

УДК 519.62

## О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

ЗАДОРИН А. И., ИГНАТЬЕВ В. Н.

(Омск)

Предлагается семейство монотонных разностных схем на неравномерной сетке для решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Доказывается, что при определенных условиях на коэффициенты дифференциального уравнения разностная схема является плохо обусловленной. Приведены два метода решения плохо обусловленной разностной задачи, устойчивых к ошибкам округлений.

При численном решении дифференциальных уравнений с малым параметром от разностных схем, кроме свойств аппроксимации и устойчивости, важно требовать еще и такие свойства, как монотонность и равномерная сходимости. Этим вопросам при построении разностных схем посвящены, например, работы [1], [2]. В связи с тем, что решения таких уравнений допускают области больших градиентов порядка малого параметра, необходимо вводить переменный шаг. Вопросы построения неравномерной сетки для решения уравнений погранслоного типа рассматриваются, в частности, в [3] — [5]. Особый интерес представляет случай, когда коэффициент при первой производной меняет знак. Тогда появляются внутренние погранслои и система разностных уравнений становится плохо обусловленной.

Для решения такой задачи предлагаются методы, устойчивые к ошибкам округления: метод прогонки с выделением единицы и двухпараметрический итерационный процесс. Проводится анализ выбора оптимальных итерационных параметров.

### § 1. Построение семейства монотонных разностных схем

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной:

$$(1.1) \quad Lu = \varepsilon u'' + a(x)u' - b(x)u = f(x),$$

$$(1.2) \quad u(c) = c_1, \quad u(d) = d_1.$$

Предполагаем, что  $a, b, f \in C^2[c, d]$ ,  $b(x) \geq 0$ . Пусть  $\Omega = \{x_j : x_j = x_{j-1} + h_j, j=1, 2, \dots, N+1, x_0=c, x_{N+1}=d\}$ ,  $\Omega^o = \Omega \setminus \{c, d\}$  — неравномерная сетка интервала  $[c, d]$ ,  $h_j^* = 0.5(h_j + h_{j+1})$ . Предполагаем, что  $a(x)$  может обращаться в нуль только в узлах сетки, причем если  $a(x) = 0$ , то  $a'(x) \neq 0$ .

Для дифференциальной задачи (1.1), (1.2) запишем разностную схему

$$(1.3) \quad L_h u_n^h = \varepsilon_n \lambda_{xx} u_n^h + a(x_n) \lambda_x u_n^h - b(x_n) u_n^h = f(x_n),$$

$$n=1, 2, \dots, N, \quad u_0^h = c_1, \quad u_{N+1}^h = d_1,$$

где  $\lambda_x$  и  $\lambda_{xx}$  — разностные аналоги для первой и второй производных [6]:

$$\lambda_x u_n^h = \frac{h_n^2 (u_{n+1}^h - u_n^h) + h_{n+1}^2 (u_n^h - u_{n-1}^h)}{2h_n h_{n+1} h_n^*},$$

$$\lambda_{xx} u_n^h = \frac{h_n (u_{n+1}^h - u_n^h) + h_{n+1} (u_n^h - u_{n-1}^h)}{h_n h_{n+1} h_n^*}.$$

Пусть

$$(1.4) \quad \varepsilon_n = \frac{a_n}{2} \left\{ h_{n+1}^2 a_2 \left[ \exp\left(\frac{a_1 h_n}{\varepsilon}\right) - 1 \right] + \right. \\ \left. + h_n^2 a_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{a_2 h_{n+1}}{\varepsilon}\right) \right] \right\} \left\{ h_{n+1} a_2 \left[ \exp\left(\frac{a_1 h_n}{\varepsilon}\right) - 1 \right] - \right. \\ \left. - a_1 h_n \left[ 1 - \exp\left(-\frac{a_2 h_{n+1}}{\varepsilon}\right) \right] \right\}^{-1},$$

