ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1998, том 38, № 8, с. 1255–1265

УДК 519.62

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

 А. И. Задорин

(644099 Омск, Певцова, 13, Институт математики СО РАН)

Поступила в редакцию 15.05.96 г.
Переработанный вариант 27.02.98 г.

Рассматривается нелинейная система уравнений второго порядка с малыми параметрами при старших производных. Наложены два вида ограничений на матрицу Якоби, при которых решение задачи существует и единственно. Построена разностная схема, основанная на замене коэффициентов на кусочно-постоянные, и при накладываемых ограничениях обоснована ее равномерная сходимость с первым порядком. В случае слабо выраженного погранслоя обоснована равномерная сходимость схемы направленных разностей.

Рассмотрим исходную краевую задачу

$$T_\varepsilon \mathbb{u} = -\varepsilon \mathbb{u}'' + a(x)\mathbb{u}' + \mathbb{F}(x, \mathbb{u}) = 0, \tag{1}$$

$$\mathbb{u}(0) = \mathbb{A}, \quad R_\varepsilon \mathbb{u} = \delta \mathbb{u}(1) + \varepsilon \beta \mathbb{u}'(1) = \mathbb{B}, \tag{2}$$

где $a(x)$, δ, β – диагональные квадратные матрицы порядка N с диагональными элементами, соответственно, $a_i(x)$, δ_i, β_i, $i = 1, 2, \ldots, N$; $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ – векторы из N компонент; ε – числовой параметр, $\varepsilon > 0$; $\mathbb{F}$ – известная вектор-функция; $\mathbb{u}(x)$ – вектор-функция решения. Предполагается, что $a_i \in C^1[0, 1]$, $F_i \in C^1([0, 1] \times \mathbb{R})$ и

$$a_i(x) \geq \alpha_i > 0, \quad \delta_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad \delta_i + \beta_i > 0, \quad \alpha_0 = \min_i \alpha_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3}$$

Дополнительные ограничения на $\mathbb{F}$ будем рассматривать отдельно.

Задача (1), (2) является модельной, например, при описании переноса примеси с учетом диффузии и химических реакций. В случае одного уравнения задача (1), (2) рассматривалась в [1]. В случае $a(x) = 0$ система уравнений рассматривалась, например, в [2]. Всюду ниже под C и C_i будем понимать положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов разностной сетки. Под сеточной вектор-функцией будем подразумевать вектор, компонентами которого являются сеточные функции, определенные на сетке Ω. Определим используемые нормы:

$\|\mathbb{q}\| = \max|\mathbb{q}(x)|$, $x \in I$, $I = [0, 1]$, для функции $\mathbb{q}(x)$,

$\|\mathbb{q}\|_N = \max\limits_{1 \leq i \leq N} \max\limits_{x \in I} |q_i(x)|$ для вектор-функции $\mathbb{q}(x)$ из N компонент,

$\|\mathbb{q}\|_\infty = \max\limits_i |q_i|$ для вектора $\mathbb{q}$,

$\|\mathbb{q}^h\|_{N,\Omega} = \max\limits_{1 \leq i \leq N} \max\limits_{x \in \Omega} |q_i^h(x)|$ для сеточной вектор-функции $\mathbb{q}^h$.

Под неравенством векторов понимаем соответствующее покомпонентное неравенство. Определим $Q^m[0, 1]$ как множество функций интервала $[0, 1]$, имеющих кусочно-непрерывные производные вплоть до порядка m, причем разрывы могут быть только I рода в заданном конечном множестве внутренних точек (при $m = 0$ сама функция кусочно-непрерывна с разрывами I рода).

1. АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧ

Рассмотрим вспомогательную линейную краевую задачу

$$L\mathbb{u} = -\varepsilon \mathbb{u}'' + a(x)\mathbb{u}' + G(x)\mathbb{u} = \mathbb{F}(x), \quad \mathbb{u}(0) = \mathbb{A}, \quad R_\varepsilon \mathbb{u} = \mathbf{B}, \tag{1.1}$$

где матрица $a(x)$ определена выше, $G(x)$ – квадратная матрица порядка N, F_i, $G_{ij} \in C[0, 1]$, предполагаются справедливыми ограничения (3).

Лемма 1. *Пусть*

$$G_{ii} \geq \eta > 0, \quad \sum_{j \neq i} |G_{ij}| \leq (1-\sigma)G_{ii}, \quad 0 < \sigma < 1, \quad \forall i. \tag{1.2}$$

Тогда

$$\|\mathbf{u}\|_N \leq \frac{1}{\sigma}\left[\frac{\|\mathbf{F}\|_N}{\eta} + \|\mathbf{A}\|_\infty + \max_i \left|\frac{B_i}{\delta_i + \alpha_i\beta_i}\right|\right].$$

Доказательство. Рассмотрим скалярную линейную задачу

$$L_0 V = -\varepsilon V'' + d(x)V' + b(x)V = f(x), \quad V(0) = A_0, \quad \delta_0 V(1) + \varepsilon\beta_0 V'(1) = B_0,$$

где $b(x) > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta_0 \geq 0$, $\beta_0 \geq 0$, $\delta_0 + \beta_0 > 0$, $d(x) \geq d_0 > 0$, $x \in I$, $b, d, f \in Q^0[0, 1]$. Покажем, что

$$|V(x)| \leq \left\|\frac{f}{b}\right\| + |A_0| + \frac{|B_0|}{\delta_0 + d_0\beta_0}\exp[d_0\varepsilon^{-1}(x-1)]. \tag{1.3}$$

При наложенных ограничениях для оператора L_0 справедлив принцип максимума, и если для некоторой функции $\Psi(x) \in C^1[0, 1] \cap Q^2[0, 1]$ верно

$$\Psi(0) \geq 0, \quad \delta_0\Psi(1) + \varepsilon\beta_0\Psi'(1) \geq 0, \quad L_0\Psi(x) \geq 0, \quad x \in I, \tag{1.4}$$

то $\Psi(x) \geq 0$ при всех $x \in I$ (см. [1]). Определим

$$\Psi(x) = \left\|\frac{f}{b}\right\| + |A_0| + \frac{|B_0|}{\delta_0 + d_0\beta_0}\exp[d_0\varepsilon^{-1}(x-1)] \pm V(x).$$

При таком выборе $\Psi(x)$ выполнены соотношения (1.4) и поэтому $\Psi(x) \geq 0$, $x \in I$. Это доказывает оценку (1.3).

