (\gamma_1\beta_2 C_4 + \gamma_2\beta_2 + |B|\delta_2)\delta_2^{-1}$.

Итак, можно подобрать положительные величины γ_i таким образом, что будут выполнены неравенства (10). Воспользовавшись принципом максимума [5] и учитывая сделанные ограничения на $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, приходим к утверждению леммы.

Исследуем вопрос равномерной сходимости схемы (7). На сетку Ω наложим ограничения

$$1 \leqslant h_{n+1}/h_n \leqslant q, \quad n \in \{1, 2, \ldots, N\}, \tag{13}$$

где q — положительная постоянная, не зависящая от ε. Первое ограничение соответствует тому, что пограничный слой находится у левого конца исходного интервала, второе — тому, что нет резких изменений в шагах сетки. Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 4. *Найдется C_5 такое, что*

$$|\varepsilon_n - \varepsilon| \leqslant C_5 h_n, \quad x_n \in \Omega^0. \tag{14}$$

Доказательство. Введем

$$z = a_n h_n \varepsilon^{-1}, \quad y = a_n h_{n+1} \varepsilon^{-1}. \tag{15}$$

Тогда $\varepsilon_n = \varepsilon\varphi(z, y)/2$, где

$$\varphi(z, y) = \frac{y^2 [\exp(z) - 1] + z^2 [1 - \exp(-y)]}{y [\exp(z) - 1] - z [1 - \exp(-y)]}.$$

В случае $y < 1$, раскладывая экспоненты в ряд, получим $|\varepsilon_n - \varepsilon| = O(h_n)$. Пусть $y \geqslant 1$. Тогда имеем

$$\varphi(z, y) = (z + y) \left[\exp(z) \frac{y}{z} \frac{1 - \exp(-z)}{1 - \exp(-y)} - 1 \right]^{-1} + y.$$

Учитывая неравенство (8), получим

$$\varphi(z, y) \leqslant y \operatorname{cth}(z/2).$$

Используя то, что $y \geqslant 1$, и принимая во внимание (13), приходим к утверждению леммы. Погрешность аппроксимации оценим отдельно на функциях $V_0(x)$ и $P(x)$, определенных согласно (4).

Лемма 5. *Пусть при всех* n

$$h_n \leqslant C_6, \quad C_6 = (a_0 - (3/4)\alpha)/m. \tag{16}$$

Тогда найдется C_7 *такое, что*

$$|L_n^h V_0(x) - (LV_0)_{x=x_n}| \leqslant C_7 h_n \varkappa_n^{-1} \exp(-\alpha x_n/(2\varepsilon)), \tag{17}$$

где $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $\varkappa_n = \max(h_n, \varepsilon)$.

Доказательство. Несложные вычисления дают $L_n^h V_0(x) - (LV_0)_{x=x_n} = V_0(x_n) a_n^2 \varepsilon^{-1} F(s) [y(\exp(z) - 1) - z(1 - \exp(-y))]^{-1}$, где $F(s) = (1 - \exp(-y)) \times [\exp(sz) - 1 + s^2 z - sz] - (\exp(z) - 1)[1 - \exp(-sy) + s^2 y - sy]$, $s = a_0 a_n^{-1}$, z и y соответствуют (15). Нетрудно убедиться, что $F(1) = 0$, поэтому $|F(s)| \leqslant |s - 1| \max |F'(\xi)|$, $|\xi - 1| \leqslant |s - 1|$. Асимптотический анализ $|F'(s)|$ при z, $y \to 0$ и при z, $y \to \infty$ показывает, что существует C_8 такое, что $|F'(s)| \leqslant C_8 [\exp(z) - 1][1 - \exp(-y)] z^2 (1 + z)^{-1} \exp(|s - 1| z)$. Следовательно, $|F(s)| \leqslant C_8 |s - 1| [\exp(z) - 1][1 - \exp(-y)] z^2 (1 + z)^{-1} \exp(|s - 1| z)$. Нетрудно показать, используя неравенство (8), что $y[\exp(z) - 1] - z[1 - \exp(-y)] \geqslant y \times [\exp(z) - 1][1 - \exp(-z)]$. Учитывая два предыдущих неравенства, получим оценку для погрешности аппроксимации:

