Анализ разностной схемы для сингулярно возмущенной задачи Коши на сгущающейся сетке*

А.И. Задорин, С.В. Тиховская

УДК 519.62

Задорин А.И., Тиховская С.В. Анализ разностной схемы для сингулярно возмущенной задачи Коши на сгущающейся сетке // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2011. — Т. 14, № 1. — С. 47–57.

Рассматривается задача Коши для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Обосновывается равномерная сходимость схемы направленных разностей на сетке, предложенной Г.И. Шишкиным. Использование данной сетки хорошо известно лишь в случае краевой задачи. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение второго порядка, сингулярное возмущение, задача Коши, разностная схема, принцип максимума, сетка Шишкина, равномерная сходимость.*

Zadorin A.I., Tikhovskaya S.V. Analysis of a difference scheme for a singularly perturbed Cauchy problem on a refined mesh // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2011. — Vol. 14, № 1. — P. 47–57.

The Cauchy problem for a singularly perturbed second order ordinary differential equation is considered. The uniform convergence of the upwind difference scheme on the Shishkin mesh is proved. Note, that an application of such a mesh is well known only in the case of a boundary value problem. The results of numerical experiments are discussed.

Key words: *second order ordinary differential equation, singular perturbation, Cauchy problem, difference scheme, maximum principle, Shishkin mesh, uniform convergence.*

1. Введение

Вопросы построения и исследования разностных схем для сингулярно возмущенных краевых задач в случае обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка исследованы в целом ряде работ, например [1–5]. В то же время интересен вопрос исследования разностных схем для таких уравнений в случае постановки начальных условий. В случае сингулярно возмущенной начальной задачи для уравнения первого порядка данный вопрос исследовался, например, в [6].

Итак, рассмотрим сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$\begin{aligned} &Lu(x) = \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x \leqslant X, \\ &u(0) = A, \quad u'(0) = \frac{B}{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где A, B — некоторые постоянные. Предполагаем, что

$$0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad a(x) \geqslant \alpha > 0, \quad \beta \geqslant b(x) \geqslant 0, \quad a, b, f \in C^2[0, 1].$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-00726).

Г.И. Шишкиным в [3] для численного решения краевых сингулярно возмущенных задач предложена кусочно-равномерная сетка, мелкая в пограничном слое; доказано, что ряд классических разностных схем на такой сетке обладает свойством сходимости, равномерной по малому параметру. Целью данной работы является исследование вопроса равномерной сходимости схемы направленных разностей на такой сетке в случае начальной задачи (1.1). Как известно, в случае краевых задач для обоснования равномерной сходимости используется принцип максимума. В случае начальной задачи (1.1) будет предложена формулировка принципа максимума, на основе которой при некоторых ограничениях на коэффициенты задачи будет обоснована равномерная сходимость схемы направленных разностей.

Обозначения. Всюду в работе под C и C_i, $i \geq 0$, будем понимать положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов сетки. Определим нормы функции непрерывного аргумента $\|u\| = \max_{0 \leqslant x \leq X} |u(x)|$ и сеточной функции $\|u^h\|_h = \max_n |u_n^h|$. Пусть $[u]$ — проекция функции непрерывного аргумента $u(x)$ на сетку.

2. Анализ дифференциальной задачи

Для задачи (1.1) сформулируем принцип максимума, в справедливости которого легко убедиться рассуждениями от противного.

Лемма 2.1. *Пусть* $\Psi(x) \in C^2[0,1]$. *Тогда из условий*

$$\Psi(0) \geq 0, \qquad \Psi'(0) \geq 0, \qquad L\Psi(x) \geq 0, \quad x \in [0, X], \tag{2.1}$$

следует, что $\Psi(x) \geq 0$, $x \in [0, X]$.

Зададим

$$m_{ab} = \min_{0 \leq x \leq X} [a(x) - b(x)x]. \tag{2.2}$$

Лемма 2.2. *Пусть* $m_{ab} > 0$. *Тогда справедлива оценка устойчивости*

$$|u(x)| \leqslant |A| + \frac{|B|}{\alpha} + \frac{X}{m_{ab}} \left(\beta|A| + \frac{\beta|B|}{\alpha} + \|f\| \right), \quad 0 \leqslant x \leqslant X. \tag{2.3}$$

Доказательство. Определим

$$\Psi(x) = |A| + \frac{|B|}{\alpha} + \left(\beta|A| + \frac{\beta|B|}{\alpha} + \|f\| \right) \frac{x}{m_{ab}} - \frac{|B|}{\alpha} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \pm u(x).$$

Несложно убедиться, что выполнены условия принципа максимума (2.1), в силу леммы 2.1, $\Psi(x) \geqslant 0$, $x \in [0, X]$, откуда следует утверждение леммы. □

Оценим производные решения задачи (1.1).