Уравнение (1.1) для компоненты i запишем в виде

$$-\varepsilon u_i'' + a_i(x)u_i' + G_{ii}(x)u_i = F_i(x) - \sum_{j \neq i} G_{ij}(x)u_j.$$

В силу (1.3) имеем

$$|u_i(x)| \leq \eta^{-1}\|F_i\| + \left\|G_{ii}^{-1}\sum_{j \neq i} G_{ij}u_j\right\| + |B_i|(\delta_i + \alpha_i\beta_i)^{-1}\exp[\alpha_i\varepsilon^{-1}(x-1)] + |A_i|.$$

Учитывая условия (1.2), приходим к утверждению леммы.

Получим оценку устойчивости при других ограничениях на матрицу $G(x)$.

Лемма 2. *Пусть* $G_{ij}(x) \leq 0$ *в* (1.1) *при* $i \neq j$. *Пусть найдется вектор-функция* $\varphi(x)$ *с компонентами из* $C^2[0, 1]$ *такая, что*

$$\varphi(x) > 0, \quad L\varphi(x) > 0, \quad x \in I, \quad R_\varepsilon\varphi > 0. \tag{1.5}$$

Тогда если для некоторой вектор-функции $\Psi(x)$ *с компонентами из* $C^2[0, 1]$ *верно*

$$\Psi(0) \geq 0, \quad R_\varepsilon\Psi \geq 0, \quad L\Psi(x) \geq 0, \quad x \in I, \tag{1.6}$$

то $\Psi(x) \geq 0$, $x \in I$.

Доказательство. Предположим, что какие-то компоненты вектор-функции $\Psi(x)$ оказались меньше нуля. Определим вектор $\mathbf{y}$: $y_i = \Psi_i/\varphi_i$. Тогда при некоторых j_0, x_0 будет $y_{j_0}(x_0) = \min y_j(x) < 0$. Покажем, что $x_0 \neq 1$. В силу условий (1.6),

$$[\delta_{j_0}\varphi_{j_0}(1) + \varepsilon\beta_{j_0}\varphi'_{j_0}(1)]y_{j_0}(1) + \varepsilon\beta_{j_0}\varphi_{j_0}(1)y'_{j_0}(1) \geq 0.$$

Исходя из этого соотношения, легко убедиться, что $x_0 < 1$. Следовательно, x_0 – точка локального минимума и поэтому

$$y_{j_0}(x_0) < 0, \quad y'_{j_0}(x_0) = 0, \quad y''_{j_0}(x_0) \geq 0. \tag{1.7}$$

Нетрудно убедиться, что

$$L_{j_0}\Psi = -\varepsilon\varphi_{j_0}y''_{j_0} + (-2\varepsilon\varphi'_{j_0} + a_{j_0}\varphi_{j_0})y'_{j_0} + y_{j_0}L_{j_0}\varphi + \sum_{k=1}^{N} G_{j_0k}\varphi_k(y_k - y_{j_0}).$$

Учитывая (1.5), (1.7), получаем $L_{j_0}\Psi(x_0) < 0$, что противоречит (1.6). Лемма доказана.

Замечания. 1. Лемма 2 останется в силе, если предположить, что компоненты вектор-функции $\Psi(x)$ – из $C^1[0, 1] \cap Q^2[0, 1]$. При этом если в (1.6) точка x – точка разрыва второй производной, то условие $L\Psi(x) \geq 0$ должно быть выполнено для правого и левого пределов в этой точке. В случае одного уравнения аналогичное утверждение доказано в [1].

2. Условие $G_{ij}(x) \leq 0$ при $i \neq j$ для выполнения принципа максимума является существенным. В этом можно убедиться, рассмотрев краевую задачу

$$-\varepsilon u''_1 + u'_1 = 0, \quad -\varepsilon u''_2 + u'_2 + u_1 = 0, \quad u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 0, \quad u'_1(1) = 0, \quad u'_2(1) = 0.$$

Если определить $\Psi(x) = (u_1(x), u_2(x))$, $\varphi(x) = (\exp(x), \exp(x))$, то будут выполнены условия (1.5), (1.6), но при определенных x будет $u_2(x) < 0$.

Лемма 3. *Пусть для задачи* (1.1) *в дополнение к условиям* (3) *при всех* i *выполнены неравенства*

$$\sum_{j=1}^{N} G_{ij} \geq -\eta, \quad \eta > 0, \quad \alpha_0^2 - 4\eta\varepsilon \geq \gamma > 0, \quad G_{ij} \leq 0, \quad j \neq i. \tag{1.8}$$

Тогда для оператора L *из* (1.1) *справедлив принцип максимума и для решения задачи* (1.1) *верна оценка устойчивости*

$$\|\mathbf{u}(x)\|_\infty \leq \Gamma(x) = [\alpha_0^2(\eta\gamma)^{-1}\|\mathbf{F}\|_N + \|\mathbf{A}\|_\infty]\exp(2\eta\alpha_0^{-1}x) + \max_i\left|B_i(\delta_i + \alpha_0\beta_i/2)^{-1}\right|\exp[\alpha_0(2\varepsilon)^{-1}(x-1)].$$

Доказательство. Определим вектор-функцию $\varphi(x)$: $\varphi_i(x) = \exp(2\eta\alpha_0^{-1}x)$. Нетрудно убедиться, что для нее справедливы соотношения (1.5). Согласно лемме 2, для L справедлив принцип максимума. Определим $\Psi(x)$: $\Psi_i(x) = \Gamma(x) \pm u_i(x)$. При таком задании $\Psi(x)$ выполнятся неравенства (1.6) и, в силу принципа максимума, $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает лемму.

Получим оценку устойчивости для исходной задачи (1), (2). Пусть $G(x, u)$ – матрица Якоби вектор-функции $\mathbf{F}(x, \mathbf{u})$ из (1), $G_{ij} = \partial F_i/\partial u_j$. Будем рассматривать случаи, когда при всех x и $s \in \mathbb{R}^N$ для $G(x, s)$ выполнены условия (1.2) или (1.8).

