Математические структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.13-19.

УДК 519.62

ПЕРЕНОС КРАЕВОГО УСЛОВИЯ ИЗ БЕСКОНЕЧНОСТИ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

А.И. Задорин

The ordinary differential equation of the second order with a small parameter affecting the highest derivative on the infinite interval is considered. Method of the transition of the boundary conditions to the conditions for a finite interval is proposed. The estimates of the replacement error are got.

При математическом моделировании различных физических явлений, таких как распространение примеси от источника, процесс распространения пламени, краевые условия ставятся на бесконечности. При решении дифференциальных уравнений для таких задач конечно-разностным методом необходимо сформулировать граничные условия на границе ограниченной области. При этом требуется оценить погрешность, совершаемую при переносе граничных условий из бесконечности.

В случае полубесконечного интервала вопрос переноса краевого условия из бесконечности рассматривался в ряде работ, например, в [1]. При корректной постановке краевой задачи с предельным условием на бесконечности должно быть гарантировано, что это предельное условие выделяет однопараметрическое семейство решений исходного уравнения и что значения этих решений порождают в окрестности особой точки одномерное устойчивое многообразие. Условие, что значения решений при определенных значениях аргумента принадлежат этому многообразию, дает граничное условие в конечной точке.

В данной работе рассматривается линейное уравнение второго порядка с малым параметром на полубесконечном интервале. Оценена погрешность, возникающая при переносе краевого условия из бесконечности. Показано, как эта погрешность влияет на решение дифференциальной задачи и на решение разностной схемы.

Всюду под C и C_i понимаются положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов разностной сетки. Под нормой функции $p(x)$ подразумевается

E-mail: zadorin@iitam.omsk.net.ru

$\|p\| = \max|p(x)|$, где x пробегает область определения функции.

Итак, рассмотрим исходную краевую задачу:

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)u = f(x),\ u(0) = A,\ \lim_{x\to\infty} u(x) = 0. \tag{1}$$

Предполагаем достаточную гладкость a, c, f,

$$D \geq a(x) \geq \alpha > 0,\ \varepsilon \in (0,1],\quad B \geq c(x) \geq b > 0,$$
$$f(x) \to 0,\quad a(x) \to a_0,\quad c(x) \to c_0,\quad x \to \infty.$$

Согласно [1], при наложенных ограничениях существует единственное решение задачи (1). Остановимся на свойствах решения задачи (1).

Лемма 1. *При всех* $x \geq 0$

$$|u(x)| \leq |A| + ||f(x)/c(x)||. \tag{2}$$

Доказательство. Определим

$$\Psi(x) = |A| + ||f(x)/c(x)|| \pm u(x).$$

Тогда

$$\Psi(0) \geq 0,\ \lim_{x\to\infty} \Psi(x) \geq 0,\ L_\varepsilon\Psi(x) \geq 0,\ 0 < x < \infty.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0,\ x \geq 0$. Это доказывает лемму. ∎

Для решения задачи (1) с помощью разностной схемы необходимо перейти от (1) к краевой задаче на конечном интервале. Согласно подходу [4], краевое условие на бесконечности выделяет одномерное многообразие решений уравнения (1) согласно соотношению:

$$u'(x) = \gamma(x)u(x) + \beta(x), \tag{3}$$

где $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ являются решениями сингулярных задач Коши:

$$R_\varepsilon\gamma = \varepsilon\gamma' - a\gamma + \varepsilon\gamma^2 - c = 0,\ \lim_{x\to\infty}\gamma(x) = r, \tag{4}$$

где r - отрицательный корень уравнения $\varepsilon r^2 - a_0 r - c_0 = 0$,

$$\varepsilon\beta' - [a(x) - \gamma\varepsilon]\beta = f(x),\ \lim_{x\to\infty}\beta(x) = 0. \tag{5}$$

Можно показать, что

$$\gamma(x) \leq \frac{-2b}{D + \sqrt{D^2 + 4b\varepsilon}},\ |\gamma(x)| \leq B/\alpha,\ |\beta(x)| \leq \left\|\frac{f(x)}{a(x)}\right\|. \tag{6}$$

Используя (1) и (3), можно получить для произвольного $L \geq 0$ и $x \geq L$:

$$|u(x)| \leq |u(L)|\exp[-\beta_0(x-L)] + \int_L^x |\beta(s)|\exp[-\beta_0(x-s)]ds,\quad \beta_0 > 0,$$