где  $a_1 = a(x_n - \bar{a}_n)$ ,  $a_2 = a(x_n + \bar{a}_n h_n / h_{n+1})$ ,  $0 \leq \bar{a}_n \leq \min(h_n, h_{n+1})$ ,  $a_n = a(x_n)$ . В случае  $a_n = 0$ , полагая  $\theta_n = a'(x_n) \bar{a}_n h_n / \varepsilon$ , имеем

$$(1.5) \quad \varepsilon_n = \frac{a'(x_n) \bar{a}_n h_n \exp(\theta_n) - 1}{2 \exp(\theta_n) - \theta_n - 1}.$$

Исследуем свойства разностной схемы (1.3)–(1.5). Используя разложение в ряд Тейлора по  $h_n$ ,  $h_{n+1}$ ,  $\bar{a}_n$ , нетрудно получить оценку для погрешности аппроксимации данной схемы:

$$|(L_h[u]_h - (Lu)_h)_{x=x_n}| \leq M(|h_{n+1} - h_n| + h_n^{*2}), \quad x_n \in \Omega^0.$$

Теорема 1. Разностная схема (1.3)–(1.5) монотонна при любом  $\varepsilon > 0$ .

Доказательство. Схему (1.3)–(1.5) запишем в виде

$$(1.6) \quad (2\varepsilon_n h_n + a_n h_n^2) u_{n+1}^h - [2\varepsilon_n h_n + 2\varepsilon_n h_{n+1} + a_n h_n^2 - a_n h_{n+1}^2 + \\ + b_n h_n h_{n+1} (h_n + h_{n+1})] u_n^h + (2\varepsilon_n h_{n+1} - a_n h_{n+1}^2) u_{n-1}^h = \\ = f_n h_n h_{n+1} (h_n + h_{n+1}).$$

В соответствии с [6], разностная схема (1.3)–(1.5) будет монотонной, если все коэффициенты в (1.6) положительны и выполнено условие нестрогого диагонального преобладания. Проверим условия монотонности в зависимости от знака  $a_n$ . Рассмотрим сначала случай  $a_n > 0$ . Для монотонности достаточно выполнения условия

$$(1.7) \quad \varepsilon_n \geq a_n h_{n+1} / 2.$$

Проверим, что  $\varepsilon_n \geq 0$ . Это будет иметь место, если знаменатель в (1.4) положителен. Если ввести  $y = a_1 h_n / \varepsilon$ ,  $z = a_2 h_{n+1} / \varepsilon$ , то  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$  и условие положительности знаменателя сведется к неравенству  $z[\exp(y) - 1] + y[\exp(-z) - 1] > 0$ . Теперь неравенство (1.7) проверяется подстановкой  $\varepsilon_n$  из (1.4). Случай  $a_n < 0$  рассматривается аналогично. Если  $a_n = 0$ , то для монотонности достаточно выполнения условия  $\varepsilon_n \geq 0$ . Рассматривая в (1.5) различные случаи для знака  $a'(x_n)$ , убеждаемся в справедливости этого неравенства. Итак, теорема доказана.

Теорема 2. Разностная схема (1.3) устойчива, если она монотонна и выполнено одно из условий:

- 1)  $a(x)$  не меняет знака на  $[c, d]$  и  $\exists \delta > 0: |a(x)| + b(x) \geq \delta \quad \forall x \in \Omega^0$ ;  
 2)  $\exists \delta > 0: b(x) \geq \delta \quad \forall x \in \Omega^0$ .

Доказательство. Разностная схема (1.3) монотонна, поэтому для доказательства устойчивости можно воспользоваться теоремой сравнения [6]. Мажорирующую функцию ищем в виде

$$V(x) = \max\{|c_1|, |d_1|\} + g(x) \max |f(x)| / \delta.$$

Тогда

$$L_n V(x_n) = -b_n \max\{|c_1|, |d_1|\} + \max |f(x)| L_n g(x_n) / \delta, \quad x_n \in \Omega^0.$$

Для выполнения условий теоремы сравнения [6] достаточно, чтобы

$$(1.8) \quad L_n g(x) \leq -\delta, \quad x \in \Omega^0.$$

В случае 1) определим

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + (2c-1)x + d(d-2c+1) + 1, & a(x) \geq 0, \\ -x^2 + (2d+1)x + c(c-2d-1) + 1, & a(x) \leq 0. \end{cases}$$

