ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 24, 1984 № 7

УДК 519.6:519.632.4

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

ЗАДОРИН А. И.

(Омск)

Рассматривается третья краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. На неравномерной сетке строится монотонная разностная схема, учитывающая погранслойный рост решения. В случае равномерной сетки получена оценка скорости сходимости разностной схемы. Проведены численные эксперименты.

Вопрос о построении равномерно сходящихся разностных схем для сингулярно-возмущенной задачи Дирихле изучен в ряде работ, например в [1], [2]. Случай третьей краевой задачи менее изучен, этому посвящены, например, работы [3], [4]. В [3] производная от решения в краевом условии предполагается ограниченной. В [4] строится разностная схема для системы двух уравнений. В обеих работах производная от решения выделялась в качестве неизвестной функции и исходное уравнение второго порядка сводилось к системе двух уравнений первого порядка.

В настоящей статье строится монотонная разностная схема на неравномерной сетке, причем осуществляется аппроксимация производной в краевом условии с учетом экспоненциального роста решения. Получена оценка скорости сходимости схемы в случае равномерной сетки. В заключение приводятся результаты численных экспериментов.

§1. Построение разностной схемы

Рассмотрим исходную краевую задачу

(1.1) $$Lu=\varepsilon u''+a(x)u'-b(x)u=f(x),$$

(1.2) $$u'(0)=A/\varepsilon,\qquad u(1)=B.$$

Предполагаем, что $\varepsilon>0$, функции a, b, f дважды непрерывно дифференцируемы, причем $C_2\geqslant|A|\geqslant C_1>0$, $b(x)\geqslant0$, $m\geqslant a(x)\geqslant\alpha>0$.

Под C и C_i будем понимать положительные постоянные, не зависящие от ε и h. За норму сеточной или непрерывной функции $g(x)$ принимаем $\|g\|=\max|g(x)|$.

Предварительно докажем две леммы относительно решения задачи (1.1), (1.2).

Лемма 1. *Пусть $u(x)$ — решение задачи* (1.1), (1.2). *Тогда*

$$|u(x)|\leqslant\frac{|A|}{\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)+\frac{\|f\|}{\alpha}(1-x)+|B|.$$

Доказательство. В соответствии с [5], для задачи (1.1), (1.2) справедлив принцип максимума. Определим функцию

$$\Psi(x)=\frac{|A|}{\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)+\frac{\|f\|}{\alpha}(1-x)+|B|\pm u(x).$$

Тогда $L\Psi(x)\leqslant 0$, $\Psi'(0)\leqslant 0$, $-\Psi(1)\leqslant 0$. В силу принципа максимума, $\Psi(x)\geqslant 0$, откуда следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Решение задачи* (1.1), (1.2) *представимо в виде* $u(x)=V(x)+w(x)$, *где*

$$V(x)=-\frac{A}{a_0}\exp\left(-\frac{a_0x}{\varepsilon}\right),\qquad \left|\frac{d^jw}{dx^j}\right|\leqslant C_3\varepsilon^{1-j},$$

$$j=1,2,3,4,\quad a_0=a(0).$$

Доказательство. Из (1.1), (1.2) нетрудно получить, что $w(x)$ является решением задачи

$$\varepsilon w''(x)+a(x)w'(x)-b(x)w(x)=F(x), \tag{1.3}$$

$$w'(0)=0,\qquad w(1)=B+a_0^{-1}A\exp(-a_0\varepsilon^{-1}), \tag{1.4}$$

где

$$F(x)=f(x)+\frac{A}{\varepsilon}[a_0-a(x)]\exp\left(-\frac{a_0x}{\varepsilon}\right)-\frac{b(x)A}{a_0}\exp\left(-\frac{a_0x}{\varepsilon}\right).$$