Лемма 2.3. *Пусть выполнено* $m_{ab} > 0$. *Тогда найдется постоянная* C_0:

$$|u^{(j)}(x)| \leq C_0 \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon^j} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \Big), \quad x \in [0, X], \quad j = 1, 2, 3. \tag{2.4}$$

Доказательство. Докажем утверждение леммы при $j = 1$. Уравнение (1.1) представим в виде

$$\left(\varepsilon u'(x) e^{\int_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon} ds} \right)' = (f(x) + b(x)u(x)) e^{\int_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon} ds}.$$

Интегрируя это равенство от 0 до x и учитывая начальное условие, получим

$$u'(x) = \frac{B}{\varepsilon} e^{-\int\limits_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon}\,ds} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x \big(f(s) + b(s)u(s)\big) e^{-\int\limits_s^x \frac{a(t)}{\varepsilon}\,dt} ds. \tag{2.5}$$

В соответствии с (2.3) функция $u(s)$ под интегралом в (2.5) ограничена. Следовательно,

$$|u'(x)| \le \frac{|B|}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{C_1}{\varepsilon}\int\limits_0^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-s)}\,ds \le \frac{|B|}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{C_1}{\alpha},$$

что доказывает (2.4) при $j = 1$.

Пусть $j = 2$. Учитывая уравнение (1.1), для некоторой постоянной C_2 получим $|u''(0)| \le C_2/\varepsilon^2$. Дифференцируя уравнение (1.1), получим

$$\varepsilon u'''(x) + a(x)u''(x) = b'(x)u(x) + b(x)u'(x) + f'(x) - a'(x)u'(x).$$

Теперь по аналогии со случаем $j = 1$ получим представление вида (2.5) для производной $u''(x)$, из которого следует оценка (2.4) при $j = 2$. Случай $j = 3$ рассматривается аналогично. Лемма доказана. $\square$

В соответствии с леммой 2.3 решение задачи Коши (1.1) при малых ε имеет погранслойный рост в окрестности начальной точки $x = 0$.

3. Построение и анализ разностной схемы

Для того, чтобы анализировать точность разностной схемы в случае задачи Коши, необходимо сформулировать некоторый аналог принципа максимума, который широко применяется для анализа точности разностных схем в случае краевой задачи.

Рассмотрим трехточечную разностную схему для задачи Коши:

$$\begin{gathered} L_n^h u^h = A_n u_{n-1}^h - B_n u_n^h + D_n u_{n+1}^h = F_n, \\ u_0^h = A, \quad \frac{u_1^h - u_0^h}{h} = G, \quad 1 \le n < N, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где N — число интервалов в общем случае неравномерной сетки Ω^h исходного интервала $[0, X]$ и A, G — некоторые постоянные. Предполагаем, что $B_n \ge A_n + D_n$, $A_n > 0$, $D_n > 0$.

Принцип максимума для анализа разностных схем в случае краевых задач используется в ряде работ, например [7]. Сформулируем принцип максимума для начальной задачи (3.1).

Лемма 3.1. *Из условий*

$$\Psi_0^h \ge 0, \quad \Psi_1^h - \Psi_0^h \ge 0, \quad L_n^h \Psi^h \ge 0 \qquad \text{для} \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \tag{3.2}$$

следует, что $\Psi_n^h \ge 0$, $n = 0, 1, \dots, N$.

Доказательство. Пусть $\exists\, m:\ \Psi_m^h < 0$, тогда в некотором узле с номером $m_0 < m$ достигается положительный максимум сеточной функции Ψ^h, тогда

$$L_{m_0}^h \Psi^h = A_{m_0}(\Psi_{m_0-1}^h - \Psi_{m_0}^h) - (B_{m_0} - A_{m_0} - D_{m_0})\Psi_{m_0}^h + D_{m_0}(\Psi_{m_0+1}^h - \Psi_{m_0}^h),$$

откуда, с учетом ограничений на коэффициенты разностной схемы, получим $L^h_{m_0}\Psi^h < 0$, что противоречит одному из условий леммы. $\square$

