ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2000, том 40, № 4, с. 546–556

УДК 519.624.2

РЕДУКЦИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ВЕКТОРНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КОНЕЧНОМУ ЧИСЛУ УЗЛОВ

© 2000 г. **А. И. Задорин**

(644099 Омск, ул. Певцова, 13, Омский фил. Ин-та матем. СО РАН)

Поступила в редакцию 25.02.99 г.
Переработанный вариант 03.11.99 г.

В векторном виде рассматривается краевая задача для разностного уравнения второго порядка в случае бесконечного числа узлов. Такая задача соответствует, например, сеточной аппроксимации двумерного эллиптического уравнения в полубесконечной полосе с условием стремления решения к нулю на бесконечности. Предлагается способ редукции задачи к конечному числу узлов. Отдельно рассматривается случай, когда разностное уравнение вырождается в уравнение первого порядка при стремлении некоторого параметра к нулю. В этом случае при решении вспомогательных начальных задач для разностных уравнений первого порядка используются асимптотические разложения.

Краевые задачи для двумерных эллиптических уравнений в полубесконечной полосе возникают, например, при численном моделировании распространения примеси от источников загрязнений в направлении ветра [1]. При численном решении такой задачи можно либо редуцировать задачу к задаче для конечной области, а затем построить подходящую разностную схему на сетке с конечным числом узлов, либо строить разностную схему для исходной неограниченной области. В этом случае необходимо редуцировать построенную схему к схеме на сетке с конечным числом узлов.

Способ решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка путем переноса граничных условий восходит к [2]. Вопрос переноса краевых условий из бесконечности для уравнений с частными производными рассматривался в ряде работ, например в [3], [4]. В [3] рассматривается уравнение Гельмгольца в полуцилиндре. Рассматриваются условия убывания решения и излучения на бесконечности. Формируется эквивалентное условие на некотором сечении волновода. В [4] для уравнения Гельмгольца и бигармонического уравнения найдены краевые условия, эквивалентные условиям излучения. Другие работы по переносу условий из бесконечности отражены в списках литературы указанных работ. В [5] рассматривалась краевая задача для эллиптического уравнения с малыми параметрами при старших производных в полуполосе с предельным нулевым условием на бесконечности. Задача сводилась к прямоугольной области, а затем для редуцированной задачи строилась равномерно сходящаяся схема.

Работы, посвященные дальнейшему развитию техники переноса граничных условий в задачах для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, представлены в обзорах [6], [7]. В [6] и в ряде других работ данных авторов для переноса предельного краевого условия из бесконечности выделяется устойчивое многообразие решений исходной системы, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Условие принадлежности решения данному многообразию при определенном значении аргумента дает граничное условие на конечной точке. Для построения указанного многообразия необходимо решать вспомогательные сингулярные задачи Коши. В [8] рассматриваются сингулярные задачи Коши с большим параметром для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение задачи ищется в виде асимптотического ряда по степеням параметра. В [9] рассматриваются сингулярные задачи Коши для сингулярно возмущенных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказываются теоремы существования и единственности решения, исследуется зависимость решения от параметра. В [10] рассматривается система линейных уравнений, на одном из концов интервала матрица системы имеет особенность. Предложен численный метод нахождения краевого условия вблизи особенностей. Метод основан на итерационной процедуре, использует не аналитическое представление матрицы, а возможность вычислять ее значение для конкретных значений аргумента.

В [11]–[13] рассматриваются разностные уравнения с полубесконечным числом узлов. В [11] исследуется асимптотическое поведение решения скалярных разностных уравнений Риккати. Для разностного уравнения второго порядка строится разностное уравнение первого порядка, которое описывает поведение решения исходного уравнения для достаточно больших значений аргумента. В [12] рассмотрена схема с весами для параболического уравнения в случае, когда пространственная переменная принадлежит полупрямой. Эта схема записывается в виде векторного разностного уравнения второго порядка. Как и в [11], исследуется поведение решения разностного уравнения при достаточно больших значениях аргумента. В [13] исследуется асимптотическое поведение решения матричного разностного уравнения Риккати.

В данной работе в векторном виде рассматривается краевая задача для разностного уравнения второго порядка в случае полубесконечного числа узлов. Такая задача соответствует предварительной сеточной аппроксимации двумерного эллиптического уравнения в полубесконечной полосе. Для перехода к краевой задаче с конечным числом узлов предлагается использовать подход, применяемый в [6] в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Определим многообразие решений исходного разностного уравнения, для которых выполняется предельное условие при стремлении индекса к бесконечности. Это многообразие будет задаваться как векторное разностное уравнение первого порядка, что позволит перейти к краевой задаче на сетке с конечным числом узлов или в задаче Коши для выделенного многообразия.

