УДК 519.62

А. И. Задорин, С. В. Тиховская

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ*

Рассматривается задача Коши для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. На основе сформулированного принципа максимума для начальной задачи проведена оценка решения и производных. Построена схема экспоненциальной подгонки, обобщающая известную схему А. М. Ильина на случай начальной задачи, и обоснована ее равномерная сходимость с первым порядком точности. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение второго порядка, сингулярное возмущение, задача Коши, разностная схема, принцип максимума, схема экспоненциальной подгонки, равномерная сходимость.

Введение

Вопросы построения и обоснования разностных схем для сингулярно возмущенных краевых задач в случае обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка рассматривались в целом ряде работ. Определено два основных подхода для достижения равномерной сходимости разностной схемы: сгущение сетки в пограничном слое [1–3] и подгонка разностной схемы к погранслойной составляющей решения [4]. Для начальных сингулярно возмущенных задач вопрос построения и обоснования разностных схем исследован намного меньше. Имеются работы по построению равномерно сходящихся схем в случае сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнений первого порядка и систем таких уравнений, например [5].

Целью работы является построение и обоснование разностной схемы на равномерной сетке для сингулярно возмущенной задачи Коши в случае обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Итак, рассмотрим сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$\begin{aligned} &Lu(x) = \varepsilon\, u''(x) + a(x)\, u'(x) - b(x)\, u(x) = f(x), \quad 0 < x \leqslant X, \\ &u(0) = A, \quad u'(0) = \frac{B}{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B — некоторые постоянные. Предполагаем, что

$$0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad a(x) \geqslant \alpha > 0, \quad \beta \geqslant b(x) \geqslant 0, \quad a,\ b,\ f \in C^2[0,1]. \tag{2}$$

Обозначения. Всюду в работе под C и C_i, $i \geqslant 0$, будем понимать положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов сетки. Определим нормы функции непрерывного

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проектов 10-01-00726, 11-01-00875).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 3. С. 114–122

аргумента $\|u\| = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant X} |u(x)|$ и сеточной функции $\|u^h\|_h = \max\limits_n |u_n^h|$. Пусть $[u]$ — проекция функции непрерывного аргумента $u(x)$ на сетку.

1. Анализ дифференциальной задачи

Для задачи (1) сформулируем принцип максимума, в справедливости которого легко убедиться, рассуждая от противного.

Лемма 1. *Пусть $\Psi(x) \in C^2[0,\, 1]$. Тогда из условий*

$$\Psi(0) \geqslant 0,\ \Psi'(0) \geqslant 0,\ L\Psi(x) \geqslant 0, \quad x \in (\,0,\, X\,], \tag{3}$$

следует, что $\Psi(x) \geqslant 0$, $x \in [\,0,\, X\,]$.

Обозначим

$$m_{ab} = \min_{0\leqslant x\leqslant X} [\,a(x) - b(x)x\,].$$

Лемма 2. *Пусть $m_{ab} > 0$. Тогда справедлива оценка устойчивости*

$$|u(x)| \leqslant |A| + \frac{|B|}{\alpha} + \frac{X}{m_{ab}} \left(\beta\,|A| + \frac{\beta\,|B|}{\alpha} + \|f\| \right), \quad 0 \leqslant x \leqslant X. \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим

$$\Psi(x) = |A| + \frac{|B|}{\alpha} + \left(\beta\,|A| + \frac{\beta\,|B|}{\alpha} + \|f\| \right) \frac{x}{m_{ab}} - \frac{|B|}{\alpha}\, e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \pm u(x).$$

Несложно убедиться, что выполнены условия принципа максимума (3), и в силу леммы 1 верно $\Psi(x) \geqslant 0, \quad x \in [\,0\,,\, X\,]$, откуда следует утверждение леммы.

□

Оценим производные решения задачи (1).