Покажем, что в случае произвольной равномерной сетки схема направленных разностей не обладает свойством сходимости при малых значениях параметра ε. Выпишем схему направленных разностей для задачи (1.1) в случае равномерной сетки

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{u^h_{n+1}-2u^h_n+u^h_{n-1}}{h^2}+a_n\frac{u^h_{n+1}-u^h_n}{h}-b_nu^h_n=f_n,\\ &u^h_0=A, \qquad \frac{u^h_1-u^h_0}{h}=\frac{B}{\varepsilon}, \quad 0<n<N, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $a_n=a(x_n),\ b_n=b(x_n),\ f_n=f(x_n)$. Из начальных условий следует $u^h_1=A+Bh/\varepsilon$, поэтому решение схемы (3.3) не ограничено равномерно по параметру ε, в то время как решение задачи (1.1) равномерно ограничено. Следовательно, схема (3.3) не обладает свойством сходимости при малых значениях ε. Можно показать, что и схема центральных разностей не обладает свойством равномерной сходимости. Как и в случае краевой задачи возникает необходимость в построении равномерно сходящейся разностной схемы для решения задачи (1.1). Покажем, что использование сетки из [3] обеспечит равномерную сходимость схемы направленных разностей.

Зададим сетку

$$\Omega=\{x_n:\ x_n=x_{n-1}+h_n,\ n=1,2,\ldots,N,\ x_0=0,\ x_N=X\},\quad \Delta_n=[x_{n-1},x_n].$$

В соответствии с [3] сетку Ω определим как кусочно-равномерную с мелким шагом h в пограничном слое и крупным шагом H вне его

$$\sigma=\min\left\{\frac{X}{2},\frac{\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\},\quad h=\frac{\sigma}{N/2},\quad H=\frac{X-\sigma}{N/2}. \tag{3.4}$$

Выпишем для задачи (1.1) схему направленных разностей на заданной сетке

$$\begin{aligned} &L^h_nu^h=2\varepsilon\frac{h_n(u^h_{n+1}-u^h_n)-h_{n+1}(u^h_n-u^h_{n-1})}{h_nh_{n+1}(h_n+h_{n+1})}+a_n\frac{u^h_{n+1}-u^h_n}{h_{n+1}}-b_nu^h_n=f_n,\\ &u^h_0=A, \qquad \frac{u^h_1-u^h_0}{h_1}=\frac{B}{\varepsilon}, \qquad n=1,2,\ldots,N-1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Получим оценку устойчивости для решения схемы (3.5).

Лемма 3.2. *Пусть* $m_{ab}>0$. *Тогда для решения схемы* (3.5) *справедлива оценка устойчивости*

$$\|u^h\|_h\le\frac{4|B|}{\alpha}+|A|+\frac{X}{m_{ab}}\left(\frac{4\beta}{\alpha}|B|+\beta|A|+\|f\|_h\right).$$

Доказательство. Определим сеточную функцию Φ^h:

$$\Phi^h_n=\begin{cases}1, & n=0,\\ \prod\limits_{j=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha\,h_j}{2\,\varepsilon}\right)^{-1}, & n=1,\ldots,N.\end{cases}$$

Несложно показать, что при всех $n=1,2,\ldots,N-1$

$$L_n^h \Phi^h \le -\frac{\alpha^2 \Phi_n^h}{2\varepsilon + \alpha h_{n+1}} \cdot \frac{h_n}{h_n + h_{n+1}} < 0. \tag{3.6}$$

Определим сеточную функцию Ψ^h:

$$\Psi_n^h = \frac{4|B|}{\alpha}(1 - \Phi_n^h) + \frac{1}{m_{ab}} \left(\frac{4\beta}{\alpha}|B| + \beta|A| + \|f\|_h \right) x_n + |A| \pm u_n^h.$$

Проверим выполнение условий (3.2) для функции Ψ^h. С учетом (3.6) получим:

$$\Psi_0^h \ge 0, \quad \frac{\Psi_1^h - \Psi_0^h}{h_1} = \frac{4|B|}{\alpha} \frac{\Phi_0^h - \Phi_1^h}{h_1} + \frac{1}{m_{ab}} \left(\frac{4\beta}{\alpha}|B| + \beta|A| + \|f\|_h \right) \pm \frac{u_1^h - u_0^h}{h_1}$$
$$\ge \frac{2|B|}{\varepsilon} \frac{1}{\left(1 + \frac{\ln N}{N}\right)} - \frac{|B|}{\varepsilon} \ge 0,$$
$$L_n^h \Psi^h = -\frac{4|B|}{\alpha} b_n - \frac{4|B|}{\alpha} L_n^h \Phi^h + \frac{1}{m_{ab}} \left(\frac{4\beta}{\alpha}|B| + \beta|A| + \|f\|_h \right)(a_n - b_n x_n) -$$
$$b_n|A| \pm f_n \ge \|f\|_h \pm f_n \ge 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Итак, условия принципа максимума (3.2) выполнены, поэтому $\Psi_n^h \ge 0$ при всех n, из чего следует утверждение леммы. □

Сформулируем некоторые известные результаты, которые потребуются ниже.