Тогда выполнено условие (1.8) и, в соответствии с теоремой сравнения,

$$|u^h(x)| \leq V(x) \leq \max\{|c_1|, |d_1|\} + \frac{\max |f(x)|}{\delta} [(d-c)^2 + d - c + 1].$$

В случае 2) определим  $g(x) \equiv 1$ . Тогда

$$|u^h(x)| \leq \max\{|c_1|, |d_1|\} + \max |f(x)| / \delta.$$

Теорема доказана.

В [7] доказано, что схема (1.3)–(1.5) является равномерно сходящейся со скоростью  $O(h)$  в случае знакопостоянного коэффициента  $a(x)$  и равномерной сетки, при этом предполагалось  $b(x) \equiv 0$ . Заметим, что в случае равномерной сетки схема (1.3)–(1.5) переходит в схему, рассматриваемую в [1], если  $\bar{a}_n = 0$  для всех  $n$ .

## § 2. Численное решение уравнения со знакопеременным коэффициентом $a(x)$

Изучим вопросы численного решения задачи (1.1), (1.2) по различным разностным схемам на равномерной сетке. Обратимся к разностной схеме (1.3). Будем иметь схему направленных разностей, если  $\varepsilon_n = \varepsilon + |a_n| h / 2$ , и схему, предложенную в [6], если  $\varepsilon_n = \varepsilon (1 + |a_n| h / 2\varepsilon)^{-1} + |a_n| h / 2$ . Разностной схеме, рассмотренной в [1], соответствует

$$\varepsilon_n = \frac{a_n h}{2} \operatorname{cth} \left( \frac{a_n h}{2\varepsilon} \right).$$

Покажем, что при невыполнении условий теоремы 2 разностная схема (1.3) может быть плохо обусловленной. Для этого запишем схему (1.3) в матричном виде:

$$A(\varepsilon) u^h = f^h.$$

Введем число обусловленности матрицы  $A(\varepsilon)$  (см. [8]):

$$\operatorname{cond} A(\varepsilon) = \max |\lambda_j(\varepsilon)| / \min |\lambda_j(\varepsilon)|,$$

где  $\lambda_j(\varepsilon)$  – собственное значение матрицы.



Для приближенного решения  $u_n^h$  получим

$$(2.4) \quad u_n^h = \begin{cases} u_{n+1}^h, & a_n > 0, \\ \beta_n(1-\delta_n)^{-1}, & a_n < 0. \end{cases}$$

Если рассмотреть в (2.2) случай  $\exists! \tilde{x}_0 : a(\tilde{x}_0) = 0$ , причем  $a'(\tilde{x}_0) > 0$ , то реализация разностных схем с помощью метода правой прогонки не искажает существенно решения. В самом деле, точные вычисления по (2.3) и приближенные по (2.4) дают одинаковый результат:

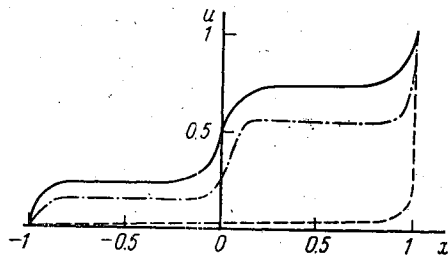
$$u_n^h = \begin{cases} c_1, & x_n < \tilde{x}_0, \\ d_1, & x_n > \tilde{x}_0, \end{cases}$$

Покажем, что в случае, когда  $a(x)$  несколько раз меняет знак, прогонка может существенно повлиять на решение. Для этого рассмотрим задачу

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon u'' + \sin(2\pi x) u' &= 0, \\ u(-1) = 0, \quad u(1) &= 1. \end{aligned}$$

Тогда из (2.4) получим, что при  $\varepsilon \rightarrow \infty$

$$u_n^h = \begin{cases} 0, & n \leq N, \\ 1, & n = N+1. \end{cases}$$



— точное решение задачи (2.5) при  $\varepsilon=0.01$ ; --- разностное решение при  $\varepsilon=0.01$ ; -·- разностное решение при  $\varepsilon=0.001$