где β_0 соответствует оценке $\gamma(x) \leq -\beta_0$, согласующейся с (6). С учетом (3) задачу (1) можно записать на конечном интервале $[0, L_0]$:

$$-\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)u = f(x),$$
$$u(0) = A,\ u'(L_0) - \gamma(L_0)u(L_0) = \beta(L_0). \tag{7}$$

При переходе от (1) к задаче на конечном интервале $[0, L_0]$ значения $\gamma(L_0)$ и $\beta(L_0)$ могут быть найдены с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на решение задачи (7).

Итак, рассмотрим краевую задачу с возмущенными значениями $\gamma(L_0)$ и $\beta(L_0)$:

$$-\varepsilon\tilde{u}'' + a(x)\tilde{u}' + c(x)\tilde{u} = f(x),$$
$$\tilde{u}(0) = A,\ \tilde{u}'(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)\tilde{u}(L_0) = \tilde{\beta}(L_0). \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть*

$$\tilde{\gamma}(L_0) \leq 0,\ |\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)| \leq \Delta_1,\ |\beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0)| \leq \Delta_2.$$

Тогда при всех $x \in [0, L_0]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \ \varepsilon\alpha^{-1}\{\Delta_2 + \Delta_1|u(L_0)|\}\exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_0)]. \tag{9}$$

Доказательство. Определим $z = u - \tilde{u}$. Тогда $z(x)$ является решением задачи:

$$L_\varepsilon z = 0, z(0) = 0, z'(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)z(L_0) = \beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0) + (\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0))u(L_0).$$

Определим барьерную функцию:

$$\Psi(x) = \{\Delta_2 + \Delta_1|u(L_0)|\}\varepsilon\alpha^{-1}\exp[\varepsilon^{-1}\alpha(x - L_0)] \pm z(x).$$

Тогда

$$\Psi(0) \geq 0, \quad \Psi'(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)\Psi(L_0) \geq 0, \quad L_\varepsilon\Psi(x) \geq 0,\ 0 < x < L_0.$$

Из принципа максимума следует $\Psi(x) \geq 0,\ L_0 \geq x \geq 0$. Теорема доказана. ■

Используя принцип максимума, нетрудно показать, что

$$|\beta(x)| \leq \max_{s \geq L_0}\left|\frac{f(s)}{a(s)}\right| \text{ при } x \geq L_0.$$

На практике часто в точке L_0 задают условие $\tilde{u}'(L_0) = 0$ или $\tilde{u}(L_0) = 0$. В соответствии с доказанной теоремой в случае условия $\tilde{u}'(L_0) = 0$ выполнится оценка:

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \alpha^{-2}\{\max_{s \geq L_0}|f(s)| + B|u(L_0)|\}\varepsilon\exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_0)].$$

Нетрудно показать, что в случае условия $\tilde{u}(L_0) = 0$ выполнится

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq |u(L_0)| \exp[\alpha \varepsilon^{-1}(x - L_0)].$$

Для решения задачи (7) может быть использована разностная схема. Дифференциальное уравнение (7) содержит малый параметр при старшей производной, однако в силу краевого условия пограничный слой для этой задачи слабо выражен - производная $u'(x)$ ограничена равномерно по параметру ε, вторая производная не ограничена равномерно по ε. В соответствии с [5] в случае равномерной сетки схема направленных разностей сходится равномерно по параметру ε с первым порядком. Исследуем устойчивость решения этой схемы к возмущению коэффициентов γ и β.

Итак, на равномерной сетке Ω выпишем схему направленных разностей:

$$L_n^h u^h = -\varepsilon \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} + a_n \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} + c_n u_n^h = f(x_n),$$

$$u_0^h = A, \ \frac{u_N^h - u_{N-1}^h}{h} - \gamma(L_0) u_N^h = \beta(L_0). \tag{10}$$

Пусть $\tilde{u}^h$ - решение схемы (10) в случае возмущенных коэффициентов $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\beta}$.