Пусть $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ – две произвольные вектор-функции с компонентами из $C^1[0, 1] \cap Q^2[0, 1]$, $\mathbf{z} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$. Используя теорему о среднем значении, из (1), (2) получаем

$$L_\varepsilon\mathbf{z} = -\varepsilon\mathbf{z}'' + a(x)\mathbf{z}' + G(x, \xi(x))\mathbf{z} = T_\varepsilon\mathbf{p} - T_\varepsilon\mathbf{q}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{p}(0) - \mathbf{q}(0), \quad R_\varepsilon\mathbf{z} = R_\varepsilon\mathbf{p} - R_\varepsilon\mathbf{q}.$$

Пусть выполнены ограничения (3), (1.2). Тогда, в соответствии с леммой 1,

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_N \leq \sigma^{-1}[\eta^{-1}\|T_\varepsilon\mathbf{p} - T_\varepsilon\mathbf{q}\|_N + \|\mathbf{p}(0) - \mathbf{q}(0)\|_\infty + \max_i\left|(R_\varepsilon\mathbf{p} - R_\varepsilon\mathbf{q})_i(\delta_i + \alpha_i\beta_i)^{-1}\right|]. \tag{1.9}$$

В случае ограничений (3), (1.8), согласно лемме 3,

$$\begin{gathered}\|\mathbf{p}(x) - \mathbf{q}(x)\|_\infty \leq [\alpha_0^2(\eta\gamma)^{-1}\|T_\varepsilon\mathbf{p} - T_\varepsilon\mathbf{q}\|_N + \|\mathbf{p}(0) - \mathbf{q}(0)\|_\infty]\exp(2\eta\alpha_0^{-1}x) + \\ + \max_i\left|(R_\varepsilon\mathbf{p} - R_\varepsilon\mathbf{q})_i(\delta_i + \alpha_0\beta_i/2)^{-1}\right|\exp[\alpha_0(2\varepsilon)^{-1}(x-1)].\end{gathered} \tag{1.10}$$

Задавая $\mathbf{p} = \mathbf{u}$, $\mathbf{q} = 0$, в (1.9) или (1.10), получаем оценку устойчивости для решения задачи (1), (2):

$$\|\mathbf{u}\|_N \leq C[\|\mathbf{F}(x, 0)\|_N + \|\mathbf{A}\|_\infty + \|\mathbf{B}\|_\infty]. \tag{1.11}$$

Из оценок (1.9) и (1.10) следует единственность решения задачи (1), (2). Согласно [3], решение задачи (1), (2) существует, если найдутся нижнее и верхнее решения $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$, для которых

$$T_\varepsilon\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \leq 0, \quad T_\varepsilon\tilde{\boldsymbol{\beta}} \geq 0, \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(0) \leq \mathbf{A} \leq \tilde{\boldsymbol{\beta}}(0), \quad R_\varepsilon\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \leq \mathbf{B} \leq R_\varepsilon\tilde{\boldsymbol{\beta}}. \tag{1.12}$$

В случае условий (1.8) определим вектор-функцию $\tilde{\boldsymbol\alpha}(x)$ с компонентами

$$\tilde{\alpha}_i(x) = -\{[\alpha_0^2(\eta\gamma)^{-1}\|\mathbb{F}(x,0)\|_N + \|\mathbf{A}\|_\infty]\exp(2\eta\alpha_0^{-1}x) +$$

$$+\max_i\left|B_i(\delta_i + 0.5\alpha_0\beta_i)^{-1}\right|\exp[\alpha_0(2\varepsilon)^{-1}(x-1)]\},\quad \tilde{\boldsymbol\beta}(x) = -\tilde{\boldsymbol\alpha}(x).$$

В случае условий (1.2) определим

$$\tilde{\alpha}_i(x) = -\sigma^{-1}\{\eta^{-1}\|\mathbb{F}(x,0)\|_N + \|\mathbf{A}\|_\infty + \max_i\left|B_i(\delta_i + \alpha_0\beta_i)^{-1}\right|\exp[\alpha_0\varepsilon^{-1}(x-1)]\},\quad \tilde{\boldsymbol\beta}(x) = -\tilde{\boldsymbol\alpha}(x).$$

При таком задании $\tilde{\boldsymbol\alpha}$, $\tilde{\boldsymbol\beta}$ будут выполнены условия (1.12), что влечет существование решения задачи (1), (2). Остановимся, например, на случае условий (1.8). Докажем, что $T_\varepsilon\tilde{\boldsymbol\alpha} \le 0$. Это следует из того, что для некоторого ξ

$$T_\varepsilon\tilde{\boldsymbol\alpha} = -\varepsilon\tilde{\boldsymbol\alpha}'' + a(x)\tilde{\boldsymbol\alpha}' + G(x,\xi)\tilde{\boldsymbol\alpha} + \mathbb{F}(x,0) \le 0.$$

Нетрудно показать, что в случае выполнения условий (3) и (1.8) оператор T_ε обратно монотонен, т.е. из условий

$$T_\varepsilon\mathbf{p}(x) \ge T_\varepsilon\mathbf{q}(x),\quad x\in I,\quad \mathbf{p}(0)\ge\mathbf{q}(0),\quad R_\varepsilon\mathbf{p}\ge R_\varepsilon\mathbf{q}$$

следует $\mathbf{p}(x) \ge \mathbf{q}(x)$, $x \in I$.

2. ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Пусть Ω – произвольная сетка исходного интервала:

$$\Omega = \{x_n\colon x_n = x_{n-1} + h_n,\ x_0 = 0,\ x_M = 1,\ \Delta_n = (x_{n-1}, x_n]\},\quad h = \max_n h_n.$$

Для построения разностной схемы перейдем от (1) к системе уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$\tilde{T}_\varepsilon\mathbb{V} = -\varepsilon\mathbb{V}'' + \tilde{a}(x)\mathbb{V}' + \tilde{\mathbb{F}}(x,\mathbb{V}) = 0,\quad \mathbb{V}(0) = \mathbb{A},\quad R_\varepsilon\mathbb{V} = \mathbb{B}, \tag{2.1}$$

где $\tilde{a}(x)$ – диагональная квадратная матрица прядка N с диагональными элементами $\tilde{a}_i(x)$, $\tilde{\mathbf{F}}$ – вектор-функция,

$$\tilde{a}(x) = a_n = a(x_{n-1}),\quad \tilde{\mathbf{F}}(x,\mathbb{V}) = \mathbb{F}_n = \mathbb{F}(x_{n-1}, \mathbb{V}(x_{n-1})),\quad x\in\Delta_n,$$

a и $\mathbf{F}$ соответствуют (1).