Учитывая, что $|a'(x)|\leqslant C_4$, получаем $|F(x)|\leqslant C_5$. Исходя из задачи (1.3), (1.4), приходим к следующему выражению:

$$w'(x)=\varepsilon^{-1}\int_0^x[b(s)w(s)+F(s)]\exp[\varphi(s)-\varphi(x)]ds,$$

где

$$\varphi(t)=\varepsilon^{-1}\int_0^t a(\tau)d\tau.$$

В соответствии с леммой 1, функция $w(s)$ ограничена, поэтому

$$|w'(x)|\leqslant\frac{C_6}{\varepsilon}\int_0^x\exp[\varphi(s)-\varphi(x)]ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_6}{\varepsilon}\int_0^x\exp\left[\frac{\alpha(s-x)}{\varepsilon}\right]ds\leqslant C_3.$$

Теперь из уравнения (1.3) следует, что $|w''(x)|\leqslant C_3\varepsilon^{-1}$. Дифференцируя (1.3), приходим к утверждению леммы 2.

Введем неравномерную сетку $\Omega=\{x_j: x_j=x_{j-1}+h_j,\ x_0=0,\ x_{N+1}=1,\ j=1,2,\dots,N\}$, $\Omega^0=\Omega\setminus\{0,1\}$. Определим в (1.2) аппроксимацию производной, точную на функции пограничного слоя $V(x)$:

$$\lambda_0u^h=(u_1^h-u_0^h)\frac{a_0}{\varepsilon}\left[1-\exp\left(-\frac{a_0h_1}{\varepsilon}\right)\right]^{-1}. \tag{1.5}$$

Оценим относительную погрешность такой аппроксимации.

Лемма 3. *Пусть* $u(x)$ — *решение задачи* (1.1), (1.2), *тогда*

$$\left|\frac{\lambda_0[u]_h-u'(0)}{u'(0)}\right|\leqslant C_7h_1. \tag{1.6}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением $u(x)$ в соответствии с леммой 2 и получим

$$\left|\frac{\lambda_0[u]_h-u'(0)}{u'(0)}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{C_1}\left|\frac{[w(h_1)-w(0)]a_0}{\varepsilon[1-\exp(-a_0h_1\varepsilon^{-1})]}-w'(0)\right|. \tag{1.7}$$

Пусть $\varepsilon\leqslant mh_1$. Тогда $1-\exp(-a_0h_1\varepsilon^{-1})\geqslant 1-\exp(-\alpha m^{-1})>0$. Согласно лемме 2, функция $w'(x)$ ограничена, поэтому из (1.7) следует, что

$$\left|\frac{\lambda_0[u]_h-u'(0)}{u'(0)}\right|\leqslant C_8(h_1+\varepsilon).$$

Учитывая, что $\varepsilon\leqslant mh_1$, приходим к (1.6). Пусть теперь $\varepsilon>mh_1$. Осуществляя в (1.7) разложения в ряд и используя лемму 2, получаем оценку (1.6). Лемма доказана.

Осуществим аппроксимацию уравнения (1.1) по аналогии с [1], [6]. Аппроксимируя в соответствии с (1.5) краевое условие (1.2), приходим к разностной схеме

$$L_hu_n^h=2\varepsilon_n\frac{h_n(u_{n+1}^h-u_n^h)-h_{n+1}(u_n^h-u_{n-1}^h)}{h_nh_{n+1}(h_n+h_{n+1})}+ \tag{1.8}$$

$$+a_n\frac{h_n^2(u_{n+1}^h-u_n^h)+h_{n+1}^2(u_n^h-u_{n-1}^h)}{h_nh_{n+1}(h_n+h_{n+1})}-b(x_n)u_n^h=$$

$$=f(x_n),\qquad x_n\in\Omega^0,$$

$$-u_0^h+u_1^h=A[1-\exp(-a_0h_1\varepsilon^{-1})]a_0^{-1}, \tag{1.9}$$

$$-u_{N+1}^h=-B, \tag{1.10}$$

где

$$\varepsilon_n=0.5a_n\left\{h_{n+1}^2\left[\exp\left(\frac{a_nh_n}{\varepsilon}\right)-1\right]+\right.$$

$$\left.+h_n^2\left[1-\exp\left(-\frac{a_nh_{n+1}}{\varepsilon}\right)\right]\right\}\left\{h_{n+1}\left[\exp\left(\frac{a_nh_n}{\varepsilon}\right)-1\right]-\right.$$

$$\left.-h_n\left[1-\exp\left(-\frac{a_nh_{n+1}}{\varepsilon}\right)\right]\right\}^{-1},\qquad a_n=a(x_n).$$

Нетрудно проверить, что схема (1.8)–(1.10) монотонна [7].