В случае когда исходное разностное уравнение вырождается в уравнение первого порядка при стремлении некоторого параметра к нулю, вспомогательные начальные задачи предлагается решать с использованием асимптотических разложений по малому параметру по аналогии с тем, как это делалось в [8], а затем в [14] при рассмотрении краевых задач для дифференциальных уравнений.

Определим норму вектора:

$$\|Z\| = \max_j |Z^j|, \text{ где } 1 \le j \le N.$$

Для матрицы G порядка N определим норму, согласованную с векторной нормой:

$$\|G\| = \max_i \sum_{j=1}^{N} |G_{ij}|.$$

Под неравенством векторов будем понимать покомпонентное неравенство. Пусть C_i – положительные постоянные, не зависящие от параметра ε, причем различные величины будем оценивать одной постоянной, если это не вызывает недоразумений.

Рассмотрим краевую задачу для векторного разностного уравнения второго порядка в случае полубесконечного числа узлов:

$$L_iU = C_iU_{i-1} - G_iU_i + D_iU_{i+1} = F_i, \quad i \ge 1, \tag{1}$$

$$U_0 = R, \quad U_i \longrightarrow 0, \quad i \longrightarrow \infty. \tag{2}$$

Предполагаем, что U_i, F_i, R при каждом i – векторы из N компонент, C_i, D_i – ненулевые неотрицательные диагональные матрицы порядка N, матрицы G_i являются M-матрицами (см. [15, с. 269]):

$$\begin{gathered} C_i \longrightarrow C_\infty, \quad G_i \longrightarrow G_\infty, \quad D_i \longrightarrow D_\infty, \quad F_i \longrightarrow 0, \quad i \longrightarrow \infty, \\ \|G_i^{-1}C_i\| + \|G_i^{-1}D_i\| \le \sigma < 1, \quad C_i \ge D_i \ge 0, \quad Q_i = G_i - C_i - D_i; \end{gathered} \tag{3}$$

$$Q_i^{jj} \ge \sum_{k \ne j} |Q_i^{jk}| + \Delta, \quad \Delta > 0, \quad i > 0, \quad 1 \le j \le N. \tag{4}$$

Докажем, что при сформулированных условиях для оператора L справедлив принцип максимума.

Лемма 1. *Пусть для сеточной вектор-функции Ψ выполнены условия*

$$\Psi_0 \ge 0, \quad \lim_{i \to \infty} \Psi_i \ge 0, \quad L_i\Psi \le 0, \quad i \ge 1. \tag{5}$$

Тогда $\Psi_i \ge 0$ при всех i.

Доказательство. Предположим, что для некоторых i и j оказалось $\Psi_i^j < 0$. Без ограничения общности можно считать, что (i, j) – координаты точки локального минимума. Воспользуемся условиями (4) и получим

$$(L_i\Psi)^j = C_i^{jj}(\Psi_{i-1}^j - \Psi_i^j) + D_i^{jj}(\Psi_{i+1}^j - \Psi_i^j) - \sum_{k=1}^{N} G_i^{jk}(\Psi_i^k - \Psi_i^j) - \Psi_i^j \sum_{k=1}^{N}(G_i^{jk} - C_i^{jk} - D_i^{jk}) > 0.$$

Получили противоречие с условиями (5). Это доказывает лемму.

Используя лемму 1, можно показать, что при сделанных ограничениях решение задачи (1), (2) единственно и для него справедлива оценка

$$\max_i \|U_i\| \le \|R\| + \Delta^{-1}\max_i \|F_i\|.$$

Определим способ сведения задачи (1), (2) к задаче с конечным числом узлов. Для рассматриваемого разностного уравнения (1) с условиями (2) определим разностное уравнение первого порядка, соответствующее методу левой матричной прогонки [16], начальные условия для прогоночных коэффициентов зададим предельным условием на бесконечности. Это уравнение задаст многообразие решений разностного уравнения второго порядка (1), удовлетворяющих предельному условию при стремлении индекса к бесконечности.