Выписывая решение уравнения (2.1) на каждом интервале Δ_n, требуя непрерывности производной на границе интервалов Δ_n и Δ_{n+1}, подставляя найденное решение на последнем интервале в правое краевое условие (2.1), приходим к конечно-разностным соотношениям

$$A_nV^h(x_{n-1}) - B_nV^h(x_n) + D_nV^h(x_{n+1}) = f_n,\quad V^h(x_0) = A,$$

$$\delta V^h(x_M) + a_M\beta[E - \exp(-h_M\varepsilon^{-1}a_M)]^{-1}[V^h(x_M) - V^h(x_{M-1})] = \tag{2.2}$$

$$= B + \beta\{\varepsilon a_M^{-1} - h_M[E - \exp(-h_M\varepsilon^{-1}a_M)]^{-1}\}F(x_M),$$

где E – единичная матрица,

$$A_n = a_n[E - \exp(-h_n\varepsilon^{-1}a_n)]^{-1},\quad D_n = a_{n+1}[\exp(h_{n+1}\varepsilon^{-1}a_{n+1}) - E]^{-1},$$

$$B_n = A_n + D_n,\quad f_n = a_n^{-1}(h_nA_n - \varepsilon E)F(x_n) - a_{n+1}^{-1}(h_{n+1}D_n - \varepsilon E)F(x_{n+1}).$$

Оценим точность построенной схемы.

Теорема 1. *Пусть в дополнение к* (3) *для* $G(x, s)$, $s \in \mathbb{R}^N$, *выполнено условие* (1.2) *или* (1.8). *Тогда найдется* C *такое, что*

$$\left\|[\mathbf{u}]_\Omega - \mathbb{V}^h\right\|_{N\Omega} \le Ch. \tag{2.3}$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы верна оценка (1.11), влекущая ограниченность решения задачи (1), (2). Проводя рассуждения по аналогии со случаем одного уравнения

[1], получаем

$$|u_i'(x)| \le C_2\{1 + \varepsilon^{-1}\exp[\alpha_i\varepsilon^{-1}(x-1)]\}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.4}$$

Учитывая (2.4), нетрудно показать, что

$$\|\tilde{T}_\varepsilon \mathbb{u}(x) - \tilde{T}_\varepsilon \mathbb{V}(x)\|_\infty \le C_3 h\{1 + \varepsilon^{-1}\exp[\alpha_0\varepsilon^{-1}(x-1)]\}. \tag{2.5}$$

Остановимся на случае условий (1.2). Пусть $\mathbb{z} = \mathbb{u} - \mathbb{V}$. Используя теорему о среднем значении, получаем, что при $x \in \Delta_n$, $j = 1, 2, \ldots, N$

$$\tilde{L}_j z_j(x) = -\varepsilon z_j'' + \tilde{a}_j(x) z_j' + G_{jj}(x, \xi_n) z_j =$$

$$= (\tilde{T}_\varepsilon u - \tilde{T}_\varepsilon V)_j - \sum_{k \ne j} G_{jk}(x, \xi_n) z_k + \sum_{k=1}^{N} G_{jk}(x, \xi_n)\{[u_k(x) - u_k(x_{n-1})] - [V_k(x) - V_k(x_{n-1})]\}.$$

Учитывая, что для $\mathbb{V}(x)$, как и для $\mathbb{u}(x)$, справедлива оценка (2.4), используя (2.5), при $x \in \Delta_n$ получаем

$$|\tilde{L}_j z_j(x)| \le C_4 h\{1 + \varepsilon^{-1}\exp[\alpha_0\varepsilon^{-1}(x-1)]\} + \sum_{k \ne j} |G_{jk}(x, \xi_n) z_k(x)|.$$

Определим функцию

$$\Psi_j(x) = C_5 h\{1 + \exp[\alpha_0(2\varepsilon)^{-1}(x-1)]\} + \left\| \sum_{k \ne j} |G_{jk}(x, \xi(x)) z_k(x)| / G_{jj}(x, \xi(x)) \right\| \pm z_j(x).$$

Можно подобрать C_5 таким образом, что для оператора $\tilde{L}_j$ и функции Ψ_j выполнены условия (1.6). В силу принципа максимума, $\Psi_j(x) \ge 0$, следовательно, $\|\mathbf{u} - \mathbf{V}\|_N \le Ch$. Учитывая, что по построению $\mathbb{V}(x)$ является решением схемы (2.2), приходим к оценке (2.3).

Пусть выполнены условия (1.8), $\mathbb{z} = \mathbb{u} - \mathbb{V}$. Тогда

$$\tilde{L}\mathbb{z} = -\varepsilon \mathbb{z}'' + \tilde{a}(x)\mathbb{z}' + G(x, \xi)\mathbb{z} = \tilde{T}_\varepsilon \mathbb{u} - \tilde{T}_\varepsilon \mathbb{V} + \mathbb{F}(x, \mathbb{u}) - \tilde{\mathbf{F}}(x, \mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{F}}(x, \mathbf{V}) - \mathbf{F}(x, \mathbf{V}).$$

Нетрудно убедиться, что для оператора $\tilde{L}$ с краевыми условиями, соответствующими (2), справедлив принцип максимума. Учитывая (2.5), нетрудно показать, что

$$\|\tilde{L}\mathbb{z}(x)\|_\infty \le C_6 h\{1 + \varepsilon^{-1}\exp[\alpha_0\varepsilon^{-1}(x-1)]\}.$$

Определим вектор-функцию $\mathbf{\Psi}(x)$ с компонентами

$$\Psi_i(x) = C_7 h\{\exp[\alpha_0(2\varepsilon)^{-1}(x-1)] + \exp(2\eta\alpha_0^{-1}x)\} \pm z_i(x).$$

Можно подобрать C_7 таким образом, что для оператора $\tilde{L}$ и вектор-функции $\mathbf{\Psi}(x)$ будут выполнены условия (1.6). В силу принципа максимума, $\mathbf{\Psi}(x) \ge 0$. Это доказывает теорему.