Лемма 3. *Пусть выполнено $m_{ab} > 0$. Тогда найдется постоянная C_0:*

$$|u^{(j)}(x)| \leqslant C_0 (1 + \frac{1}{\varepsilon^j}\, e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}), \quad x \in [\,0\,,\, X\,], \quad j = 1, 2, 3. \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение леммы при $j = 1$. Уравнение (1) представим в виде

$$\left(\varepsilon u'(x)\, e^{\int\limits_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon}\,ds} \right)' = \Big(f(x) + b(x)u(x) \Big)\, e^{\int\limits_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon}\,ds}.$$

Интегрируя это равенство от 0 до x и учитывая начальное условие, получим

$$u'(x) = \frac{B}{\varepsilon}\, e^{-\int\limits_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon} ds} + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^x [\,f(s) + b(s)u(s)\,]\, e^{-\int\limits_s^x \frac{a(t)}{\varepsilon} dt} ds. \tag{6}$$

В соответствии с (4) функция $u(s)$ под интегралом в (6) ограничена. Следовательно,

$$|u'(x)| \leqslant \frac{|B|}{\varepsilon}\, e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{C_1}{\varepsilon} \int\limits_0^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-s)} ds \leqslant \frac{|B|}{\varepsilon}\, e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{C_1}{\alpha},$$

что доказывает (5) при $j = 1$.

Пусть $j = 2$. Дифференцируя уравнение (1), получим

$$\varepsilon u'''(x) + a(x)u''(x) = b'(x)u(x) + b(x)u'(x) + f'(x) - a'(x)u'(x).$$

По аналогии с тем, как было получено представление (6), получим

$$u''(x) = u''(0)\, e^{-\int\limits_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon} ds} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x [f'(s) + b(s)u'(s) + b'(s)u(s) - a'(s)u'(s)]\, e^{-\int\limits_s^x \frac{a(t)}{\varepsilon} dt} ds. \quad (7)$$

Из доказанной оценки (5) при $j = 1$ и уравнения (1) для некоторой постоянной C получим $|u''(\varepsilon)| \leqslant C/\varepsilon^2$. Выражая $u''(0)$ из (7) при $x = \varepsilon$, приходим к оценке $|u''(0)| \leqslant C_2/\varepsilon^2$.

Теперь, используя представление (7), получим оценку (5) при $j = 2$.

Случай $j = 3$ рассматривается аналогично. Лемма доказана. □

В соответствии с леммой 3 решение задачи Коши (1) при малых ε имеет погранслойный рост в окрестности начальной точки $x = 0$.

Выделим погранслойную составляющую в решении $u(x)$, пусть

$$u(x) = V(x) + p(x), \qquad V(x) = V_0\, e^{-\frac{a_0 x}{\varepsilon}}, \qquad V_0 = -\frac{B}{a_0}, \qquad a_0 = a(0). \quad (8)$$

Покажем, что $V(x)$ задает основной рост решения в погранслое.

Лемма 4. *Пусть $m_{ab} > 0$. Тогда найдется постоянная C_3:*

$$|p^{(j)}(x)| \leqslant C_3\,(1 + \varepsilon^{1-j}\, e^{-\frac{\alpha\, x}{2\, \varepsilon}}), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad j = 1, 2, 3. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим оценку (9) при $j = 1$. Уравнение на $p(x)$ имеет вид

$$\varepsilon p''(x) + a(x)p'(x) = F(x) + b(x)p(x), \quad (10)$$

где

$$F(x) = f(x) - \varepsilon V''(x) - a(x)V'(x) + b(x)V(x).$$

Учитывая, что $p'(0) = 0$, и используя (10), получим

$$p'(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x [F(s) + b(s)p(s)]\, e^{-\int\limits_s^x \frac{a(t)}{\varepsilon} dt} ds.$$

Учитывая равномерную ограниченность $F(s)$, условия (2) и интегрируя, получим оценку (9) при $j = 1$.

Остановимся на случае $j = 2$. По аналогии с оцениванием $|u''(0)|$ в лемме 3, можно показать, что $|p''(0)| \leqslant C_4/\varepsilon$. Дифференцируя уравнение (10), получим дифференциальное уравнение второго порядка на $p'(x)$, из которого можно выразить $p''(x)$:

$$p''(x) = p''(0)\, e^{-\int\limits_0^x \frac{a(t)}{\varepsilon} dt} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x \Big(F'(s) - a'(s)p'(s) + b'(x)p(x) + b(x)p'(x)\Big)\, e^{-\int\limits_s^x \frac{a(t)}{\varepsilon} dt} ds.$$

С учетом представления для $F(x)$ из полученного выражения для $p''(x)$ следует оценка (9) при $j = 2$.

Аналогично рассматривается случай $j = 3$, что доказывает лемму. □

2. Построение и анализ разностной схемы

Для того чтобы провести анализ точности разностной схемы в случае задачи Коши, необходимо сформулировать некоторый аналог принципа максимума, хорошо известного в случае краевой задачи.