Но анализ точного решения задачи (2.5) показывает, что скачки предельного решения имеют место в трех точках  $\{-1, 0, 1\}$ . Результаты

численных расчетов, приведенные на фигуре, подтверждают это. Во всех численных экспериментах  $N=200$ . Из табл. 1 видно, что число обусловленности катастрофически растет при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Программа расчета  $\text{cond } A(\varepsilon)$  заимствована из [11]. Итак, в случае плохо обусловленной задачи требуется метод, учитывающий влияние ошибок округления.

В [12] для реализации схемы направленных разностей, аппроксимирующей уравнение вида (2.2), предлагается метод прогонки с выделением единицы:

$$(2.6) \quad u_{n-1}^h = (1+\delta_n) u_n^h + \beta_n.$$

Этот метод существенно уменьшает влияние ошибок округления при счете прогоночных коэффициентов. Но при малых  $\varepsilon$  происходит исчезновение порядка, что влияет на результат счета. Модифицируем формулу (2.6), введя масштабирование:

$$(2.7) \quad u_{n-1}^h = [1 - \exp(\delta_n)] u_n^h + \beta_n.$$

В табл. 2 приведена среднеквадратичная погрешность различных разностных схем при разных  $\varepsilon$  при решении задачи (2.5) по методу (2.7). Анализ показал, что из всех рассматриваемых схем схема (1.3)–(1.5) с  $\bar{a}_n = h/2$  является наиболее точной.

Рассмотрим вопрос численного решения общего уравнения (1.1) в случае, когда разностная схема плохо обусловлена. Для решения разностной задачи  $Au^h(x) = f^h(x)$ ,  $x \in \Omega^0$ , рассмотрим итерационный процесс

$$(2.8) \quad \begin{aligned} [\tau(x)]^{-1} [E - \alpha(x)\lambda] [u^{m+1}(x) - u^m(x)] &= \\ = Au^m(x) - f^h(x), & \quad x \in \Omega^0. \end{aligned}$$

Таблица 1

Схема	$\varepsilon$						
	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
(1.3)–(1.5)	$0.24 \cdot 10^4$	$0.16 \cdot 10^5$	$0.69 \cdot 10^{17}$	$0.57 \cdot 10^{21}$	$0.63 \cdot 10^{21}$	—	—
из [1]	$0.25 \cdot 10^6$	$10^5$	$0.67 \cdot 10^{17}$	$0.17 \cdot 10^{21}$	$0.25 \cdot 10^{24}$	$0.28 \cdot 10^{26}$	$0.14 \cdot 10^{26}$
из [6]	$0.24 \cdot 10^4$	$0.16 \cdot 10^5$	$0.99 \cdot 10^{16}$	$0.37 \cdot 10^{20}$	$0.5 \cdot 10^{21}$	$0.13 \cdot 10^{22}$	$0.17 \cdot 10^{24}$
направленных разностей	$0.24 \cdot 10^4$	$0.15 \cdot 10^5$	$0.27 \cdot 10^{14}$	$0.3 \cdot 10^{20}$	$0.72 \cdot 10^{20}$	$0.4 \cdot 10^{24}$	$0.36 \cdot 10^{23}$

Таблица 2

Схема	$\varepsilon$					
	1	0.1	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
(1.3)–(1.5)	$0.146 \cdot 10^{-5}$	$0.743 \cdot 10^{-5}$	$0.340 \cdot 10^{-5}$	$0.136 \cdot 10^{-4}$	$0.836 \cdot 10^{-4}$	0.0...0
из [1]	$0.2934 \cdot 10^{-5}$	$0.218 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	$0.569 \cdot 10^{-3}$	$0.376 \cdot 10^{-3}$	0.0...0
из [6]	$0.282 \cdot 10^{-5}$	$0.288 \cdot 10^{-4}$	$0.237 \cdot 10^{-3}$	$0.638 \cdot 10^{-3}$	$0.835 \cdot 10^{-3}$	$0.174 \cdot 10^{-4}$
направленных разностей	$0.345 \cdot 10^{-4}$	$0.176 \cdot 10^{-2}$	$0.302 \cdot 10^{-2}$	$0.443 \cdot 10^{-2}$	$0.413 \cdot 10^{-2}$	$0.55 \cdot 10^{-2}$