3. СЛУЧАЙ СЛАБО ВЫРАЖЕННОГО ПОГРАНСЛОЯ

Остановимся на случае, когда в (2) правое краевое условие имеет вид $\mathbf{u}'(1) = 0$. Нетрудно показать, что при этом оценка производной (2.4) заменяется на следующую:

$$\left\| \frac{d^j}{dx^j}\mathbb{u}(x) \right\|_\infty \le C\{1 + \varepsilon^{1-j}\exp[\alpha_0\varepsilon^{-1}(x-1)]\}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{3.1}$$

из которой следует, что производные решения неограниченны равномерно, начиная со второй. Целесообразно исследовать на сходимость схему направленных разностей, которая проще схем с экспоненциальными подгонками. Выпишем эту схему:

$$\begin{aligned} T_n^h \mathbb{u}^h &= -\varepsilon\Lambda_{xx,n}\mathbb{u}^h + a_n\Lambda_{x,n}\mathbb{u}^h + \mathbb{F}(x_n, \mathbb{u}^h(x_n)) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, M-1, \\ \mathbb{u}^h(x_0) &= \mathbb{A}, \quad R^h\mathbb{u}^h = h_M^{-1}[\mathbb{u}^h(x_M) - \mathbb{u}^h(x_{M-1})] = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\mathbb{u}^h$ – сеточная вектор-функция, $a_n = a(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots, M-1$,

$$\Lambda_{x,n}\mathbb{u}^h = [\mathbb{u}^h(x_n) - \mathbb{u}^h(x_{n-1})]h_n^{-1}, \quad \Lambda_{xx,n}\mathbb{u}^h = [\Lambda_{x,n+1}\mathbb{u}^h - \Lambda_{x,n}\mathbb{u}^h]/[(h_n + h_{n+1})/2].$$

Лемма 4. *Пусть в дополнение к* (3) *для матрицы Якоби* G *выполнены ограничения* (1.2). *Пусть* $\mathbf{p}^h$, $\mathbf{q}^h$ *– две произвольные сеточные вектор-функции,* $\mathbf{z}^h = \mathbf{p}^h - \mathbf{q}^h$. *Тогда*

$$\|\mathbf{z}^h\|_{N,\Omega} \le \sigma^{-1}[\eta^{-1}\|T^h\mathbf{p} - T^h\mathbf{q}\|_{N,\Omega} + \|\mathbf{z}^h(x_0)\|_\infty + (2\varepsilon\alpha_0^{-1} + h_M)\|R^h\mathbf{z}^h\|_\infty]. \quad (3.3)$$

Доказательство. Вычисляя $T_n^h\mathbf{p}^h - T_n^h\mathbf{q}^h$ и используя теорему о среднем значении, можно записать

$$L_{ni}^h\mathbf{z}^h = -\varepsilon\Lambda_{xx,n}z_i^h + a_i(x_n)\Lambda_{x,n}z_i^h + G_{ii}(x_n, \xi_n^h)z_i^h(x_n) = (T_n^h\mathbf{p}^h - T_n^h\mathbf{q}^h)_i - \sum_{j\ne i} G_{ij}(x_n, \xi_n^h)z_j^h(x_n). \quad (3.4)$$

Определим сеточную вектор-функцию Ψ^h с компонентами

$$\Psi_i^h(x_n) = \eta^{-1}\|T^h\mathbf{p}^h - T^h\mathbf{q}^h\|_{N,\Omega} + \|\mathbf{z}^h(x_0)\|_\infty + (2\varepsilon\alpha_0^{-1} + h_M)\|R^h\mathbf{z}^h\|_\infty\omega_n +$$
$$+ \max_i \max_{x_n\in\Omega}\left|\sum_{j\ne i} G_{ij}(x_n, \xi_n^h)z_j^h(x_n)[G_{ii}(x_n, \xi_n^h)]^{-1}\right| \pm z_i^h(x_n),$$

где

$$\omega_n = \begin{cases} 1, & n = M, \\ \prod_{i=n+1}^{M}\left(1 + \dfrac{\alpha_0 h_i}{2\varepsilon}\right)^{-1}, & n < M. \end{cases}$$

При таком выборе Ψ^h выполнятся условия

$$L^h\Psi^h \ge 0, \quad \Psi^h(x_0) \ge 0, \quad R^h\Psi^h \ge 0.$$

В силу принципа максимума, покомпонентно $\Psi^h \ge 0$. Это доказывает лемму.

Из этой леммы следуют единственность и ограниченность решения схемы (3.2). Оценим точность этой схемы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3) *и для* $G(x, s)$, $s \in \mathbb{R}^N$, *справедливы ограничения* (1.2). *Пусть шаги сетки* Ω *удовлетворяют ограничению* $x_n + h_n \le 1$, $n = 1, 2, \ldots, M-1$. *Тогда найдется* C *такое, что*

$$\|[\mathbf{u}]_\Omega - \mathbf{u}^h\|_{N,\Omega} \le Ch. \quad (3.5)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{z}^h = \mathbf{u}^h - [\mathbf{u}]_\Omega$. Используя теорему о среднем значении, получим из (3.2) соотношение для произвольного i:

$$L_{ni}^h\mathbf{z}^h = (T_n^h\mathbf{u}^h - T_n^h[\mathbf{u}]_\Omega)_i - \sum_{j\ne i} G_{ij}(x_n, \xi_n^h)z_j^h(x_n) \quad \forall i, \quad (3.6)$$

где L_{ni}^h соответствует (3.4). Используя оценки производных (3.1), как и в случае одного уравнения (см. [5]), нетрудно получить

$$|(T_n^h\mathbf{u}^h - T_n^h[\mathbf{u}]_\Omega)_i| \le Ch\{1 + S_n^{-1}\exp[\alpha_0\varepsilon^{-1}(x_{n+1} - 1)]\}, \quad (3.7)$$

где $S_n = \max(h_n, \varepsilon)$, $0 < n < M$, $1 \le i \le N$.

Определим сеточные вектор-функции φ^h, ψ^h, θ^h с компонентами

$$\varphi_i^h(x_n) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{\alpha_0 h_i}{4\varepsilon}\right)\left[\prod_{i=1}^{M}\left(1 + \frac{\alpha_0 h_i}{4\varepsilon}\right)\right]^{-1},$$

$$\varphi_i^h(x_0) = \varphi_i^h(x_1)/[1 + \alpha_0 h_1/(4\varepsilon)],$$

$$\psi_i^h(x_0) = \psi_i^h(x_1)/[1 + \alpha_0 h_1/(4\varepsilon)], \quad n = 1, 2, \ldots, M,$$

$$\psi_i^h(x_n) = \varphi_i^h(x_n)\left(1 + \frac{\alpha_0 h_M}{4\varepsilon}\right), \quad \theta_i^h(x_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 + 2\eta\alpha_0^{-1}h_i), \quad \theta_i^h(x_0) = 1.$$