$$|L_n^h V_0(x) - (LV_0)_{x=x_n}| \leqslant C_8 V_0(x_n) a_n^2 \varepsilon^{-1} |s - 1| z (1 +$$
$$+ z)^{-1} z y^{-1} [1 - \exp(-y)][1 - \exp(-z)]^{-1} \exp(|s - 1| z).$$

Используя неравенство (8) и замечая, что $|s - 1| \leqslant m a_n^{-1} x_n$, получим

$$|L_n^h V_0(x) - (LV_0)_{x=x_n}| \leqslant C_9 z (1 + z)^{-1} \times$$
$$\times \frac{x_n}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\alpha x_n}{2\varepsilon}\right) \exp\left(\frac{m h_n x_n}{\varepsilon} - \frac{a_0 x_n}{\varepsilon} + \frac{\alpha x_n}{2\varepsilon}\right).$$

Учитывая условие (16), имеем

$$|L_n^h V_0(x) - (LV_0)_{x=x_n}| \leqslant C_{10} z (1 + z)^{-1} \exp(-\alpha x_n/(2\varepsilon)),$$

откуда следует утверждение леммы. Пусть $P_n^h = \exp(-\alpha\sigma\varepsilon^{-1} x_n)$, $0 < \sigma \leqslant 1/2$, $x_n \in \Omega$.

Лемма 6. *Найдется* C_{11} *такое, что*

$$L_n^h P^h \leqslant -C_{11} \varkappa_n^{-1} P_n^h, \quad n \in \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{18}$$

Доказательство. Непосредственные вычисления приводят к следующему выражению:

$$L_n^h P^h = -P_n^h \varepsilon^{-1} a_n^2 F(s, z, y) [y(\exp(z) - 1) - z(1 - \exp(-y))]^{-1} - b_n P_n^h, \tag{19}$$

где y, z соответствуют (15), $F(s, z, y) = [\exp(z) - 1][1 - \exp(-sy)] - [\exp(sz) - 1][1 - \exp(-y)]$, $s = \sigma\alpha a_n^{-1} \leqslant 1/2$. В (19) числитель оценим снизу, а знаменатель — сверху. Нетрудно убедиться, что $F(s, z, y) \geqslant F(s, z, z)$, причем

$$F(s, z, z) = 8 \operatorname{sh} \frac{sz}{2} \operatorname{sh} \frac{z}{2} \operatorname{sh} \frac{z - sz}{2}. \tag{20}$$

Учитывая (8), получим

$$y[\exp(z) - 1] - z[1 - \exp(-y)] \leqslant y[\exp(z) - 1][1 - \exp(-z - y)]. \tag{21}$$

Применяя к (19) оценки (20) и (21) и принимая во внимание существование C_{12}, C_{13} таких, что

$$C_{12}\frac{t}{1+t}\exp(t)\leqslant \operatorname{sh}(t)\leqslant C_{13}\frac{t}{1+t}\exp(t),\quad t>0,$$

приходим к утверждению леммы.

Пусть $w(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция.