Лемма 4. *Пусть* u^h – *решение схемы* (1.8)–(1.10), *тогда*

$$\|u^h\|\leqslant\alpha^{-1}(|A|+\|f^h\|)+|B|,\qquad f^h=[f]_\Omega. \tag{1.11}$$

Доказательство. Схема (1.8)–(1.10) монотонна, поэтому для нее справедлив принцип максимума [7]. Определим сеточную функцию

$$\Psi(x)=\frac{|A|}{\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)+\frac{\|f^h\|}{\alpha}(1-x)+|B|\pm u^h(x).$$

Покажем, что $S_h\Psi(x_k)\leqslant 0$ для всех $x_k\in\Omega$, где S_h – оператор схемы (1.8)–(1.10). Случай $k=N+1$ очевиден. Пусть $k=0$. Заметим, что при $\theta>0$ функция $\varphi(\theta)=[1-\exp(-\theta h/\varepsilon)]\theta^{-1}$ монотонно убывает при всех ε и h. Поэтому

$$S_h\Psi(x_0)\leqslant-|A|\varphi(\alpha)\pm A\varphi(a_0)\leqslant 0.$$

Рассмотрим теперь случай $0<k<N+1$. Сначала покажем, что

$$L_h\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_k)\leqslant 0. \tag{1.12}$$

Введем

$$E_k(\theta)=\{h_{k+1}[\exp(\theta h_k)-1]+h_k^2[1-\exp(-\theta h_{k+1})]\}\times$$

$$\times\{h_{k+1}[\exp(\theta h_k)-1]-h_k[1-\exp(-\theta h_{k+1})]\}^{-1}.$$

Тогда нетрудно показать, что

$$(1.13)\qquad L_h \exp\left(-\frac{\alpha x_k}{\varepsilon}\right)=a_k \exp\left(-\frac{\alpha x_k}{\varepsilon}\right)\times$$
$$\times\left[E_k\left(\frac{a_k}{\varepsilon}\right)-E_k\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right]\left\{h_{k+1}\left[\exp\left(\frac{\alpha h_k}{\varepsilon}\right)-1\right]-\right.$$
$$\left.-h_k\left[1-\exp\left(-\frac{\alpha h_{k+1}}{\varepsilon}\right)\right]\right\}[h_k h_{k+1}(h_k+h_{k+1})]^{-1}-$$
$$-b(x_k)\exp\left(-\frac{\alpha x_k}{\varepsilon}\right).$$

Пусть $x=\alpha\varepsilon^{-1}h_k$, $y=\alpha\varepsilon^{-1}h_{k+1}$, тогда условие положительности фигурной скобки в (1.13) сводится к справедливому неравенству

$$(1.14)\qquad y[\exp(x)-1]+x[\exp(-y)-1]>0,\qquad x, y>0.$$

Покажем теперь, что функция $E_k(\theta)$ убывающая при $\theta>0$. Условие $dE_k/d\theta\leqslant 0$ имеет вид

$$h_k[\exp(\theta h_{k+1})-1]+h_{k+1}[\exp(-\theta h_k)-1]\geqslant 0.$$

Это неравенство справедливо в силу (1.14). Итак, из (1.13) следует (1.12). Теперь легко получить

$$S_h\Psi(x_k)=L_h\Psi(x_k)\leqslant-\alpha^{-1}\|f^h\|a(x_k)\pm f(x_k)\leqslant 0.$$

Из принципа максимума следует утверждение леммы.

Нетрудно убедиться, что схема (1.8)–(1.10) первого порядка точности при фиксированных значениях ε.