Теорема 2. *Пусть*

$$\tilde{\gamma}(L_0) \leq 0, \quad |\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)| \leq \Delta_1, \quad |\beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0)| \leq \Delta_2.$$

Тогда при всех $n = 0, 1, ..., N$

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq (\varepsilon + \alpha h)\alpha^{-1}\{\Delta_2 + \Delta_1 |u_N^h|\} \exp[\alpha(\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_0)]. \tag{11}$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда z^h является решением задачи:

$$L_n^h z^h = 0, \ z_0^h = 0, \ \frac{z_N^h - z_{N-1}^h}{h} - \tilde{\gamma}(L_0) z_N^h = \beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0) + (\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)) u_N^h.$$

Определим барьерную функцию Ψ^h:

$$\Psi_n^h = \{\Delta_2 + \Delta_1 |u_N^h|\}(\varepsilon + \alpha h)\alpha^{-1}\Phi_n^h \pm z_n^h,$$

где

$$\Phi_n^h = \left(1 + \frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)^{n-N}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$L_n^h \Psi^h \geq 0, \ n = 1, 2, ..., N-1, \quad \Psi_0^h \geq 0, \quad \frac{\Psi_N^h - \Psi_{N-1}^h}{h} - \tilde{\gamma}(L_0)\Psi_N^h \geq 0.$$

В силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает теорему. ■

Остановимся на случае краевого условия Неймана $\tilde{u}_N^h = \tilde{u}_{N-1}^h$. В соответствии с теоремой 2 при таком переносе краевого условия из бесконечности выполнится оценка точности:

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq \ (\varepsilon + \alpha h)\alpha^{-2}\{\max_{s \geq L_0}|f(s)| + B|u_N^h|\}\exp[\alpha(\varepsilon+\alpha h)^{-1}(x_n - L_0)]. \quad (12)$$

В случае условия Дирихле $\tilde{u}_N^h = 0$ справедлива оценка точности:

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq |u_N^h|\exp[\alpha(\varepsilon+\alpha h)^{-1}(x_n - L_0)].$$

Остановимся на вопросе приближенного решения задачи (4). Перейдем от (4) к уравнению с возмущенными коэффициентами:

$$\varepsilon\tilde{\gamma}' - \tilde{a}\tilde{\gamma} + \varepsilon\tilde{\gamma}^2 - \tilde{c} = 0, \ \lim_{x\to\infty}\tilde{\gamma}(x) = r. \quad (13)$$

Предполагаем, что

$$\tilde{a}(x) \to a_0, \ \tilde{c}(x) \to c_0, \ x \to \infty, \ \tilde{a} \geq \tilde{\alpha} > 0, \ \tilde{c} \geq \tilde{b} > 0.$$

Понятно, что (13) является аналогом уравнения (4) в случае возмущенных коэффициентов в уравнении (1), поэтому $\tilde{\gamma}(x) \leq 0, \ |\tilde{\gamma}(x)| \leq \tilde{B}/\tilde{\alpha}$.

Пусть

$$|a(x) - \tilde{a}(x)| \leq \Delta, \ |c(x) - \tilde{c}(x)| \leq \Delta. \text{ для } x \geq L_0.$$

Покажем, что тогда найдется C:

$$|\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \leq C\Delta \text{ для } x \geq L_0. \quad (14)$$

Пусть $z = \gamma - \tilde{\gamma}$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' - [a - \varepsilon(\gamma + \tilde{\gamma})]z = c - \tilde{c} + (a - \tilde{a})\tilde{\gamma}, \quad \lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

Применяя принцип максимума к оператору R_ε, нетрудно показать:

$$|z(x)| \leq \Delta\alpha^{-1}(1 + \|\tilde{c}\|\tilde{\alpha}^{-1}) \text{ при } x \geq L_0,$$

откуда следует (14).

Если при достаточно больших x справедливы представления:

$$a(x) \approx \tilde{a}(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^{-i}, \ c(x) \approx \tilde{c}(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i x^{-i}, \quad (15)$$

то $\gamma(x)$ может быть приближенно найдено в виде [3]:

$$\gamma(x) \approx \tilde{\gamma}(x) = \sum_{i=0}^{N} \gamma_i x^{-i}.$$

Для этого необходимо подставить разложения a, c в (4) и получим рекуррентную формулу относительно γ_i.