Лемма 7. *Найдется* C_{14} *такое, что*

$$|L_n^h w(x)-(Lw)_{x=x_n}|\leqslant C_{14}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}[\varepsilon|w'''(s)|+|w''(s)|]\,ds,\quad x_n\in\Omega^0. \tag{22}$$

Доказательство. Распишем погрешность аппроксимации следующим образом:

$$\begin{gathered}L_n^h w(x)-(Lw)_{x=x_n}=(\varepsilon_n-\varepsilon)\lambda_{xx}w_n+\\+\varepsilon(\lambda_{xx}w_n-w_n'')+a_n(\lambda_x w_n-w_n'),\end{gathered} \tag{23}$$

где

$$w_n^j=d^jw(x_n)/dx^j,\quad j=0,\ 1,\ 2.$$

Оценим модуль каждого слагаемого этой суммы, используя следствия интегрирования по частям:

$$w(\eta)-w(\xi)=(\eta-\xi)w'(\xi)+\int\limits_{\xi}^{\eta}(\eta-s)\,w''(s)\,ds,$$

$$w(\eta)-w(\xi)=(\eta-\xi)w'(\eta)-\int\limits_{\xi}^{\eta}(s-\xi)\,w''(s)\,ds.$$

Оценим первое слагаемое:

$$\begin{gathered}|\lambda_{xx}w_n|=2\,|h_n[h_{n+1}w_n'+\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}(x_{n+1}-s)\,w''(s)\,ds]-\\-h_{n+1}[h_nw_n'-\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}(s-x_{n-1})\,w''(s)\,ds]|\,[h_nh_{n+1}(h_n+\\+h_{n+1})]^{-1}\leqslant 2(h_n+h_{n+1})^{-1}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}|w''(s)|\,ds.\end{gathered}$$

Учитывая (14), получим

$$|\varepsilon_n-\varepsilon|\,|\lambda_{xx}w_n|\leqslant C_{14}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}|w''(s)|\,ds.$$

Оценивая аналогичным образом остальные слагаемые в (23), приходим к утверждению леммы.

Теорема. *Пусть* u — *решение задачи* (1)—(2), u^h — *решение схемы* (7), Ω *удовлетворяет ограничениям* (13). *Тогда найдется* C *такое, что*

$$|u^h(x)-u(x)|\leqslant Ch,\quad x\in\Omega. \tag{24}$$

Доказательство. В силу лемм 1 и 3 достаточно рассмотреть случай $h\leqslant C_6$, где C_6 соответствует (16). Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся принципом максимума. Определим сеточную функцию

$$\Psi_n^h = h\,[\gamma_1 (1 - x_n) + \gamma_2 \exp(-\alpha x_n/(2\varepsilon)) +$$

$$+ \gamma_3 \exp(-\alpha\sigma\varepsilon^{-1}(x_n - h_1)) + \gamma_4 \exp(-\alpha\varepsilon^{-1} x_n) + \gamma_5] \pm (u_n^h - u(x_n)),$$

где $x_n \in \Omega$, $\sigma = 1/(1+q)$. Покажем, что можно подобрать положительные ограниченные γ_i таким образом, что будут выполнены неравенства (10).

Пусть $x_n \in \Omega^0$. Учитывая (11), получим

$$L_n^h \Psi^h \leqslant \gamma_1 h L_n^h (1 - x) + \gamma_2 h L_n^h \exp(-\alpha x/(2\varepsilon)) +$$

$$+ \gamma_3 h L_n^h \exp(-\alpha\sigma\varepsilon^{-1}(x - h_1)) + |L_n^h (u^h - [u]_h)|. \qquad (25)$$

Используя представление (4), запишем $L_n^h (u^h - [u]_h) = \gamma\,((LV_0)_{x=x_n} - L_n^h [V_0]_k) + ((LP)_{x=x_n} - L_n^h [P]_h$. Докажем, что существует C_{15} такое, что

$$|(LP)_{x=x_n} - L_n^h [P]_h| \leqslant C_{15} (h_n + \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}(x_n - h_n)) \times$$

$$\times (1 - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}(h_n + h_{n+1}))). \qquad (26)$$