§ 2. Оценка сходимости на равномерной сетке

Изучим сходимость разностной схемы (1.8)–(1.10) в случае равномерной сетки Ω с шагом h.

Теорема 1. *Пусть u^h – решение схемы* (1.8)–(1.10), *тогда справедлива оценка*

$$(2.1)\qquad |u^h(x)-u(x)|\leqslant C_9(h+\varepsilon|\ln h|),\qquad x\in\Omega.$$

Доказательство. Краевой задаче (1.1), (1.2) сопоставим эквивалентную ей задачу Дирихле с некоторым левым краевым условием:

$$(2.2)\qquad \varepsilon u''+a(x)u'-b(x)u=f(x),\qquad u(0)=D,\quad u(1)=B.$$

В соответствии с леммой 1, величина D по модулю ограничена. Выпишем разностную схему для задачи (2.2):

$$(2.3)\qquad L_h y_n^h=f(x_n),\quad x_n\in\Omega^0,\qquad y_0^h=D,\quad y_{N+1}^h=B.$$

Согласно [1],

$$(2.4)\qquad |y_n^h-u(x_n)|\leqslant C_{10}h,\qquad x_n\in\Omega^0.$$

В силу оценки (1.6),

$$\frac{\varepsilon^{-1}a_0[u(h)-u(0)]}{1-\exp(-a_0\varepsilon^{-1}h)}-u'(0)=\eta u'(0)h,\qquad |\eta|\leqslant C_7.$$

Отсюда найдем выражение для D:

$$D=u(h)-\frac{A}{a_0}\left[1-\exp\left(-\frac{a_0h}{\varepsilon}\right)\right](1+\eta h).$$

Разностная схема (2.3) монотонна, поэтому, в силу принципа максимума, малые изменения краевых условий приводят к малым изменениям решения. Перейдем от (2.3) к схеме

(2.5а) $\quad L_h z_n^{(1)}=f(x_n), \qquad x_n\in\Omega^0,$

(2.5б) $\quad z_0^{(1)}=u(h)-a_0^{-1}A[1-\exp(-a_0h\varepsilon^{-1})], \qquad z_{N+1}^{(1)}=B.$

Тогда $|z_n^{(1)}-y_n^h|\leqslant C_{11}h, \quad x_n\in\Omega$. В силу (2.4),

(2.6) $\quad |z_n^{(1)}-u(x_n)|\leqslant C_{12}h, \qquad x_n\in\Omega,$

в частности $|z_1^{(1)}-u(h)|\leqslant C_{12}h$. Продолжая рекуррентно поправку краевого условия, приходим к итерационному процессу:

(2.7а) $\quad L_h z_n^{(k+1)}=f(x_n), \qquad x_n\in\Omega^0,$

(2.7б) $\quad z_0^{(k+1)}=z_1^{(k)}-a_0^{-1}A[1-\exp(-a_0h\varepsilon^{-1})], \qquad z_{N+1}^{(k+1)}=B.$

Заметим, что на каждой итерации этого процесса

(2.8) $\quad \|z^{(k+1)}-z^{(k)}\|\leqslant C_{12}h,$

причем для первой итерации справедлива оценка (2.6). Покажем, что процесс (2.7) сходится и $\lim z^{(k)}=u^h$. Для этого представим $z^{(k)}$ в виде суммы $z^{(k)}=R^{(k)}+u^h$, где $R^{(k)}$ определяется следующим образом:

(2.9) $\quad L_hR^{(k+1)}=0, \quad R_0^{(k+1)}=R_1^{(k)}, \quad R_{N+1}^{(k+1)}=0, \quad R_1^{(1)}=z_1^{(1)}-u_1^h.$

Докажем, что последовательность $R^{(k)}$ сходится к нулю. Сначала покажем, что последовательность $R^{(k)}$ ограничена. В самом деле, сеточная функция $z^{(1)}$ ограничена как решение схемы (2.5), а u^h ограничена в силу леммы 4; тогда $|R_1^{(1)}|\leqslant|z_1^{(1)}|+|u_1^h|\leqslant C_{13}$. Для схемы (2.9) справедлив принцип максимума, поэтому если $|R_1^{(k)}|\leqslant C_{13}$, то $\|\mathrm{R}^{(k+1)}\|\leqslant C_{13}$. Итак, $\|R^{(k)}\|\leqslant C_{13}$. Теперь докажем монотонность последовательности $R^{(k)}$.