Лемма 3.3. *Пусть* k_0, k_1, K_0, K_1 *— неотрицательные константы такие, что* $k_0^2 + K_0^2 > 0$ *и* $k_1^2 + K_1^2 > 0$, *дифференциальный оператор* L *соответствует* (1.1). *Тогда для* $\Psi(x) \in C^2[0,1]$ *из условий*

$$-K_0 \Psi'(0) + k_0 \Psi(0) \ge 0, \quad K_1 \Psi'(1) + k_1 \Psi(1) \ge 0, \quad L\Psi(x) \le 0, \quad x \in [0, X], \tag{3.7}$$

следует, что $\Psi(x) \ge 0$, $x \in [0, X]$.

Следующая лемма справедлива в соответствии с [4].

Лемма 3.4. *Пусть* $w(x)$ *— произвольная трижды непрерывно дифференцируемая функция, тогда при всех* n:

$$|L_n^h[w] - Lw(x_n)| \le C_3 \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} (\varepsilon|w'''(s)| + |w''(s)|)\, ds.$$

Теперь докажем равномерную сходимость схемы (3.5).

Теорема 3.1. *Пусть* $m_{ab} > 0$. *Тогда найдется* $C > 0$:

$$|u(x_n) - u_n^h| \le C \frac{\ln^2 N}{N}, \quad n = 0, 1, \ldots, N, \tag{3.8}$$

где $u(x)$ *— решение задачи* (1.1), u^h *— решение схемы* (3.5) *на сетке* (3.4).

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - [u]$. Учитывая лемму 3.4 и оценку производных (2.4), получим

$$|L_n^h z^h| = |L_n^h[u] - Lu(x_n)| \le 2C_0C_3 \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\, e^{-\frac{\alpha s}{\varepsilon}}\right) ds, \quad n = 1,2,\ldots,N-1.$$

Следовательно,

$$|L_n^h z^h| \le 2C_0C_3|x_{n+1} - x_{n-1}|\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\, e^{-\frac{\alpha x_{n-1}}{\varepsilon}}\right), \quad n = 1,2,\ldots,N-1. \tag{3.9}$$

Несложно показать, что при всех $n = 1,2,\ldots,N-1$ выполнено

$$|x_{n+1} - x_{n-1}| \le \frac{4X}{N}.$$

Далее оценим

$$|z_1^h - z_0^h| = |hu'(0) - (u(h) - u(0))| \le \max_{s\in\Delta_1} |u''(s)|\frac{h^2}{2}.$$

Учитывая оценки производных (2.4) и выбор шагов сетки в соответствии с (3.4), получим

$$z_0^h = 0, \qquad |z_1^h - z_0^h| \le \frac{4C_0}{\alpha^2}\frac{\ln^2 N}{N^2} = C_4\frac{\ln^2 N}{N^2}. \tag{3.10}$$

В соответствии с (3.4) возможны два случая значения сеточного параметра σ:

1) Пусть $\sigma = \frac{X}{2}$. В этом случае сетка равномерная и

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\ln N \ge \frac{X}{2}.$$

Учитывая (3.9), получим, что для некоторого C_5:

$$|L_n^h z^h| \le C_5\frac{\ln^2 N}{N}. \tag{3.11}$$

Определим сеточную функцию Ψ^h:

$$\Psi_n^h = \begin{cases} C_4\dfrac{\ln^2 N}{N} + C_6\dfrac{\ln^2 N}{N}x_n \pm z_n^h, & n = 0, \\[2ex] 2C_4\dfrac{\ln^2 N}{N} + C_6\dfrac{\ln^2 N}{N}x_n \pm z_n^h, & n = 1,\ldots,N, \end{cases} \tag{3.12}$$

где C_4 соответствует (3.10). Используя оценки (3.10) и (3.11), несложно показать, что для функции Ψ^h из (3.12) выполнены условия (3.2), если задать $C_6 \ge (2\beta C_4 + C_5)/m_{ab}$. Тогда, в силу принципа максимума, $\Psi_n^h \ge 0$ при $n = 0,1,\ldots,N$, откуда следует требуемая оценка (3.8).