Для приближенного нахождения $\gamma(x)$ можно использовать малость параметра ε. Пусть $\gamma_0(x)$ - отрицательное решение уравнения:

$$-a(x)\gamma_0(x) + \varepsilon\gamma_0^2(x) - c(x) = 0.$$

Лемма 2. *Найдется C такое, что при всех x* $|\gamma(x)-\gamma_0(x)|\le C\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $z=\gamma-\gamma_0$. Тогда

$$T_\varepsilon z=\varepsilon z'-az=\varepsilon(\gamma_0^2-\gamma^2)+R_\varepsilon\gamma-R_\varepsilon\gamma_0,\ \lim_{x\to\infty}z(x)=0,$$

где R_ε соответствует (4). Для оператора T_ε справедлив принцип максимума:

$$\lim_{x\to\infty}\Psi(x)\ge 0,\ T_\varepsilon\Psi(x)\le 0,\ x<\infty\Rightarrow\Psi(x)\ge 0.$$

Определим

$$\Psi(x)=\alpha^{-1}\|\varepsilon(\gamma_0^2-\gamma^2)-\varepsilon\gamma_0'\|\pm z(x).$$

В силу принципа максимума

$$|z(x)|\le\varepsilon\alpha^{-1}\|\gamma_0^2-\gamma^2-\gamma_0'\|. \tag{16}$$

Функция $\gamma_0(x)$ ограничена вместе с производной равномерно по ε. Учитывая, что $|\gamma(x)|\le C$, из (16) получим утверждение леммы. ■

Теперь остановимся на вопросе нахождения $\beta(x)$ из (5). Перейдем от (5) к уравнению с возмущенными коэффициентами:

$$\varepsilon\tilde\beta'-[\tilde a(x)-\tilde\gamma\varepsilon]\tilde\beta=\tilde f(x),\ \lim_{x\to\infty}\tilde\beta(x)=0. \tag{17}$$

Предполагаем, что

$$\tilde a(x)\to a_0,\ \tilde\gamma(x)\to r,\ \tilde f(x)\to 0,\ x\to\infty,\ \tilde a\ge\tilde\alpha>0,\tilde\gamma(x)\le 0.$$

Пусть для $x\ge L_0$

$$|a(x)-\tilde a(x)|\le\Delta,\ |f(x)-\tilde f(x)|\le\Delta,\ |\gamma(x)-\tilde\gamma(x)|\le\Delta_1.$$

Покажем, что тогда найдется C:

$$|\beta(x)-\tilde\beta(x)|\le C[\Delta+\Delta_1\varepsilon]\ \text{ для } x\ge L_0. \tag{18}$$

Пусть $z=\beta-\tilde\beta$. Тогда

$$R_\varepsilon z=\varepsilon z'-[a-\varepsilon\gamma]z=f-\tilde f+\tilde\beta(a-\tilde a)+\tilde\beta\varepsilon(\tilde\gamma-\gamma),\quad \lim_{x\to\infty}z(x)=0.$$

Применяя принцип максимума к оператору R_ε, нетрудно получить оценку (18).

При достаточно больших x функция $\beta(x)$ может быть найдена на основе разложения коэффициентов $a,\ \gamma,\ f$ в ряд по степеням x^{-1} по аналогии с $\gamma(x)$.

Для нахождения $\beta(x)$ можно использовать и малость параметра ε. Пусть

$$\beta(x)\approx\sum_{n=0}^{N}\beta_n\varepsilon^n.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (5), получим:

$$\beta_{n+1} = \frac{\beta_n' + \gamma\beta_n}{a}, \quad \beta_0(x) = -\frac{f(x)}{a(x)}.$$

На основании принципа максимума нетрудно показать, что для некоторой постоянной C при всех x

$$\left|\beta(x) - \sum_{n=0}^{N} \beta_n \varepsilon^n\right| \leq C\varepsilon^{N+1}.$$

Литература

1. Клоков Ю.А. *Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики.* – Рига, 1963.

2. Абрамов А.А. *О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки)* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т.1. N 3. С.542-545.

3. Биргер Е.С., Ляликова Н.Б. *О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т.5. N 6. С.979-990.

4. Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б. *Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1981.

5. Задорин А.И. *Численное решение обыкновенного уравнения второго порядка со слабо выраженным пограничным слоем* // Моделирование в механике. Новосибирск: ИТПМ СО РАН СССР, 1991. Т.5. N 1. С.141-152.

6. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1983.