Итак, определим разностное уравнение первого порядка:

$$U_i = A_i U_{i-1} + B_i, \tag{6}$$

где матрицы A_i и векторы B_i связаны рекуррентными соотношениями

$$A_i = (G_i - D_i A_{i+1})^{-1} C_i, \quad A_i \longrightarrow A_\infty, \quad i \longrightarrow \infty, \tag{7}$$

$$D_i(B_{i+1} - B_i) - [G_i - D_i - D_i A_{i+1}]B_i = F_i, \quad B_i \longrightarrow 0, \quad i \longrightarrow \infty, \tag{8}$$

матрица A_∞ является решением уравнения

$$D_\infty A^2 - G_\infty A + C_\infty = 0 \tag{9}$$

с нормой, меньшей единицы.

Остановимся на вопросе выбора A_∞ из (9). Из (9) следует, что

$$p\|A\|^2 - \|A\| + q \ge 0, \quad p = \|G_\infty^{-1} D_\infty\|, \quad q = \|G_\infty^{-1} C_\infty\|.$$

Согласно сделанным ограничениям,

$$p > 0, \ q > 0, \ p + q \le \sigma < 1.$$

Нетрудно показать, что $1 - 4pq > (p - q)^2$. Из квадратичного неравенства следует, что $\|A\|$ ограничена либо снизу, либо сверху. В качестве решения уравнения (9) принимаем ту матрицу, норма которой ограничена сверху. Покажем, что в этом случае $\|A_\infty\| < \sigma$. Имеем

$$\|A_\infty\| \le \frac{2q}{1 + \sqrt{1 - 4pq}}, \quad 1 + \sqrt{1 - 4pq} \ge 1 + \sqrt{(p + q + 1 - \sigma)^2 - 4pq} =$$

$$= 1 + \sqrt{(p - q)^2 + (1 - \sigma)^2 + 2(p + q)(1 - \sigma)} \ge 1 + |p - q| + 1 - \sigma \ge p + q + 2(1 - \sigma) + |p - q|.$$

Следовательно,

$$\|A_\infty\| \le \frac{2q}{p + q + 2(1 - \sigma) + |p - q|} \le \frac{q}{q + 1 - \sigma}.$$

Для получения последнего неравенства рассмотрены случаи $p \ge q$ и $p < q$. Учитывая, что $q < \sigma < 1$, теперь нетрудно показать, что

$$\frac{q}{q + 1 - \sigma} < \sigma.$$

Итак, $\|A_\infty\| < \sigma$.

В случае когда $\|D_\infty\| \ll 1$, ниже построим такую матрицу на основе асимптотических разложений.

Нетрудно показать, что если сеточная вектор-функция U удовлетворяет (6), то она удовлетворяет (1). Теперь покажем, что если U удовлетворяет (6), то для U выполнится предельное условие на бесконечности (2). Для этого оценим $\|A_i\|$.

Лемма 2. *При всех* $i > 0$

$$\|A_i\| \le \sigma < 1.$$

Доказательство. В силу предельного условия на бесконечности, найдется M такое, что $\|A_i\| \le \sigma$ для $i \ge M$. Для $i < M$ доказательство проводим индукцией по i по аналогии с [16, с. 107], где исследуется метод матричной прогонки.

Пусть $\|A_{i+1}\| \le \sigma$. Оценим $\|A_i\|$. Имеем

$$A_i = (I - G_i^{-1}D_iA_{i+1})^{-1}G_i^{-1}C_i,$$

где I – единичная матрица. Воспользуемся неравенством (см. [15, с. 110])

$$\|(I-Z)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|Z\|} \quad \text{при} \quad \|Z\| < 1.$$

Тогда получим

$$\|A_i\| \le \frac{\|G_i^{-1}C_i\|}{1 - \|G_i^{-1}D_iA_{i+1}\|} \le \sigma.$$

Итак, показано, что $\|A_i\| \le \sigma$. Это доказывает лемму.

Из (6) следует, что

$$\|U_i\| \le \sigma^i\|U_0\| + \sum_{k=1}^{i}\sigma^{i-k}\|B_k\|.$$

Учитывая, что $\|B_k\| \longrightarrow 0$, $k \longrightarrow \infty$, получаем $\|U_i\| \longrightarrow 0$, $i \longrightarrow \infty$.

Таким образом, разностное уравнение первого порядка (6) выделяет многообразие решений уравнения (1), стремящихся к нулю при $i \longrightarrow \infty$.