2) Пусть $\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}\ln N$. Ниже сделаем декомпозицию решения $u(x)$ на регулярную $q(x)$ и погранслойную $W(x)$ составляющие

$$u(x) = q(x) + W(x). \tag{3.13}$$

В соответствии с оценкой устойчивости (2.3) решение задачи (1.1) имеет единственное решение, и существует постоянная E, ограниченная равномерно по ε такая, что $u(X) = E$. Перейдем от (1.1) к эквивалентной краевой задаче

$$Lu(x) = \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < X,$$
$$a(0)u'(0) - b(0)u(0) = a(0)\frac{B}{\varepsilon} - b(0)A, \qquad u(X) = E.$$

Потребуем, чтобы функции $q(x)$ и $W(x)$ в представлении (3.13) являлись решениями задач:

$$Lq(x) = f(x), \quad a(0)q'(0) - b(0)q(0) = f(0), \quad q(X) = E,$$
$$LW(x) = 0, \quad a(0)W'(0) - b(0)W(0) = a(0)\frac{B}{\varepsilon} - b(0)A - f(0), \quad W(X) = 0.$$

Докажем, что для некоторой постоянной C_7 справедливы оценки:

$$|q(x)| \le C_7, \quad |q'(x)| \le C_7, \quad |q''(x)| \le C_7, \quad |q'''(x)| \le C_7\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right). \tag{3.14}$$

Сначала докажем ограниченность $q(x)$. Для этого зададим функцию

$$\Psi(x) = C_8(X + 1 - x) \pm q(x).$$

Для использования леммы 3.3 зададим $k_0 = b(0)$, $K_0 = a(0)$, $k_1 = 1$, $K_1 = 0$. Можно показать, что для некоторой постоянной C_8 выполняются условия (3.7) и, в силу леммы 3.3, верно $\Psi(x) \ge 0$, $x \in [0, X]$, откуда следует первое неравенство в (3.14).

Из краевого условия и ограниченности $q(0)$ следует, что $|q'(0)| \le C_9$. В соответствие с дифференциальным уравнением на $q(x)$ и краевым условием $a(0)q'(0) - b(0)q(0) = f(0)$ выполнено условие $q''(0) = 0$. Далее, по аналогии с леммой 2.3, можно получить остальные оценки производных в (3.14).

Получим оценку

$$|W(x)| \le C_{10}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}. \tag{3.15}$$

Для этого определим функцию

$$\Psi(x) = C_{10}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \pm W(x).$$

Пусть $k_0 = \varepsilon b(0)$, $K_0 = \varepsilon a(0)$, $k_1 = 1$, $K_1 = 0$. Тогда для некоторой постоянной C_{10} выполняются условия (3.7). Тогда, в силу леммы 3.3, $\Psi(x) \ge 0$, $x \in [0, X]$, откуда следует оценка (3.15).

Итак, обосновано представление (3.13) с ограничениями (3.14) и (3.15) на функции $q(x)$ и $W(x)$ соответственно.

Обозначим $W_0 = W(0)$, при этом $q(0) = A - W_0$. Тогда $W(x)$ является решением краевой задачи

$$LW(x) = 0, \quad W(0) = W_0, \quad W(X) = 0. \tag{3.16}$$

Аналогичным образом, используя лемму 3.2, осуществим декомпозицию решения схемы (3.5). Для этого от схемы (3.5) перейдем к эквивалентной разностной схеме с заданными краевыми условиями:

$$L_n^h u^h = f_n^h, \quad 0 < n < N, \qquad u_0^h = A, \qquad u_N^h = F.$$

Теперь сеточное решение u^h представим в виде

$$u^h = q^h + W^h, \tag{3.17}$$

где q^h и W^h являются решениями задач:

$$\begin{aligned} &L_n^h q^h = f_n, \quad 0 < n < N, \qquad q_0^h = A - W_0, \qquad q_N^h = F, \\ &L_n^h W^h = 0, \quad 0 < n < N, \qquad W_0^h = W_0, \qquad W_N^h = 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Итак, используя декомпозиции (3.13) и (3.17), получим

$$|u(x_n) - u_n^h| \le |q(x_n) - q_n^h| + |W(x_n) - W_n^h|. \tag{3.19}$$

В силу того, что $W(x)$ является решением краевой задачи (3.16), а W^h является решением соответствующей схемы (3.18), то в соответствии с [5, с. 61] для некоторой постоянной C_{11} справедлива оценка равномерной сходимости

$$|W(x_n) - W_n^h| \le C_{11} \frac{\ln^2 N}{N}, \quad n = 0, 1, \ldots, N. \tag{3.20}$$