Рассмотрим трехточечную разностную схему для задачи Коши:

$$
\begin{gathered}
L_n^h u^h = A_n\, u_{n-1}^h - B_n\, u_n^h + D_n\, u_{n+1}^h = F_n, \\
u_0^h = A, \quad \frac{u_1^h - u_0^h}{h} = G, \quad 1 \leqslant n < N,
\end{gathered}
\tag{11}
$$

где N — число интервалов сетки Ω^h исходного интервала $[\,0\,,\,X]$, и A, G — некоторые постоянные. Предполагаем, что $B_n \geqslant A_n + D_n$, $A_n > 0$, $D_n > 0$.

Принцип максимума для анализа разностных схем в случае краевых задач используется в ряде работ, например [6]. Сформулируем принцип максимума для начальной задачи (11).

Лемма 5. *Из условий*

$$
\Psi_0^h \geqslant 0, \quad \Psi_1^h - \Psi_0^h \geqslant 0, \quad L_n^h \Psi^h \geqslant 0, \qquad \text{для} \quad n = 1,\, 2,\, \dots\,,\, N-1 \tag{12}
$$

следует, что $\Psi_n^h \geqslant 0$, $n = 0,\, 1,\, \dots,\, N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\exists\, m: \quad \Psi_m^h < 0$, тогда в некотором узле с номером $m_0 < m$ достигается положительный максимум сеточной функции Ψ^h, тогда

$$
L_{m_0}^h \Psi^h = A_{m_0}(\Psi_{m_0-1}^h - \Psi_{m_0}^h) - (B_{m_0} - A_{m_0} - D_{m_0})\Psi_{m_0}^h + D_{m_0}(\Psi_{m_0+1}^h - \Psi_{m_0}^h),
$$

откуда с учетом ограничений на коэффициенты разностной схемы получим $L_{m_0}^h \Psi^h < 0$, что противоречит одному из условий леммы. □

Покажем, что в случае произвольной равномерной сетки схема направленных разностей для задачи (1) не обладает свойством сходимости при малых значениях параметра ε. Выпишем эту схему для задачи (1):

$$
\begin{gathered}
\varepsilon\, \frac{u_{n+1}^h - 2\, u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} + a_n\, \frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{h} - b_n\, u_n^h = f_n, \\
u_0^h = A, \qquad \frac{u_1^h - u_0^h}{h} = \frac{B}{\varepsilon},
\end{gathered}
\tag{13}
$$

где $a_n = a(x_n)$, $b_n = b(x_n)$, $f_n = f(x_n)$.

Из начальных условий следует $u_1^h = A + Bh/\varepsilon$, поэтому решение схемы (13) не ограничено равномерно по параметру ε, в то время как решение задачи (1) равномерно ограничено. Следовательно, схема (13) не обладает свойством сходимости при малых значениях ε.

Можно показать, что и схема центральных разностей не обладает свойством равномерной сходимости.

Итак, возникает необходимость в построении равномерно сходящейся разностной схемы для решения задачи (1). По аналогии с [4] потребуем, чтобы разностная схема была точна на функции пограничного слоя. Зададим аппроксимацию производной в начальном условии (1), точную на погранслойной составляющей $V(x)$:

$$u'(0) \approx \frac{\tau}{1-e^{-\tau}} \frac{u_1 - u_0}{h}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{a_0 h}{\varepsilon}\,. \tag{14}$$

Проведем обоснование аппроксимации (14) .

Лемма 6. *Пусть $m_{ab} > 0$, $u(x)$ — решение задачи* (1) *. Тогда* $\exists\, C_5$:

$$\varepsilon \left| u'(0) - \frac{\tau}{1-e^{-\tau}} \frac{u(h) - u(0)}{h} \right| \leqslant C_5 h.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся представлением (8), оценками производных (9) и получим

$$\varepsilon \left| u'(0) - \frac{\tau}{1-e^{-\tau}} \frac{u(h) - u(0)}{h} \right| = \varepsilon \left| p'(0) - \frac{\tau}{1-e^{-\tau}} \frac{p(h) - p(0)}{h} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left| p'(0) - \frac{p(h) - p(0)}{h} \right| + \varepsilon \Big(\frac{\tau}{1-e^{-\tau}} - 1 \Big) \left| \frac{p(h) - p(0)}{h} \right| \leqslant \varepsilon \frac{\|p''\| h}{2} + 2\varepsilon\tau \|p'\| \leqslant C_5 h.$$