Для процесса (2.9) возможен только один из случаев: $R_1^{(2)}\geqslant R_1^{(1)}$ или $R_1^{(2)}<R_1^{(1)}$. Остановимся на первом, так как второй рассматривается аналогично. Монотонность $R^{(k)}$ докажем по индукции. Пусть $R_1^{(k)}\geqslant R_1^{(k-1)}$. Из (2.9) следует $L_h(R^{(k+1)}-R^{(k)})=0, R_0^{(k+1)}-R_0^{(k)}=R_1^{(k)}-R_1^{(k-1)}\geqslant0, R_{N+1}^{(k+1)}-R_{N+1}^{(k)}=0.$

В силу принципа максимума, покомпонентно $R^{(k+1)}\geqslant R^{(k)}$. Итак, последовательность $R^{(k)}$ в конечномерном пространстве монотонна и ограничена, следовательно, существует $R=\lim R^{(k)}$; R удовлетворяет (1.8)–(1.10) при однородных краевых условиях и нулевой правой части, поэтому, в силу (1.11), $R=0$. Следовательно, $\lim z^{(k)}=u^h$.

Оценим скорость сходимости итерационного процесса (2.9). Заметим, что на каждом шаге по k решение схемы (2.9) равномерно по ε сходится к решению задачи

$$\varepsilon T''+a(x)T'-b(x)T=0, \qquad T(0)=R_1^{(k)}, \qquad T(1)=0.$$

В соответствии с [8],

$$T(x)=R_1^{(k)}\,[\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x)+O(\varepsilon)],$$

поэтому

$$R_1^{(k+1)}=R_1^{(k)}\,[\exp(-a_0\varepsilon^{-1}h)+O(h+\varepsilon)].$$

Следовательно, на произвольной M-итерации

$$\|R^{(M)}\|\leqslant C_{13}[\exp(-a_0h\varepsilon^{-1})+O(h+\varepsilon)]^{M-2}.$$

Определим номер итерации M, на которой $\|R^{(M)}\|\leqslant C_{14}(h+\varepsilon)$, где C_{14} — некоторая постоянная. Если $\exp(-a_0h\varepsilon^{-1})=O(h+\varepsilon)$, то M — конечное число независимо от ε и h. Пусть $\exp(-a_0h\varepsilon^{-1})\gg h+\varepsilon$, тогда с точностью до постоянной $M=\varepsilon a_0^{-1}h^{-1}|\ln(h+\varepsilon)|$. При таком выборе M

$$\|u^h-z^{(M)}\|\leqslant C_{14}(h+\varepsilon). \tag{2.10}$$

Учитывая неравенства (2.6), (2.8), (2.10), получаем

$$|u^h(x)-u(x)|\leqslant|u^h(x)-z^{(M)}(x)|+\sum_{k=2}^{M}|z^{(k)}(x)-$$
$$-z^{(k-1)}(x)|+|z^{(1)}(x)-u(x)|\leqslant C_{14}(h+\varepsilon)+C_{12}Mh,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть $mh<\varepsilon$. Тогда для решения схемы* (1.8)–(1.10) *справедлива оценка*

$$|u^h(x)-u(x)|\leqslant C_{15}(h+h^2/\varepsilon^2), \qquad x\in\Omega. \tag{2.11}$$