Прежде чем перейти к анализу задачи (8), рассмотрим линейный оператор

$$S_iZ = D_i(Z_{i+1} - Z_i) - M_iZ_i,$$

где матрицы M_i имеют строгое диагональное преобладание:

$$M_i^{jj}(1-\eta) \ge \sum_{k \ne j}|M_i^{jk}|, \quad 0 < \eta < 1, \quad M_i^{jj} \ge \theta > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{10}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (10). *Тогда для произвольной сеточной вектор-функции* Z, *имеющей предел на бесконечности, справедлива оценка*

$$\max_{i \ge K}\|Z_i\| \le \eta^{-1}\left\{\theta^{-1}\max_{i \ge K}\|S_iZ\| + \left\|\lim_{i\to\infty} Z_i\right\|\right\}.$$

Доказательство. Определим для произвольного j

$$T_iZ^j = D_i^{jj}(Z_{i+1}^j - Z_i^j) - M_i^{jj}Z_i^j = (S_iZ)^j + \sum_{k \ne j}M_i^{jk}Z_i^k.$$

Рассуждениями от противного можно убедиться, что для оператора T справедлив принцип максимума, в соответствии с которым для произвольной сеточной функции Ψ из условий

$$T_i\Psi \le 0, \quad i \ge K, \quad \lim_{i\to\infty}\Psi_i \ge 0 \tag{11}$$

следует $\Psi_i \ge 0$, $i \ge K$. Для произвольного j определим сеточную функцию с компонентами

$$\Psi_i = \theta^{-1}\max_{i\ge K}\|S_iZ\| + \max_{i\ge K}\|Z_i\|(1-\eta) + \left\|\lim_{i\to\infty} Z_i\right\| \pm Z_i^j.$$

Нетрудно убедиться, что для функции Ψ выполнены условия (11). В силу принципа максимума, $\Psi_i \ge 0$ при всех $i \ge K$. Учитывая условия (10), получаем утверждение леммы.

Лемма 4. *Для решения задачи* (8) *справедлива оценка*

$$\max_{i\ge K}\|B_i\| \le \frac{C_0}{\Delta}\max_{i\ge K}\|F_i\|, \quad K \ge 1.$$

Доказательство. Введем матрицы

$$P_i = G_i - D_i - D_iA_{i+1}.$$

Учитывая, что $\|A_i\| < 1$, можно показать, что для матриц P_i выполнены условия (10) при

$$\theta = \min P_i^{jj}, \quad \eta = \frac{\Delta}{\max P_i^{jj}}.$$

Теперь утверждение леммы следует из леммы 3.

С учетом соотношения (6) перейдем от (1), (2) к краевой задаче на сетке с конечным числом узлов:

$$C_iU_{i-1} - G_iU_i + D_iU_{i+1} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \quad U_0 = R, \quad U_M - A_MU_{M-1} = B_M, \tag{12}$$

где матрица A_M находится из (7), B_M – решение задачи (8) при $i = M$.

Коэффициенты A_M и B_M могут быть найдены приближенно. Исследуем, как погрешности в задании A_M и B_M влияют на решение задачи (12).

Теорема 1. *Пусть* $\tilde{U}$ *– решение задачи* (12) *в случае возмущенных* $\tilde{A}_M$, $\tilde{B}_M$. *Пусть*

$$\|\tilde{A}_M - A_M\| \le \Delta_1, \quad \|\tilde{B}_M - B_M\| \le \Delta_2, \quad \|\tilde{A}_M\| < 1.$$

Тогда

$$\max_i\|\tilde{U}_i - U_i\| \le \frac{1}{1-\|\tilde{A}_M\|}\{\Delta_1\|U_{M-1}\| + \Delta_2\}.$$

Доказательство. Пусть $Z_i = U_i - \tilde{U}_i$. Тогда Z является решением краевой задачи

$$L_iZ = C_iZ_{i-1} - G_iZ_i + D_iZ_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$Z_0 = 0, \quad Z_M = \tilde{A}_MZ_{M-1} + (A_M - \tilde{A}_M)U_{M-1} + B_M - \tilde{B}_M.$$

Как это следует из леммы 1, для оператора L справедлив принцип максимума (переход к конечному числу узлов по i принципа максимума не нарушает). Определим сеточную вектор-функцию Ψ:

$$\Psi_i^j = \Delta_1\|U_{N-1}\| + \Delta_2 + \|\tilde{A}_M\|\max_i\|Z_i\| \pm Z_i^j.$$

Тогда

$$\Psi_0 \ge 0, \quad \Psi_M \ge 0, \quad L_i\Psi \le 0, \quad 0 < i < M.$$

В силу принципа максимума, $\Psi_i \ge 0$ при всех i. Следовательно,

$$\max_i\|Z_i\| \le \Delta_1\|U_{M-1}\| + \Delta_2 + \|\tilde{A}_M\|\max_i\|Z_i\|.$$

Это доказывает теорему.