Лемма доказана. □

С учетом (14) выпишем разностную схему для задачи (1):

$$\begin{aligned} &L_n^h u^h = \varepsilon_n \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} + a_n \frac{u_{n+1}^h - u_{n-1}^h}{2h} - b_n u_n^h = f_n, \\ &u_0^h = A, \qquad u_1^h - u_0^h = \frac{B}{a_0} \left(1 - e^{-\frac{a_0 h}{\varepsilon}} \right), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{a_n h}{2} \operatorname{cth} \frac{a_n h}{2\varepsilon}.$$

Схема (15) является обобщением известной схемы А. М. Ильина [4] на случай начальной задачи (1). Докажем равномерную сходимость схемы (15).

Теорема 1. *Пусть выполнено $m_{ab} > 0$. Тогда найдется $C > 0$:*

$$|u(x_n) - u_n^h| \leqslant Ch, \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z^h = u^h - [u]$. В соответствии с леммами 3 , 4 для производных функций $u(x)$ и $p(x)$ справедливы оценки, подобные тем, которые имеют место в случае краевой задачи для уравнения (1). Поэтому оценку $|L_n^h z^h|$ можно провести по аналогии с тем, как это делалось в [7] для краевой задачи. Тогда для некоторой постоянной C_6 получим

$$|\, L_n^h z^h \,| \leqslant C_6 \left(h + \frac{h}{h+\varepsilon}\, e^{-\frac{\alpha\, x_{n-1}}{2\,\varepsilon}} \right), \quad 0 < n < N. \tag{16}$$

Полученная оценка погрешности аппроксимации не является порядка $O(h)$ равномерной по параметру ε. Покажем, что равномерная сходимость схемы со скоростью $O(h)$ при этом имеется.

Определим сеточную функцию Φ^h:

$$\Phi^h_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ e^{-\frac{\alpha x_{n-1}}{2\varepsilon}}, & n = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Тогда для $n = 1$ получим

$$L^h_1 \Phi^h = -\frac{a_1}{2h}(1 - e^{-\frac{\alpha h}{2\varepsilon}}) \left(1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)\right) - b_1 \leqslant -\frac{\alpha}{h}. \tag{17}$$

В случае $1 < n < N$ выполнено

$$L^h_n \Phi^h \leqslant \frac{a_n \Phi^h_n}{2h} \left(4 \operatorname{cth}\left(\frac{a_n h}{2\,\varepsilon}\right) \operatorname{sh}^2\left(\frac{\alpha h}{2\,\varepsilon}\right) - 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha h}{2\,\varepsilon}\right)\right) \leqslant -\frac{\alpha}{h} \operatorname{th}\left(\frac{\alpha h}{4\,\varepsilon}\right) \Phi^h_n.$$

Следовательно, при $1 < n < N$ имеет место оценка

$$L^h_n \Phi^h \leqslant -\frac{C_7}{h + \varepsilon} \Phi^h_n. \tag{18}$$

Несложно показать, что

$$z^h_0 = 0, \qquad z^h_1 - z^h_0 = \varepsilon \frac{1 - e^{-\tau}}{a_0} \left(u'(0) - \frac{\tau}{1 - e^{-\tau}} \frac{u(h) - u(0)}{h}\right). \tag{19}$$

Используя лемму 6, из (19) получим

$$|z^h_1 - z^h_0| \leqslant C_8 h. \tag{20}$$

Определим сеточную функцию Ψ^h:

$$\Psi^h_n = \begin{cases} C_9 h \left(1 - \Phi^h_n\right) + C_{10} h\, x_n \pm z^h_n, & n = 0, \\ C_9 h \left(2 - \Phi^h_n\right) + C_{10} h\, x_n \pm z^h_n, & n = 1, \dots, N, \end{cases} \tag{21}$$

где C_9, C_{10} — некоторые положительные постоянные, ограничения на которые зададим ниже.