где  $\alpha(x)$ ,  $\tau(x)$  – итерационные параметры,  $\lambda$  – разностный аналог второй производной:

$$\lambda u^h(x) = [u^h(x+h) - 2u^h(x) + u^h(x-h)] / h^2.$$

Заметим, что на каждой итерации система разностных уравнений является хорошо обусловленной.

Сначала остановимся на дифференциальном уравнении

$$\varepsilon u'' + a(x)u' = f(x).$$

Проведем гармонический анализ сходимости итерационного процесса (2.8). Пусть ошибка на нулевой итерации задается в виде  $\varepsilon^{(0)}(x) = \exp(i\varphi x)$ , тогда  $\varepsilon^{(m+1)}(x_n) = \rho(z) \varepsilon^{(m)}(x_n)$ , где для схемы (1.3)

$$|\rho(z)|^2 = \left(1 - \frac{4\tau_n \varepsilon_n z}{4\alpha_n z + h^2}\right)^2 + \frac{4a_n^2 h^2 \tau_n^2 z(1-z)}{(4\alpha_n z + h^2)^2},$$

$$z = \sin^2 \frac{h\varphi}{2}.$$

Условие устойчивости процесса  $|\rho| \leq 1$  будет выполнено, если

$$\tau_n \leq \frac{2\varepsilon_n}{a_n^2}, \quad \alpha_n \geq \frac{\tau_n \varepsilon_n}{2} - \frac{a_n^2 \tau_n h^2}{8\varepsilon_n}.$$

Теперь минимизируем  $|\rho|$  по  $\alpha$  и  $\tau$ . Вводя  $y = \tau_n / (4\alpha_n z + h^2)$ , получаем

$$|\rho(z)|^2 = [16\varepsilon_n^2 z^2 + 4a_n^2 z(1-z)h^2] y^2 - 8\varepsilon_n z y + 1.$$

Из условия минимума квадратного трехчлена относительно  $y$  имеем

$$\alpha_n = \tau_n \varepsilon_n - \frac{h^2}{4z} \left(1 - \frac{a_n^2 \tau_n}{\varepsilon_n}\right) - \frac{a_n^2 \tau_n h^2}{4\varepsilon_n}.$$

Выбираем  $\tau_n$  из условия, чтобы параметр  $\alpha_n$  не зависел от  $z$ :

$$(2.9) \quad \tau_n = \varepsilon_n / a_n^2, \quad \alpha_n = \tau_n \varepsilon_n - h^2 / 4.$$

При выбранных параметрах  $\tau_n$  и  $\alpha_n$  из (2.9) получим

$$|\rho(\varphi)|^2 = \frac{\cos^2(h\varphi/2)}{\cos^2(h\varphi/2) + [2\varepsilon_n/a_n h]^2 \sin^2(h\varphi/2)}.$$

Так как для всех рассматриваемых выше схем  $\varepsilon_n \geq |a_n| h/2$ , то

$$(2.10) \quad |\rho(\varphi)| \leq \left| \cos \frac{h\varphi}{2} \right|.$$

Теперь получим оценку скорости сходимости итерационного процесса. Представим начальную ошибку в виде дискретного ряда Фурье:

$$\varepsilon^{(0)}(x) = \sum_{k=1}^N c_k^{(0)} \exp(i\varphi_k x), \quad \text{где} \quad \frac{\varphi_k h}{2} = -\frac{\pi k}{N+1}.$$

Пусть  $|c_k^{(0)}| \leq q$  для всех  $k$ . Определим норму начальной ошибки:

$$\|\varepsilon^{(0)}\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N c_k^{(0)2}.$$