Теперь оценим первый модуль в (3.19). Учитывая (3.5), (3.17) и (3.18), можно заключить, что q^h является решением разностной схемы

$$L_n^h q^h = f_n, \quad 0 < n < N, \qquad q_0^h = A - W_0, \qquad \frac{q_1^h - q_0^h}{h_1} = \frac{B}{\varepsilon} - \frac{W_1^h - W_0^h}{h_1}.$$

Пусть $z^h = [q] - q^h$. Используя оценку (2.4) при $j = 2$ и оценку (3.20), получим

$$\begin{aligned} |z_1^h - z_0^h| &= |u(h) - W(h) - u(0) + W(0) - u'(0)h + W_1^h - W_0^h| \\ &\le |u(h) - u(0) - u'(0)h| + |W_1^h - W(h)| \le C_{12} \frac{\ln^2 N}{N}. \end{aligned}$$

Используя лемму 3.4 и оценки (3.14), получим

$$|L_n^h z^h| \le C|x_{n+1} - x_{n-1}| \le \frac{C_{13}}{N}.$$

Зададим сеточную функцию Ψ^h:

$$\Psi_n^h = \begin{cases} C_{12} \dfrac{\ln^2 N}{N} + \dfrac{2\beta C_{12}}{m_{ab}} \dfrac{\ln^2 N}{N} x_n + \dfrac{C_{13}}{m_{ab} N} x_n \pm z_n^h, \quad n = 0, \\[2ex] 2C_{12} \dfrac{\ln^2 N}{N} + \dfrac{2\beta C_{12}}{m_{ab}} \dfrac{\ln^2 N}{N} x_n + \dfrac{C_{13}}{m_{ab} N} x_n \pm z_n^h, \quad n = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Тогда выполнены условия (3.2), и в силу принципа максимума $\Psi_n^h \ge 0$ при $n = 0, 1, \ldots, N$, поэтому для некоторой постоянной C_{14} верно

$$|q(x_n) - q_n^h| \le C_{14} \frac{\ln^2 N}{N}, \quad n = 0, \ldots, N. \tag{3.21}$$

Используя оценки (3.19)–(3.21), получим требуемую оценку (3.8), что доказывает теорему. □

4. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\varepsilon u''(x) + \alpha u'(x) - \beta u(x) = e^x, \quad 0 < x < 1, \\ &u(0) = 1, \quad u'(0) = \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Решение задачи (4.1) было найдено в явном виде.

Заметим, что m_{ab}, определенное в (2.2), в случае задачи (4.1) имеет вид $m_{ab} = \alpha - \beta$. При доказательстве теоремы 3.1 мы использовали ограничение $m_{ab} > 0$, поэтому в численных экспериментах рассмотрим случаи $m_{ab} > 0$ и $m_{ab} \leq 0$.

Пусть $\alpha = 3$, $\beta = 1$, при этом $m_{ab} = 2$. В табл. 1 представлена погрешность

$$\Delta_N = \max_{0 \leq n \leq N} |u(x_n) - u_n^h|$$

схемы (3.5) при различных значениях ε и N в случае равномерной сетки. Из табл. 1 следует, что при использовании равномерной сетки при малых значениях ε решение схемы (3.5) становится не ограниченным и погрешность схемы значительна.

Таблица 1. Погрешность схемы направленных разностей на равномерной сетке при $\alpha = 3$, $\beta = 1$