Для этого воспользуемся оценками производных (4) и леммой 7. Заменяя производные в (22) соответствующими оценками и производя интегрирование, придем к (26). Применяя к (25) оценки (17), (18), (26), группируя слагаемые, получим

$$L_n^h \Psi^h \leqslant -\alpha h (\gamma_1 - C_{15} \alpha^{-1} h_n h^{-1}) - h \varkappa_n^{-1} C_{11} \exp(-\alpha \varkappa_n/(2\varepsilon)) [\gamma_2 - C C_7 C_{11}^{-1} h_n h^{-1}] -$$

$$- h \varkappa_n^{-1} C_{11} \exp(-\sigma\alpha\varepsilon^{-1}(x_n - h_1)) [\gamma_3 - C_{15} C_{11}^{-1} \varkappa_n h^{-1} \exp(\tau_n) \times$$

$$\times (1 - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}(h_n + h_{n+1})))],$$

где

$$\tau_n = \sigma\alpha\varepsilon^{-1}(x_n - h_1) - \alpha\varepsilon^{-1}(x_n - h_n).$$

Покажем, что $\tau_n \leqslant 0$. В случае $n = 1$ это очевидно. При $n > 1$ имеем

$$\frac{x_n - h_1}{x_n - h_n} = 1 + \frac{h_n - h_1}{x_n - h_n} < 1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} \leqslant 1 + q = \sigma^{-1},$$

следовательно, $\tau_n \leqslant 0$. Нетрудно убедиться, что величина $F_n = \varkappa_n h^{-1} [1 - \exp(-\sigma \times \varepsilon^{-1}(h_n + h_{n+1}))]$ ограничена равномерно по ε и шагам сетки. Следовательно, можно подобрать постоянные γ_1, γ_2, γ_3 такими, что будет выполнено неравенство (10) при всех $x_n \in \Omega^0$.

Пусть $n = 0$. Можно убедиться, что при $s > 0$ $L_0^h \exp(-\alpha s \varepsilon^{-1} x) \leqslant 0$. Следовательно, $L_0^h \Psi^h \leqslant \gamma_1 h L_0^h (1 - x) + \gamma_4 h L_0^h \exp(-\alpha\varepsilon^{-1} x) + |L_0^h (u^h - [u]_h)|$. Учитывая неравенство (12), получим $L_0^h \Psi^h \leqslant -\gamma_4 h (\delta_1 + \alpha\beta_1) + \varepsilon\beta_1 |u'(0) - M[u]_h|$. Принимая во внимание (6), имеем $L_0^h \Psi^h \leqslant 0$, если $\gamma_4 \geqslant C_1 \beta_1/(\delta_1 + \alpha\beta_1)$.

Пусть $n = N+1$. Найдется C_{16} такое, что $F = h_{N+1}^{-1} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1} s (1 - h_1 - h_{N+1}))\,[1 - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1} s h_{N+1})] \leqslant C_{16}$, где $s > 0$, причем $L_{N+1}^h \exp(-\alpha\varepsilon^{-1} s x) \leqslant F\beta_2 \exp(-\alpha\varepsilon^{-1} s h_1)$. Поэтому $L_{N+1}^h \Psi^h \leqslant \beta_2 h (\gamma_1 + C_{16}\gamma_2 + C_{16}\gamma_3 + C_{16}\gamma_4) - \gamma_5 \delta_2 h + \beta_2 |u'(1) - h_{N+1}^{-1} [u(1) - u(1 - h_{N+1})]|$. С помощью представления решения (4) нетрудно показать, что существует C_{17} такое, что $|u'(1) - [u(1) - u(1 - h_{N+1})]/h_{N+1}| \leqslant C_{17} h$. Следовательно, $L_{N+1}^h \Psi^h \leqslant 0$, если $\gamma_5 \geqslant \delta_2^{-1} \beta_2 [\gamma_1 + C_{16} (\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) + C_{17}]$.