Ясно, что  $\|\varepsilon^{(0)}\| \leq q$ . Определим теперь норму ошибки на произвольной  $m$ -й итерации. Пусть

$$\varepsilon^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^N c_k^{(m)} \exp(i\varphi_k x),$$

тогда, в соответствии с (2.10),

$$|c_k^{(m)}|^2 \leq |c_k^{(0)}|^2 \cos^{2m} \frac{\pi k}{N+1},$$

следовательно,

$$\|\varepsilon^{(m)}\|^2 \leq q^2 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos^{2m} \frac{\pi k}{N+1}.$$

В соответствии с [13, с. 640],

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \cos^{2m} \frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{2m+1}} C_{2m}^m - \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad m < n.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^N \cos^{2m} \frac{\pi k}{N+1} = 2 \sum_{k=1}^{[(N+1)/2]} \cos^{2m} \frac{\pi k}{N+1},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^{(m)}\|^2 &\leq q^2 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos^{2m} \frac{\pi k}{N+1} = \frac{q^2}{N} \left( \frac{N}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} - 1 \right) < \\ &< q^2 \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} = q^2 \prod_{k=1}^m \frac{2k-1}{2k}. \end{aligned}$$

Итак, норма ошибки на произвольной  $m$ -й итерации ( $m < N+1$ ) имеет оценку

$$(2.11) \quad \|\varepsilon^{(m)}\| < q \left( \prod_{k=1}^m \frac{2k-1}{2k} \right)^{1/2},$$

при больших  $m$

$$\prod_{k=1}^m \frac{2k-1}{2k} \sim (\pi m)^{-1/2}.$$

Заметим, что от исходной матрицы  $A(\varepsilon)$  не требуется самосопряженности и скорость сходимости итерационного процесса не зависит от ее обусловленности.

Теперь рассмотрим полное уравнение (1.1). Для него

$$|\rho(z)|^2 = [(h^2 + 4\alpha_n z - 4\tau_n \varepsilon_n z - b_n \tau_n h^2)^2 + 4a_n^2 \tau_n^2 z(1-z)h^2] (h^2 + 4\alpha_n z)^{-2}.$$

Введем  $\theta_n = \varepsilon_n b_n / a_n^2$ . Выбор итерационных параметров будем осуществлять в зависимости от значения  $\theta_n$ .

Пусть  $\theta_n \leq 1/2$ . Параметры  $\alpha_n$  и  $\tau_n$  возьмем те же, что и в случае  $b(x) \equiv 0$ : из (2.9). Тогда

$$|\rho(z)|^2 = |\rho_0(z)|^2 + [b_n^2 \tau_n^2 - 2(1-z)b_n \tau_n] \left( 1 - z + \frac{4\tau_n \varepsilon_n z}{h^2} \right)^{-2},$$

где  $\rho_0(z)$  соответствует случаю  $b(x) \equiv 0$ . Так как  $\varepsilon_n \geq |a_n| h/2$ , то  $|\rho(z)|^2 \leq (1-z)(1-2\theta_n) + \theta_n^2$ . Коэффициент  $b(x)$  будет усиливать подавление тех гармоник, для которых  $z \leq 1 - \theta_n/2$ . Если же  $z \geq 1 - \theta_n/2$ , то  $|\rho(z)| \leq 1/2$  и такие гармоники не нарушают оценки (2.11).

Пусть  $\theta_n \geq 1/2$ . Выберем  $\tau_n$  и  $\alpha_n$  из условия  $\operatorname{Re} \rho(z) = 0$ :

$$\tau_n = 1/b_n, \quad \alpha_n = \tau_n \varepsilon_n.$$

Тогда

$$|\rho(z)|^2 = \frac{4a_n^2 z(1-z)h^2}{b_n^2 (h^2 + 4\varepsilon_n z/b_n)^2} \leq \frac{4a_n^2 b_n z(1-z)h^2}{8b_n^2 \varepsilon_n z h^2} \leq 1-z.$$

Итак, в этом случае  $|\rho(z)|^2 \leq \cos^2(\varphi h/2)$ . Рассмотрим теперь случай  $a_n = b_n = 0$ . Тогда

$$|\rho(z)| = |(h^2 + 4\alpha_n z - 4\tau_n \varepsilon_n z) (h^2 + 4\alpha_n z)^{-1}|.$$

Если выбрать  $\alpha_n = \tau_n \varepsilon_n - h^2/4$ ,  $\tau_n \geq h^2/4\varepsilon_n$ , то  $|\rho(z)| \leq \cos^2(\varphi h/2)$ .