ε	N							
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	$2.05E-2$	$1.11E-2$	$5.78E-3$	$2.94E-3$	$1.49E-3$	$7.46E-4$	$3.74E-4$	$1.87E-4$
2^{-3}	$1.08E+0$	$5.60E-1$	$2.85E-1$	$1.44E-1$	$7.24E-2$	$3.63E-2$	$1.82E-2$	$9.09E-3$
2^{-4}	$2.35E+0$	$1.22E+0$	$6.24E-1$	$3.16E-1$	$1.59E-1$	$7.95E-2$	$3.98E-2$	$1.99E-2$
2^{-5}	$4.90E+0$	$2.56E+0$	$1.31E+0$	$6.60E-1$	$3.32E-1$	$1.66E-1$	$8.33E-2$	$4.17E-2$
2^{-6}	$1.00E+1$	$5.22E+0$	$2.67E+0$	$1.35E+0$	$6.79E-1$	$3.40E-1$	$1.70E-1$	$8.52E-2$
2^{-7}	$2.02E+1$	$1.06E+1$	$5.40E+0$	$2.73E+0$	$1.37E+0$	$6.88E-1$	$3.45E-1$	$1.72E-1$
2^{-8}	$4.07E+1$	$2.12E+1$	$1.09E+1$	$5.49E+0$	$2.76E+0$	$1.38E+0$	$6.93E-1$	$3.47E-1$
2^{-9}	$8.16E+1$	$4.26E+1$	$2.18E+1$	$1.10E+1$	$5.54E+0$	$2.78E+0$	$1.39E+0$	$6.95E-1$
2^{-10}	$1.63E+2$	$8.53E+1$	$4.36E+1$	$2.21E+1$	$1.11E+1$	$5.56E+0$	$2.78E+0$	$1.39E+0$
2^{-14}	$2.62E+3$	$1.37E+3$	$6.99E+2$	$3.53E+2$	$1.78E+2$	$8.91E+1$	$4.46E+1$	$2.23E+1$
2^{-18}	$4.19E+4$	$2.19E+4$	$1.12E+4$	$5.65E+3$	$2.84E+3$	$1.43E+3$	$7.14E+2$	$3.57E+2$

В табл. 2 представлена погрешность Δ_N схемы (3.5) в случае неравномерной сетки (3.4).

В табл. 3 приведена скорость сходимости анализируемой схемы

$$P = \log_2 \frac{\Delta_N}{\Delta_{2N}}$$

в случае неравномерной сетки (3.4). В последней строке приведена скорость сходимости P_t, соответствующая полученной оценке точности (3.8). Из данной таблицы следует, что скорость сходимости несколько выше, чем $O(\ln^2 N/N)$.

Остановимся на случае $m_{ab} < 0$ при задании $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$. В табл. 4 представлена погрешность Δ_N в зависимости от ε и N. В этом случае точность схемы (3.5) значительно ниже, чем в случае $m_{ab} > 0$, и не выполняется оценка точности, соответствующая теореме 3.1.

Таблица 2. Погрешность схемы направленных разностей на сетке Шишкина при $\alpha = 3$, $\beta = 1$

ε	N							
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	$2.05E-2$	$1.11E-2$	$5.78e–3$	$2.94E-3$	$1.49E-3$	$7.46E-4$	$3.74E-4$	$1.87E-4$
2^{-3}	$1.93E-1$	$1.21E-1$	$7.30E-2$	$4.36E-2$	$2.60E-2$	$1.52E-2$	$8.75E-3$	$4.95E-3$
2^{-4}	$2.19E-1$	$1.36E-1$	$7.99E-2$	$4.66E-2$	$2.72E-2$	$1.58E-2$	$9.06E-3$	$5.13E-3$
2^{-5}	$2.34E-1$	$1.45E-1$	$8.49E-2$	$4.90E-2$	$2.82E-2$	$1.62E-2$	$9.22E-3$	$5.20E-3$
2^{-6}	$2.43E-1$	$1.51E-1$	$8.83E-2$	$5.10E-2$	$2.91E-2$	$1.66E-2$	$9.37E-3$	$5.26E-3$
2^{-7}	$2.49E-1$	$1.54E-1$	$9.04E-2$	$5.23E-2$	$2.99E-2$	$1.70E-2$	$9.54E-3$	$5.32E-3$
2^{-8}	$2.52E-1$	$1.55E-1$	$9.15E-2$	$5.31E-2$	$3.05E-2$	$1.73E-2$	$9.73E-3$	$5.40E-3$
2^{-9}	$2.53E-1$	$1.56E-1$	$9.21E-2$	$5.35E-2$	$3.08E-2$	$1.76E-2$	$9.89E-3$	$5.49E-3$
2^{-10}	$2.54E-1$	$1.57E-1$	$9.24E-2$	$5.38E-2$	$3.10E-2$	$1.77E-2$	$1.00E-2$	$5.56E-3$
2^{-14}	$2.55E-1$	$1.57E-1$	$9.27E-2$	$5.40E-2$	$3.12E-2$	$1.79E-2$	$1.01E-2$	$5.68E-3$
2^{-18}	$2.55E-1$	$1.57E-1$	$9.27E-2$	$5.40E-2$	$3.12E-2$	$1.79E-2$	$1.02E-2$	$5.68E-3$