Учитывая, что $z^h_0 = 0$ и (20), при $C_9 \geqslant C_8$ получим:

$$\Psi^h_0 = 0, \qquad \Psi^h_1 - \Psi^h_0 = C_9 h + C_{10} h^2 \pm (z^h_1 - z^h_0) \geqslant 0,$$

В соответствие с оценками (16), (18) для $n = 2, 3, \dots, N - 1$ верно

$$\begin{gathered} L^h_n \Psi^h = -2\, C_9 h\, b_n + (a_n - b_n x_n)\, C_{10} h - C_9 h\, L^h_n \Phi^h \pm L^h_n z^h \geqslant -2\, C_9 \beta h + m_{ab}\, C_{10} h + \\ + \frac{C_7 C_9 h}{h + \varepsilon}\, e^{-\frac{\alpha x_{n-1}}{2\varepsilon}} - C_6 h - \frac{C_6 h}{h + \varepsilon}\, e^{-\frac{\alpha x_{n-1}}{2\varepsilon}} \geqslant \Big(m_{ab}\, C_{10} - (2\,\beta\, C_9 + C_6)\Big) h + \\ + (C_7\, C_9 - C_6) \frac{h}{h + \varepsilon}\, e^{-\frac{\alpha x_{n-1}}{2\varepsilon}} \geqslant 0 \end{gathered}$$

при $C_9 \geqslant C_6 / C_7$, $\quad C_{10} \geqslant (2\,\beta\, C_9 + C_6)/m_{ab}$.

Осталось добиться выполнения условия $L^h_1 \Psi^h \geqslant 0$. Используя оценки (16), (17), получим

$$\begin{aligned} L^h_1 \Psi^h &= -2\, C_9 h\, b_1 + C_{10} h\, a_1 - C_{10} h\, b_1 x_1 - C_9 h\, L^h_1 \Phi^h \pm L^h_1 z^h \geqslant \\ &\geqslant -2\, C_9 h\, \beta + (a_1 - b_1 x_1)\, C_{10} h + \alpha\, C_9 - C_6 h - \frac{C_6 h}{h + \varepsilon} \geqslant \\ &\geqslant \Big(m_{ab} C_{10} - (2\,\beta\, C_9 + C_6)\Big) h + (\alpha\, C_9 - C_6) \geqslant 0 \end{aligned}$$

при $C_9 \geqslant C_6 / \alpha$, $\quad C_{10} \geqslant (2\,\beta\, C_9 + C_6)/m_{ab}$.

Итак, для функции Ψ^h из (21) выполнены условия (12), следовательно, в силу принципа максимума при всех n верно $\Psi^h_n \geqslant 0$, что доказывает теорему. □

3. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\, u''(x) + \alpha\, u'(x) - \beta\, u(x) = e^x, \\ &u(0) = 1, \quad u'(0) = \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{22}$$

Решение задачи (22) находилось в явном виде.

Погрешность схемы (15) вычисляем по формуле:

$$\Delta_h = \max_{0 \leqslant n \leqslant N} |u(x_n) - u_n^h|, \qquad Nh = 1.$$

Остановимся на результатах численных экспериментов. Пусть $\alpha = 3$, $\beta = 1$, при этом $m_{ab} = 2 > 0$.

В табл. 1 представлена погрешность Δ_h в зависимости от ε и h. Данные табл. 1 подтверждают равномерную сходимость схемы (15) со скоростью $O(h)$, что соответствует теореме 1.

Таблица 1. Погрешность схемы экспоненциальной подгонки при $\alpha = 3$, $\beta = 1$

ε	N							
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	5.31e–2	2.47e–2	1.19e–2	5.83e–3	2.88e–3	1.43e–3	7.15e–4	3.57e–4
2^{-3}	1.16e–1	4.51e–2	1.85e–2	8.15e–3	3.80e–3	1.83e–3	8.98e–4	4.45e–4
2^{-4}	1.49e–1	5.97e–2	2.30e–2	9.39e–3	4.14e–3	1.93e–3	9.30e–4	4.56e–4
2^{-5}	1.72e–1	7.66e–2	3.03e–2	1.16e–2	4.74e–3	2.09e–3	9.73e–4	4.69e–4
2^{-6}	1.84e–1	8.83e–2	3.88e–2	1.52e–2	5.83e–3	2.38e–3	1.05e–3	4.88e–4
2^{-7}	1.90e–1	9.44e–2	4.47e–2	1.95e–2	7.65e–3	2.92e–3	1.19e–3	5.25e–4
2^{-8}	1.94e–1	9.75e–2	4.78e–2	2.25e–2	9.80e–3	3.83e–3	1.46e–3	5.97e–4
2^{-9}	1.95e–1	9.90e–2	4.93e–2	2.40e–2	1.13e–2	4.91e–3	1.92e–3	7.32e–4
2^{-10}	1.96e–1	9.98e–2	5.01e–2	2.48e–2	1.21e–2	5.65e–3	2.46e–3	9.59e–4
2^{-14}	1.97e–1	1.01e–1	5.08e–2	2.55e–2	1.28e–2	6.37e–3	3.17e–3	1.56e–3
2^{-18}	1.97e–1	1.01e–1	5.08e–2	2.56e–2	1.28e–2	6.42e–3	3.21e–3	1.60e–3