Доказательство. Оценим погрешность аппроксимации схемы (1.8)–(1.10). Воспользуемся представлением $u(x)$ в соответствии с леммой 2. Погрешность аппроксимации оценим отдельно на функциях $V(x)$ и $w(x)$:

$$|LV(x)-L_h[V(x)]_h|_{x=x_k}=\exp\left(-\frac{a_0x_k}{\varepsilon}\right)\frac{|A|}{a_0}\Bigg|\frac{a_0a_k}{\varepsilon}\times$$
$$\times\left[\frac{\operatorname{sh}(a_0h\varepsilon^{-1})}{a_0h\varepsilon^{-1}}-1\right]-\frac{a_0^2}{\varepsilon}\left[\frac{a_kh}{2}\operatorname{cth}\left(\frac{a_kh}{2\varepsilon}\right)\operatorname{sh}^2\left(\frac{a_0h}{2\varepsilon}\right)\left(\frac{a_0h}{2\varepsilon}\right)^{-2}-1\right]\Bigg|$$

Раскладывая гиперболические функции в ряд, учитывая, что $|a_k-a_0|\leqslant$ $\leqslant C_{16}x_k$, $x^2\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x)\leqslant C_{17}\varepsilon^2$, получаем

$$|LV(x)-L_h[V(x)]_h|\leqslant C_{18}h^2\varepsilon^{-1}, \qquad x\in\Omega^0. \tag{2.12}$$

Используя оценку производных функций $w(x)$ в соответствии с леммой 2, нетрудно получить

$$|Lw(x)-L_h[w(x)]_h|\leqslant C_{19}h^2\varepsilon^{-2}, \qquad x\in\Omega^0. \tag{2.13}$$

Пусть $z^h(x)=u^h(x)-u(x)$, $x\in\Omega$. Тогда с учетом (2.12), (2.13) запишем

$$L_hz^h(x)=O(h^2\varepsilon^{-2}). \tag{2.14}$$

Используя лемму 2, получаем

$$-z_0^h+z_1^h=w(0)-w(h)=O(h^2\varepsilon^{-1}).$$

Следовательно, $z^h(x)$ удовлетворяет схеме (1.8)—(1.10) с правой частью из (2.14), $B=0$, $A=O(h)$. Воспользовавшись неравенством (1.11), приходим к утверждению теоремы. Используя оценки (2.1), (2.11), нетрудно прийти к выводу, что

$$|u^h(x)-u(x)|\leqslant Ch^{2/3}|\ln h|^{2/3}, \qquad x\in\Omega.$$

Заметим, что указанный подход к построению разностной схемы применим и в случае, когда пограничный слой находится у правого конца исходного интервала.

§ 3. Численные эксперименты

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon u''(x)-u'(x)=-\exp(x), \tag{3.1}$$

$$u(0)=0, \qquad u'(1)=A/\varepsilon, \tag{3.2}$$

где величина A соответствует условию $u(1)=0$.

На равномерной сетке с шагом $h=0.02$ рассмотрим разностную схему (1.8) с различными способами аппроксимации производной в краевом условии (3.2):

а) аппроксимация с первым порядком:

$$u'(1)\approx(u_{N+1}^h-u_N^h)/h; \tag{3.3}$$

б) аппроксимация со вторым порядком:

$$u'(1)\approx\left\{\left[1+\frac{h^2b(1)}{2\varepsilon}\right]u_{N+1}^h-u_N^h+\frac{f(1)h^2}{2\varepsilon}\right\}\left[h+\frac{a(1)h^2}{2\varepsilon}\right]^{-1}; \tag{3.4}$$

в) аппроксимация, точная на погранслойной функции:

$$u'(1)\approx(u_{N+1}^h-u_N^h)\frac{|a(1)|}{\varepsilon}\left\{1-\exp\left[-\frac{|a(1)|h}{\varepsilon}\right]\right\}^{-1}. \tag{3.5}$$

В табл. 1 приведена норма погрешности $z^h(x)=u^h(x)-u(x)$ в зависимости от способа аппроксимации производной в краевом условии (3.2). Из анализа табл. 1 можно сделать вывод о преимуществе аппроксимации производной в краевом условии в соответствии с (3.5).