Учитывая условия теоремы, нетрудно показать, что для всех узлов x_n покомпонентно

$$L_n^h\varphi^h \ge CS_n^{-1}\varphi^h(x_n), \quad L_n^h\psi^h \ge CS_n^{-1}\psi^h(x_n), \tag{3.8}$$

$$\psi^h(x_n) \ge \exp[\alpha_0\varepsilon^{-1}(x_{n+1}-1)]. \tag{3.9}$$

Определим сеточную вектор-функцию Ψ^h с компонентами

$$\Psi_i^h(x_n) = C[\varphi_i^h(x_n)+\psi_i^h(x_n)+x_n]h + \max_i \max_{n\le M-1}\left|\sum_{j\ne i} G_{ij}(x_n,\xi_n^h)G_{ii}^{-1}(x_n,\xi_n^h)z_j^h(x_n)\right| \pm z_i^h(x_n).$$

Учитывая соотношение (3.6) и неравенства (3.7)–(3.9), для некоторого C получаем

$$L_n^h\Psi^h \ge 0, \quad n = 1, 2, \ldots, M-1. \tag{3.10}$$

Покажем, что при соответствующем выборе C

$$\Psi^h(x_0) \ge 0, \quad \Psi^h(x_M) - \Psi^h(x_{M-1}) \ge 0. \tag{3.11}$$

Первое неравенство очевидно. Нетрудно убедиться, что при всех i

$$\psi_i^h(x_M) - \psi_i^h(x_{M-1}) \ge 0, \quad \varphi_i^h(x_M) - \varphi_i^h(x_{M-1}) \ge C_1 h_M S_M^{-1}, \tag{3.12}$$

где $S_M = \max(h_M, \varepsilon)$. С другой стороны, при всех i

$$\left|z_i^h(x_M) - z_i^h(x_{M-1})\right| = \left|u_i(x_M) - u_i(x_{M-1})\right|,$$

$$\left|u_i(x_M) - u_i(x_{M-1})\right| \le C_2 h_M, \quad \left|u_i(x_M) - u_i(x_{M-1})\right| \le C_3 h_M^2\varepsilon^{-1}.$$

Применяя первое из этих неравенств при $\varepsilon \le h_M$ и второе при $\varepsilon > h_M$, учитывая (3.12), получаем (3.11). Итак, неравенства (3.10), (3.11) имеют место и, в силу принципа максимума, $\Psi_n^h \ge 0$ при всех n. Учитывая условия (1.2), нетрудно заключить, что

$$\max_i \max_{n\le M-1}\left|z_i(x_n)\right| \le C_4 h.$$

Требуемое неравенство (3.5) будет иметь место, если показать, что $|u_i(x_M) - u_i^h(x_M)| \le Ch$ при всех i. Это следует из неравенства

$$\left|u_i(x_M) - u_i^h(x_M)\right| \le \left|u_i(x_M) - u_i(x_{M-1})\right| + \left|u_i(x_{M-1}) - u_i^h(x_{M-1})\right|.$$

Теорема доказана.

Заметим, что ограничение на сетку Ω будет выполнено, если, например, $h_n \le h_M$ при всех n. Ограничение на Ω можно ослабить до следующего: $h_n \le q(1-x_n)$, где q – положительная постоянная, не зависящая от ε. Нетрудно убедиться (см. [5]), что при этом доказанная теорема останется в силе.

Остановимся на анализе схемы (3.2) в случае ограничений (1.8).

Сначала установим условие, когда для линейного оператора

$$L_{ni}^h\mathbf{z}^h = -\varepsilon_n\Lambda_{xx,n}z_i^h + a_i(x_n)\Lambda_{x,n}z_i^h + \sum_{k=1}^{N} G_{ik}z_k^h(x_n), \quad 1 \le i \le N, \quad 1 \le n \le M-1, \tag{3.13}$$

с краевыми условиями

$$z_i^h(x_0), \quad R_i^h z^h = \delta_i z_i^h(x_M) + \beta_i\Lambda_{x,M}z_i^h \tag{3.14}$$

справедлив принцип максимума. Предполагаем, что ε в (3.13) может быть функцией от узла сетки, что делает справедливой следующую лемму для большего числа разностных операторов (например, для оператора, соответствующего схеме А.А. Самарского [4]).

Лемма 5. *Предположим, что в* (3.13), (3.14) *при всех* i

$$\varepsilon_n > 0, \quad a_i(x_n) \ge 0, \quad \delta_i \ge 0, \quad \beta_i \ge 0, \quad \delta_i + \beta_i > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, M-1.$$

Пусть существует сеточная вектор-функция Φ^h *такая, что покомпонентно при всех* n

$$\Phi^h(x_n) > 0, \quad L_n^h\Phi^h > 0, \quad \Phi^h(x_M) > \Phi^h(x_{M-1}). \tag{3.15}$$

Тогда если для некоторой сеточной вектор-функции Ψ^h

$$\Psi^h(x_0) \ge 0, \quad L_n^h\Psi^h \ge 0, \quad n = 1, 2, \ldots, M-1, \quad R^h\Psi^h \ge 0, \tag{3.16}$$

то $\Psi^h(x_n) \ge 0$ *при всех* n.

Доказательство. Предположим, что какая-то компонента сеточной вектор-функции Ψ^h в каком-то узле отрицательна. Представим Ψ^h в виде $\Psi_i^h(x_n) = \Phi_i^h(x_n)V_i^h(x_n)$. Тогда для некоторой компоненты i и узла x_m выполнится

$$V_i^h(x_m) = \min_j \min_{x_n \in \Omega} V_j^h(x_n) < 0.$$

Покажем, что $m \ne M$. Предположим, что $V_i^h(x_M) < 0$. Из (3.16) следует, что $\Psi_i^h(x_M) \ge \Psi_i^h(x_{M-1})$. Учитывая (3.15), получаем $V_i^h(x_M) > V_i^h(x_{M-1})$. Следовательно, $m \ne M$. Минимум сеточной функции V_i^h достигается во внутреннем узле, поэтому

$$V_i^h(x_m) < 0, \quad \Lambda_{x,m}V_i^h \le 0, \quad \Lambda_{x,m+1}V_i^h \ge 0.$$

Нетрудно убедиться, что

$$L_{mi}^h\Psi^h = a_i(x_m)\Phi_i^h(x_{m-1})\Lambda_{x,m}V_i^h + V_i^h(x_m)L_{mi}^h\Phi^h - \frac{2\varepsilon_m}{h_m + h_{m+1}}\Phi_i^h(x_{m+1})\Lambda_{x,m+1}V_i^h +$$

$$+\frac{2\varepsilon_m}{h_m + h_{m+1}}\Phi_i^h(x_{m-1})\Lambda_{x,m}V_i^h + \sum_{k=1}^{N} G_{mk}\Phi_k^h(x_m)[V_k^h(x_m) - V_i^h(x_m)] < 0.$$