Итак, при ненулевом коэффициенте  $b(x)$  для итерационного процесса (2.8) остается справедливой оценка (2.11).

При решении задачи (2.5) с помощью итерационного процесса (2.8) в зависимости от нулевой итерации приходим к различным полочкам, сглаженным на концах погранслошной функцией. Дело в том, что если  $A(\varepsilon)u^n = f^n$  и  $\|f^n - f^h\|_c \leq \Delta$ , то, в силу плохой обусловленности матрицы  $A$ , малость величины  $\Delta$  не означает, что  $\|u^h - u^n\|_c$  мало. Чтобы обойти эту трудность, воспользуемся экстраполяционным по  $\varepsilon$  методом решения. Для заданного  $\varepsilon > 0$  выберем последовательность  $\varepsilon_0 > \dots > \varepsilon_k = \varepsilon$ , так чтобы матрица  $A(\varepsilon_0)$  была хорошо обусловленной. Далее для каждого  $\varepsilon_i$  решим исходную задачу с помощью итерационного процесса (2.8), причем в качестве нулевого приближения зададим решение с предыдущего шага по  $\varepsilon$ . Численные эксперименты, соответствующие такой последовательности



Таблица 3

Метод	$\varepsilon$				
	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Точное решение	0.014091	0.049081	0.14289	0.246877	0.250...0
Выделение единицы	0.014097	0.049212	0.14607	0.249532	0.250...0
Итерационный метод	0.014216	0.049212	0.14607	0.249532	0.250...0
Количество итераций	118	39	13	9	9

действий, дали удовлетворительные результаты. Результаты численного решения задачи (2.5) при различных  $\varepsilon$  с помощью прогонки с выделением единицы и итерационного процесса (2.8) в точке  $x = -1 + h$  приведены в табл. 3. Здесь же приведена зависимость количества итераций от  $\varepsilon$ , когда начальное приближение при каждом  $\varepsilon$  задавалось близким к предельному по  $\varepsilon$  решению:

$$u_j^0 = \begin{cases} 0.25, & x_j < 0, \\ 0.75, & x_j \geq 0. \end{cases}$$

Итерации заканчивались, если  $\max_j |u_j^n - u_j^{n-1}| \leq 10^{-5}$ .

Расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1033 с удвоенной точностью.

В заключение авторы благодарят Н. Н. Яненко за внимание к работе.

#### Литература

1. Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной.— Матем. заметки, 1969, т. 6, № 2, с. 237–248.
2. Miller J. J. Sufficient conditions for the convergence, uniformly in  $\varepsilon$ , of a three point difference scheme for singular perturbation problem.— Lect. Notes Math., 1978, v. 679, p. 85–91.
3. Бахвалов Н. С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 4, с. 841–859.
4. Игнатьев В. Н., Задорин А. И. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром на неравномерной сетке.— Препринт ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1980, № 229.
5. Pearson C. E. On differential equation of boundary layer type.— J. Math. Phys., 1968, № 47, p. 134–154.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
7. Игнатьев В. Н., Задорин А. И. О плохой обусловленности при численном решении уравнений с малым параметром.— Препринт ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1981, № 84.
8. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
9. Уилкинсон Д. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
10. Гуцин В. А., Щенников В. В. Об одной монотонной разностной схеме второго порядка точности.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 3, с. 789–792.
11. Форсайт Д., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.
12. Dorr F. An example of ill-conditioning in the numerical solution of singular perturbation problems.— Math. Comput., 1971, v. 25, № 114, p. 271–283.
13. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 8.VI.1981  
Переработанный вариант 29.VI.1982