Таблица 1

Способ аппроксимации	ε					
	2	$2\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-5}$
(3.3)	$0.13\cdot10^{-1}$	0.10	$0.10\cdot10^{1}$	$0.15\cdot10^{2}$	$0.17\cdot10^{3}$	$0.17\cdot10^{4}$
(3.4)	10^{-4}	$0.38\cdot10^{-2}$	0.37	$0.71\cdot10^{2}$	$0.84\cdot10^{4}$	$0.85\cdot10^{6}$
(3.5)	$0.11\cdot10^{-1}$	$0.27\cdot10^{-1}$	$0.29\cdot10^{-1}$	$0.35\cdot10^{-1}$	$0.37\cdot10^{-1}$	$0.37\cdot10^{-1}$

Остановимся на случае неравномерной сетки. В погранслойной области ширины 1.5ε бралось 20 шагов, вне ее 30. Сетка строилась так, чтобы вне погранслоя она была равномерной, а внутри него функция пограничного слоя $V(x)$ на каждом шаге имела бы одинаковые приращения. Подробнее алгоритм построения сетки описан в [6]. В табл. 2 приведена норма погрешности $z^h(x)$ в зависимости от способа аппроксимации производной в (3.2), причем h в (3.3)—(3.5) — последний шаг сетки. Из ана-

Таблица 2

Способ аппроксимации	ε				
	$2\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-6}$
(3.3)	$0.38\cdot10^{-1}$	$0.23\cdot10^{-1}$	$0.26\cdot10^{-1}$	$0.26\cdot10^{-1}$	$0.26\cdot10^{-1}$
(3.4)	$0.68\cdot10^{-2}$	$0.25\cdot10^{-1}$	$0.28\cdot10^{-1}$	$0.29\cdot10^{-1}$	$0.29\cdot10^{-1}$
(3.5)	$0.57\cdot10^{-2}$	$0.24\cdot10^{-1}$	$0.27\cdot10^{-1}$	$0.28\cdot10^{-1}$	$0.28\cdot10^{-1}$

Таблица 3

Схема	ε					
	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
(1.8)–(1.10)	$0.54\cdot10^{-4}$	$0.37\cdot10^{-3}$	$0.32\cdot10^{-2}$	$0.90\cdot10^{-2}$	10^{-2}	10^{-2}
Из [3]	$0.44\cdot10^{-5}$	$0.16\cdot10^{-2}$	0.15	4.4	49	500

лиза табл. 2 можно заключить, что при мельчении сетки в погранслое ($h_{N+1}<0.05\varepsilon$) улучшается аппроксимация производной в (3.2) в соответствии с (3.3) или (3.4).

Теперь рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon u''(x)+u'(x)=x, \qquad u'(0)=A/\varepsilon, \quad u(1)=0,$$

где A соответствует условию $u(0)=0$. В табл. 3 приведена норма погрешности $z^h(x)$ для схемы из [3] и схемы (1.8)–(1.10), причем Ω – равномерная сетка с $h=0.02$. Данный эксперимент подтверждает, что схема (1.8)–(1.10) сходится равномерно относительно ε.

В заключение автор искренне благодарит В. Н. Игнатьева за внимание к работе и полезные замечания.

Литература

1. *Ильин А. М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной.– Матем. заметки, 1969, т. 6, № 2, с. 237–248.
2. *Бахвалов Н. С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 4, с. 841–859.
3. *Емельянов К. В.* О разностном методе решения третьей краевой задачи для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 6, с. 1457–1465.
4. *Шишкин Г. И.* Численное решение дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных.– В кн.: Числ. методы механ. сплошной среды. Т. 12. № 4. Новосибирск: Наука, 1981, с. 135–147.
5. *Dorr F. W., Parter S. V., Shampine L. F.* Applications of the maximum principle to singular perturbation problems.– SIAM Rev., 1973, v. 15, № 1, p. 43–87.
6. *Игнатьев В. Н., Задорин А. И.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром на неравномерной сетке.– Препринт ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1980, № 229.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
8. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.– Успехи матем. наук, 1957, т. 12, № 5, с. 3–122.

Поступила в редакцию 11.X.1982
Переработанный вариант 21.IV.1983