Это противоречит условиям (3.16). Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть для матрицы Якоби* G *выполнено условие* (1.8) *и*

$$\alpha_0^2 - (8\varepsilon + 2\alpha_0 h)\eta \ge \gamma > 0. \tag{3.17}$$

Пусть T^h *и* R^h *соответствуют схеме* (3.2), $\mathbf{p}^h$ *и* $\mathbf{q}^h$ – *две произвольные сеточные вектор-функции. Тогда при всех* n

$$\|\mathbf{p}^h(x_n) - \mathbf{q}^h(x_n)\|_\infty \le [3\alpha_0^2\eta^{-1}\gamma^{-1}\|T^h\mathbf{p}^h - T^h\mathbf{q}^h\|_{N,\Omega} + \|\mathbf{p}^h(x_0) - \mathbf{q}^h(x_0)\|_\infty]\exp(2\eta\alpha_0^{-1}x_n) +$$

$$+(4\alpha_0^{-1}\varepsilon + h_M)\|R^h\mathbf{p}^h - R^h\mathbf{q}^h\|_\infty \exp[-\alpha_0(\alpha_0 h + 4\varepsilon)^{-1}(1 - x_n)].$$

Доказательство. Определим $\mathbf{z}^h = \mathbf{p}^h - \mathbf{q}^h$. Тогда

$$L_n^h\mathbf{z}^h = T_n^h\mathbf{p}^h - T_n^h\mathbf{q}^h, \quad 0 < n < M, \tag{3.18}$$

где L^h задано согласно (3.13) с $\varepsilon_n = \varepsilon$. Учитывая условие (3.17), несложно показать, что при всех $n = 1, 2, \ldots, M-1$ выполнится

$$L_n^h\varphi^h \ge \gamma[10S_n]^{-1}\varphi_n^h, \quad L_n^h\theta^h \ge \eta\gamma[2\alpha_0^2]^{-1}\theta_n^h, \tag{3.19}$$

где $S_n = \max(\alpha_0 h_n, \varepsilon)$. Согласно лемме 5, для оператора L^h справедлив принцип максимума. Покажем, что при всех i

$$\varphi_i^h(x_n) \le \exp[-\alpha_0(\alpha_0 h + 4\varepsilon)^{-1}(1 - x_n)].$$

Это следует из того, что $\varphi_i^h(x_M) = 1$, а при $n < M$

$$\ln\varphi_i^h(x_n) = \sum_{i=n+1}^{M} \ln\left(1 - \frac{\alpha_0 h_i}{4\varepsilon + \alpha_0 h_i}\right) \le -\sum_{i=n+1}^{M} \frac{\alpha_0 h_i}{4\varepsilon + \alpha_0 h_i}.$$

Используя (3.18), (3.19), на основании принципа максимума приходим к утверждению леммы.

Теорема 3. *Пусть выполнены ограничения* (3) *и для* $G(x, \mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$, *справедливы соотношения* (1.8). *Пусть выполнены условия* (3.17) *и шаги сетки* Ω *удовлетворяют ограничению* $x_n + h_n \le 1$. *Тогда для схемы* (3.2) *справедлива оценка точности*

$$\|[\mathbf{u}]_\Omega - \mathbf{u}^h\|_{N,\Omega} \le Ch.$$

Доказательство. Для погрешности аппроксимации справедлива оценка (3.7). Определяя

$$\Psi^h = C(\theta^h + \varphi^h + \psi^h)h \pm \mathbf{z}^h,$$

где φ^h, ψ^h и θ^h определены в теореме 2, учитывая (3.19), используя принцип максимума и подбирая подходящую постоянную C, приходим к утверждению теоремы.

При доказательстве теорем 2, 3 условия (1.2), (1.8) для $G(x, \mathbf{s})$ используются только для $\mathbf{s}$ между $[\mathbf{u}]_\Omega$ и $\mathbf{u}^h$. Доказывается, что при их выполнении точное и сеточное решения отличаются на величину порядка $O(h)$, поэтому $\|\mathbf{s} - [\mathbf{u}]_\Omega\|_{N,\Omega} \le Ch$. С другой стороны, условия (1.2) и (1.8) устойчивы к малым изменениям элементов матрицы $G(x, \mathbf{u})$ (для (1.8) необходимо $G_{ij}(x, \mathbf{u}) < 0$ при $i \ne j$). Например, в случае условий (1.2) нетрудно показать, что если

$$\tilde{G}_{ij} = G_{ij} + \Delta_{ij}, \quad G_{ii}^{-1}\sum_{j=1}^{N}|\Delta_{ij}| < \sigma, \quad |\Delta_{ii}| < \eta,$$

то

$$\tilde{G}_{ii} \ge \tilde{\eta} > 0, \quad \sum_{j \ne i}|\tilde{G}_{ij}| \le (1-\tilde{\sigma})\tilde{G}_{ii}, \quad 0 < \tilde{\sigma} < 1.$$

Следовательно, если схема (3.2) сходится, то для достаточно малых h матрицы $G(x, [\mathbf{u}]_\Omega)$ и $G(x, \mathbf{s})$, $x \in \Omega$, обладают свойством (1.2) при (1.8) одновременно. Поэтому если условия (1.2), (1.8) не выполнены при всех $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$, то для сходимости разностной схемы необходимо потребовать выполнения (1.2) или (1.8) для $G(x, \mathbf{u})$. Аналогичные рассуждения относятся к схеме (2.2).