Таблица 3. Скорость сходимости схемы направленных разностей на сетке Шишкина при $\alpha = 3$, $\beta = 1$

ε	N						
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
1	0.883	0.946	0.973	0.986	0.993	0.997	0.998
2^{-3}	0.670	0.734	0.744	0.748	0.770	0.798	0.822
2^{-4}	0.688	0.767	0.778	0.778	0.783	0.802	0.822
2^{-5}	0.688	0.774	0.793	0.799	0.801	0.811	0.826
2^{-6}	0.691	0.771	0.794	0.806	0.814	0.823	0.834
2^{-7}	0.695	0.766	0.790	0.805	0.818	0.831	0.843
2^{-8}	0.698	0.763	0.786	0.801	0.815	0.833	0.849
2^{-9}	0.698	0.761	0.783	0.797	0.810	0.830	0.849
2^{-10}	0.699	0.760	0.782	0.794	0.807	0.826	0.846
2^{-14}	0.699	0.759	0.780	0.792	0.802	0.819	0.837
2^{-18}	0.699	0.759	0.780	0.791	0.802	0.819	0.836
P_t	0.170	0.356	0.474	0.555	0.615	0.660	0.696

Таблица 4. Погрешность схемы направленных разностей на сетке Шишкина при $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$

ε	N							
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	$1.22E-1$	$5.97E–2$	$2.96E-2$	$1.47E-2$	$7.34E-3$	$3.66E-3$	$1.83E-3$	$9.15E-4$
2^{-3}	$2.22E-1$	$1.34E-1$	$7.34E-2$	$3.84E-2$	$1.97E-2$	$9.95E-3$	$5.00E-3$	$2.51E-3$
2^{-4}	$6.15E-1$	$5.45E-1$	$4.67E-1$	$3.27E-1$	$1.68E-1$	$8.48E-2$	$4.27E-2$	$2.14E-2$
2^{-5}	$1.26E+0$	$6.94E-1$	$5.32E-1$	$4.21E-1$	$3.15E-1$	$2.09E-1$	$1.29E-1$	$7.63E-2$
2^{-6}	$2.47E+0$	$7.74E-1$	$5.52E-1$	$3.92E-1$	$2.86E-1$	$2.07E-1$	$1.37E-1$	$8.48E-2$
2^{-7}	$3.40E+0$	$1.03E+0$	$5.74E-1$	$3.86E-1$	$2.62E-1$	$1.81E-1$	$1.25E-1$	$8.09E-2$
2^{-8}	$3.98E+0$	$1.33E+0$	$5.96E-1$	$3.93E-1$	$2.58E-1$	$1.71E-1$	$1.15E-1$	$7.56E-2$
2^{-9}	$4.31E+0$	$1.49E+0$	$6.12E-1$	$4.03E-1$	$2.62E-1$	$1.70E-1$	$1.11E-1$	$7.27E-2$
2^{-10}	$4.49E+0$	$1.58E+0$	$6.22E-1$	$4.11E-1$	$2.67E-1$	$1.73E-1$	$1.12E-1$	$7.22E-2$
2^{-14}	$4.66E+0$	$1.66E+0$	$6.33E-1$	$4.21E-1$	$2.77E-1$	$1.83E-1$	$1.20E-1$	$7.83E-2$
2^{-18}	$4.67E+0$	$1.67E+0$	$6.34E-1$	$4.22E-1$	$2.78E-1$	$1.84E-1$	$1.22E-1$	$7.97E-2$

Список литературы

[1] **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 841–890.

[2] **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Математические заметки. — 1969. — Т. 6, № 2. — С. 237–248.

[3] **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992.

[4] **Kellog R.B., Tsan A.** Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points // Mathematics of computation. — 1978. — Vol. 32, № 144. — P. 1025–1039.

[5] **Miller J.J.H., O'Riordan E., and Shishkin G.I.** Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions. — Singapore: World Scientific, 1996.

[6] **Дулан Э., Миллер Д., Шилдерс У.** Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. — М.: Мир, 1983.

[7] **Самарский А.А.** Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.

Омский филиал Института математики СО РАН,
ул. Певцова, 13,
Омск, 644099
E-mails: zadorin@ofim.oscsbras.ru (Задорин А.И.)
s.tihovskaya@yandex.ru (Тиховская С. В.)

Статья поступила
15 февраля 2010 г.