Покажем, что точность схемы (15) можно повысить на основе метода Ричардсона [8]. Учитывая, что погрешность этой схемы порядка $O(h)$, и устраняя эту погрешность, получим комбинацию решений на сетках с шагом h и $h/2$:

$$\widetilde{u}^h = 2\, u^{h/2} - u^h. \tag{23}$$

В табл. 2 представлена погрешность Δ_h для комбинации $\widetilde{u}^h$ из (23). Из табл. 2 следует, что точность схемы (15) повысилась и почти при всех значениях ε и h стала порядка $O(h^2)$.

Заметим, что численные эксперименты и на других примерах показали, что схема (15) обладает точностью $O(h)$ и порядок точности повышается с применением формулы (23).

Таблица 2. Погрешность комбинации для схемы экспоненциальной подгонки при $\alpha = 3$, $\beta = 1$

ε	N							
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	3.66e–3	9.35e–4	2.36e–4	5.91e–5	1.48e–5	3.70e–6	9.27e–7	2.32e–7
2^{-3}	2.60e–2	8.15e–3	2.17e–3	5.54e–4	1.39e–4	3.49e–5	8.72e–6	2.18e–6
2^{-4}	2.99e–2	1.37e–2	4.20e–3	1.11e–3	2.82e–4	7.08e–5	1.77e–5	4.43e–6
2^{-5}	1.91e–2	1.61e–2	7.07e–3	2.13e–3	5.61e–4	1.42e–4	3.57e–5	8.93e–6
2^{-6}	7.70e–3	1.07e–2	8.32e–3	3.58e–3	1.07e–3	2.82e–4	7.14e–5	1.79e–5
2^{-7}	1.61e–3	4.96e–3	5.65e–3	4.23e–3	1.80e–3	5.39e–4	1.41e–4	3.58e–5
2^{-8}	1.44e–3	1.90e–3	2.77e–3	2.90e–3	2.14e–3	9.06e–4	2.70e–4	7.08e–5
2^{-9}	2.98e–3	3.71e–4	1.24e–3	1.46e–3	1.47e–3	1.07e–3	4.54e–4	1.35e–4
2^{-10}	3.75e–3	3.96e–4	4.73e–4	6.94e–4	7.50e–4	7.41e–4	5.37e–4	2.27e–4
2^{-14}	4.47e–3	1.12e–3	2.48e–4	2.65e–5	2.93e–5	4.34e–5	4.69e–5	4.78e–5
2^{-18}	4.51e–3	1.16e–3	2.93e–4	7.16e–5	1.57e–5	1.69e–6	1.83e–6	2.71e–6

Список литературы

1. *Бахвалов Н. С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–890.

2. *Шишкин Г. И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург, 1992.

3. *Miller J. J. H., O'Riordan E., Shishkin G. I.* Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions. Singapore: World Scientific, 1996.

4. *Ильин А. М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Математические заметки. 1969. Т. 6, № 2. С. 237–248.

5. *Дулан Э., Миллер Д., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.

6. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

7. *Kellog R. B., Tsan A.* Analysis of Some Difference Approximations for a Singular Perturbation Problem without Turning Points // Mathematics of Computation. 1978. Vol. 32. No. 144. P. 1025–1039.

8. *Марчук Г. И., Шайдуров В. В.* Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.

Материал поступил в редколлегию 09.05.2010

Адреса авторов

ЗАДОРИН Александр Иванович
Омский филиал института им. С. Л. Соболева СО РАН
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия
e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

ТИХОВСКАЯ Светлана Валерьевна
Омский филиал института им. С. Л. Соболева СО РАН
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия
e-mail: s.tihovskaya@yandex.ru