Для нахождения решения нелинейной схемы (2.2) или (3.2) нужно использовать метод линеаризации из [6]. Остановимся на схеме (3.2). Предположим, что, в дополнение к условиям (1.2), $\eta \le G_{ii}(x) \le R$, $\eta/R > 1 - \sigma$. Можно показать, что итерационный процесс

$$\begin{gathered} -\varepsilon\Lambda_{xx,n}\mathbf{u}^{k+1} + a(x_n)\Lambda_{x,n}\mathbf{u}^{k+1} + R\mathbf{u}^{k+1}(x_n) = R\mathbf{u}^k(x_n) - \mathbf{F}(x_n, \mathbf{u}^k(x_n)), \\ \mathbf{u}^{k+1}(x_0) = \mathbb{A}, \quad \mathbf{u}^{(k+1)}(x_M) - \mathbf{u}^{(k+1)}(x_{M-1}) = 0 \end{gathered} \tag{3.20}$$

при любом начальном приближении сходится к решению схемы (3.2) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = 2 - \sigma - \eta/R$. На каждом шаге итерации для нахождения решения можно использовать метод прогонки [4], который для данной системы уравнений устойчив в силу диагонального преобладания.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Рассмотрена система двух нелинейных уравнений для случаев, когда для матрицы Якоби $G(x, \mathbf{u})$ выполнены условия (1.2) или (1.8). Вычислялась погрешность построенной схемы (2.2) и схемы направленных разностей (3.2) при задании краевых условий I рода, когда имеется экспоненциальный погранслойный рост решения, и в случае $\mathbf{u}'(1) = 0$, когда пограничный слой слабо выражен.

Погрешность $\mathbf{z}^h = \mathbf{u}^h - [\mathbf{u}]_\Omega$ является сеточной вектор-функцией, и под ее нормой подразумевается $\|\mathbf{z}^h\|_{2,\Omega}$, которая определена выше. Решение разностной схемы во всех экспериментах находилось на основе модифицированного метода Пикара. В случае схемы (3.2) этот метод имеет вид (3.20). Итерации продолжались, если не выполнялось условие $\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_{2,\Omega} < 10^{-8}$. Итерационный метод сходился, если $R \ge 1$ в (3.20), и не сходился при $R = 0$. Сетка Ω предполагалась равномерной.

Сначала рассмотрим случай условий в (1.2). Рассматриваемая система имеет вид

$$-\varepsilon u_1'' + u_1' + u_1 + 0.5\exp(-u_2) + f_1(x) = 0, \quad -\varepsilon u_2'' + 2u_2' + 0.5u_1 + \exp(u_2) + f_2(x) = 0, \tag{4.1}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ зависят от вида решения.

Остановимся на случае краевых условий I рода с решением системы уравнений (4.1) вида

$$u_1(x) = \exp[\varepsilon^{-1}(x-1)] + \cos(0.5\pi x), \quad u_2(x) = -\exp[2\varepsilon^{-1}(x-1) + 1] + \exp(x). \tag{4.2}$$

Таблица 1

ε \ h	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.24E-1	0.12E-1	0.24E-2	0.12E-2
1.0E-1	0.42E-1	0.21E-1	0.44E-2	0.22E-2
1.0E-2	0.44E-1	0.23E-1	0.47E-2	0.23E-2
1.0E-3	0.44E-1	0.23E-1	0.47E-2	0.23E-2

Таблица 2

ε \ h	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.24E-1	0.13E-1	0.27E-2	0.14E-2
1.0E-1	0.38	0.29	0.74E-1	0.38E-1
1.0E-2	0.44E-1	0.18	0.51	0.35
1.0E-3	0.45E-1	0.23E-1	0.12	0.24

Таблица 3

ε \ h	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.60E-1	0.30E-1	0.60E-2	0.30E-2
1.0E-1	0.18	0.89E-1	0.17E-1	0.85E-2
1.0E-2	0.22	0.11	0.23E-1	0.11E-1
1.0E-3	0.23	0.12	0.24E-1	0.12E-1

Таблица 4

ε \ h	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.24E-1	0.12E-1	0.24E-2	0.12E-2
1.0E-1	0.12	0.50E-1	0.84E-2	0.41E-2
1.0E-2	0.18	0.99E-1	0.18E-1	0.90E-2
1.0E-3	0.18	0.97E-1	0.20E-1	0.10E-1

Таблица 5

ε \ h	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.86E-1	0.45E-1	0.92E-2	0.46E-2
1.0E-1	0.19	0.94E-1	0.18E-1	0.91E-2
1.0E-2	0.32	0.16	0.34E-1	0.17E-1
1.0E-3	0.33	0.17	0.36E-1	0.18E-1

В табл. 1 приведена норма погрешности схемы (2.2) в зависимости от ε и шага h сетки. Данные этой таблицы подтверждают оценку (2.3). В табл. 2 для сравнения приведена норма погрешности схемы (3.2). Вычисления подтверждают, что эта схема не сходится равномерно по ε.

Остановимся на случае $u_1'(1) = 0$, $u_2'(1) = 0$. Решение (4.1) задавалось в виде

$$u_1(x) = 0.5\pi\varepsilon\exp[\varepsilon^{-1}(x-1)] + \cos(0.5\pi x), \quad u_2(x) = -0.5\varepsilon\exp[2\varepsilon^{-1}(x-1)+1] + \exp(x). \tag{4.3}$$

В табл. 3 приведена норма погрешности схемы (3.2) в зависимости от ε и шага сетки. Результаты вычислений подтверждают равномерную сходимость схемы с оценкой точности (3.5).

Далее был рассмотрен случай условий (1.8) для матрицы Якоби. Исследуемая система имеет вид

$$-\varepsilon u_1'' + u_1' + 0.5u_1 - \exp(u_2) + f_1(x) = 0, \quad -\varepsilon u_2'' + 2u_2' - u_1 + 0.5\exp(-u_2) + f_2(x) = 0, \tag{4.4}$$

где, как и ранее, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ зависят от вида решения.

Сначала остановимся на случае краевых условий I рода с решением (4.2). В табл. 4 приведена норма погрешности схемы (2.2) в зависимости от ε и шага h сетки. Результаты вычислений подтверждают оценку (2.3).

Теперь остановимся на случае $u_1'(1) = 0$, $u_2'(1) = 0$, когда решение задаем согласно (4.3). В табл. 5 приведена норма погрешности схемы (3.2) при различных ε и h. Результаты вычислений подтверждают оценку (3.5) в случае выполнения условий (1.8).

Численные эксперименты в случае нелинейной задачи, когда условие (1.2) выполнено для $G(x, \mathbf{s})$ при всех $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$, привели к аналогичным результатам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Задорин А.И., Игнатьев В.Н.* Численное решение квазилинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 1. С. 157–160.
2. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841–890.
3. *Чанг К., Хауэс Ф.* Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. М.: Мир, 1988.
4. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
5. *Задорин А.И.* Численное решение обыкновенного уравнения второго порядка со слабо выраженным пограничным слоем // Моделирование в механ. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1991. Т. 5. № 1. С. 141–152.
6. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.