Итак, можно подобрать ограниченные положительные величины γ_i таким образом, что будут выполнены неравенства (10). Из принципа максимума, приведенного в [5], следует, что $\Psi_n^h \geqslant 0$, $x_n \in \Omega$. Это доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной.— Матем. заметки, 1969, т. 6, № 2, с. 237—248.
2. Олейник О. А. О краевых задачах для уравнений с малым параметром при старших производных.— ДАН СССР, 1952, т. 85, с. 493—495.
3. Kellog R. B., Tsan A. Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points.— Math. Comput., 1978, v. 32, № 144, p. 1025—1039.
4. Задорин А. И., Игнатьев В. Н. О численном решении уравнения с малым параметром при старшей производной.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 3, с. 620—628.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1977. 656 с.

г. Омск

Поступила
29.04.1985

Н. А. Корешков

УДК 512.554

О НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБР ЛИ КАРТАНОВСКОГО ТИПА

В данной работе мы изучаем неприводимые представления максимальной подалгебры $\mathscr{L}_0$ p-алгебры Ли $\mathscr{L}$ картановского типа серий W_n, S_n и H_n [1]. Основное поле k всюду предполагается алгебраически замкнутым, характеристики $p>2$. Если M — неприводимый $\mathscr{L}_0$-модуль, то элементы $l^p-l^{[p]}$, $l\in\mathscr{L}_0$, действуют скалярно на этом модуле. Возникающую таким образом функцию мы обозначаем через λ. Если $\lambda(\mathscr{L}_1)\not\equiv 0$, где $\mathscr{L}_1$ — радикал алгебры $\mathscr{L}_0$, то $\mathscr{L}_0$-модуль M изоморфен модулю, индуцированному с одномерного модуля, определяемого некоторой поляризацией P алгебры $\mathscr{L}_0$.

Напомним некоторые определения. Обозначим через Q_n факторалгебру $k[x_1, \ldots, x_n]/J$, где J — идеал, порожденный элементами $x_1^p, \ldots, x_n^p$. Тогда W_n — это алгебра всех дифференцирований алгебры Q_n, т. е. $W_n=\{\sum_{i=1}^{n} f_i\partial_i,$ $f_i\in Q_n\}$, где операторы ∂_i индуцируются в Q_n частными дифференцированиями $\partial/\partial x_i$, заданными на $k[x_1, \ldots, x_n]$. Алгебра $\widetilde{S}_n$ определяется как $\mathrm{Ann}_{W_n}(\omega)=$ $=\{D\in W_n \mid D\omega=0\}$, где $\omega=dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$. Наконец, $S_n=[\widetilde{S}_n, \widetilde{S}_n]$. Векторное пространство S_n порождено дифференцированиями $D_{k,l}\{u\}=(\partial_l u)\partial_k-(\partial_k u)\partial_l$, $u\in Q_n$. Алгебра $\widetilde{H}_n$ $(n=2m)$ состоит из всех дифференцирований, аннулирующих форму $\omega=dx_1\wedge dx_{m+1}+\ldots+dx_m\wedge dx_{2m}$. Обозначим $H_n=[[\widetilde{H}_n, \widetilde{H}_n],$ $[\widetilde{H}_n, \widetilde{H}_n]]$. Тогда

$$H_n=\{D_u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,\pi i}(\partial_i u)\partial_{\pi i},\ u\in Q_n'\}.$$

Здесь Q_n' — совокупность срезанных многочленов, не содержащих моном $x_1^{p-1}\ldots x_n^{p-1}$, π — перестановка множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, определенная равенством $\pi i=m\pm i$,

$$\alpha_{i,\pi i}=\begin{cases}1, & \text{если } i\leqslant m;\\ -1, & \text{если } i>m.\end{cases}$$

Умножение в H_n выражается формулой $[D_u, D_v]=D_w$, где $w=\{u, v\}=$ $=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,\pi i}(\partial_i u)(\partial_{\pi i}v)$. Таким образом, если Q_n снабдить структурой алгебры Ли с помощью умножения $(u, v)\to\{u, v\}$, то $H_n\cong Q_n'/k$.