Итак, решение задачи (12) устойчиво к погрешностям в A_M и B_M, если $\|\tilde{A}_M\| < 1$.

Если от (12) перейти к задаче

$$C_i\tilde{U}_{i-1} - G_i\tilde{U}_i + D_i\tilde{U}_{i+1} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \quad \tilde{U}_0 = R, \quad \tilde{U}_M - A_M\tilde{U}_{M-1} = 0,$$

то, согласно лемме 4 и теореме 1,

$$\max_i \|\tilde{U}_i - U_i\| \le \frac{1}{1-\|A_M\|}\frac{C_0'}{\Delta}\max_{i \ge M}\|F_i\|. \tag{13}$$

При сеточной аппроксимации эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных в полубесконечной полосе, если записать разностную схему в векторном виде, получается краевая задача вида (1), (2) для вырождающегося разностного уравнения. То обстоятельство, что разностное уравнение вырождается в уравнение первого порядка при стремлении некоторого параметра к нулю, можно использовать при переходе к краевой задаче на сетке с конечным числом узлов.

Например, рассмотрим эллиптическое уравнение в полубесконечной полосе:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y)u = f(x, y)$$

с нулевыми граничными условиями вдоль полосы и предельным нулевым условием на бесконечности в предположении, что

$$\varepsilon, a, b > 0, \quad c(x, y) \ge c_0 > 0,$$

$c(x, y)$ имеет предел при $x \longrightarrow \infty$. Применение схемы направленных разностей приводит к пятиточечной разностной схеме:

$$\begin{gathered} Au^h_{i, j-1} + Bu^h_{i, j+1} + Cu^h_{i-1, j} + Du^h_{i+1, j} - E_{ij}u^h_{ij} = F_{ij}, \quad i \ge 1, \ 1 \le j \le N, \\ u^h_{i0} = 0, \quad u^h_{i, N+1} = 0, \quad i \ge 0, \quad u^h_{0j} = R_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \quad u^h_{ij} \longrightarrow 0 \text{ при } i \longrightarrow \infty, \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$A = \frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h}, \quad B = D = \frac{\varepsilon}{h^2}, \quad C = \frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{b}{h}, \quad E_{ij} = \frac{4\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h} + \frac{b}{h} + c(x_i, y_j).$$

Схему (14) можно привести к виду (1), (2), где C_i и D_i – постоянные диагональные матрицы (на диагоналях C и D), матрица G_i имеет вид

$$G_i = \begin{pmatrix} E_{i1} & -B & & & & \\ & & & & 0 & \\ -A & E_{i2} & -B & & & \\ & -A & E_{i3} & & & \\ \hdotsfor{6} \\ & & & & & -B \\ 0 & & & & & \\ & & & & -A & E_{iN} \end{pmatrix}.$$

Условия (3), (4) для данной задачи выполнены, причем при всех i верно $\|D_i\| \longrightarrow 0$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Итак, пусть в (1) матрица D_i становится нулевой при стремлении некоторого параметра ε к нулю.

Сначала остановимся на вопросе редукции задачи (1), (2) к конечному числу узлов без учета соотношения (6).

Перейдем от (1), (2) к третьей краевой задаче на сетке с конечным числом узлов:

$$C_i\tilde{U}_{i-1} - G_i\tilde{U}_i + D_i\tilde{U}_{i+1} = F_i, \quad 0 < i < M, \quad \tilde{U}_0 = R, \quad C_M\tilde{U}_{M-1} - G_M\tilde{U}_M = F_M.$$

Лемма 5. *Пусть* $\|D_i\| \le \varepsilon$ *при всех* i. *Тогда при всех* $i = 1, 2, \ldots, M$

$$\|U_i - \tilde{U}_i\| \le \frac{1}{1-\sigma}\|G_M^{-1}\| \times \|U_{M+1}\|\varepsilon. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $Z_i = U_i - \tilde{U}_i$. Тогда Z является решением краевой задачи

$$L_iZ = C_iZ_{i-1} - G_iZ_i + D_iZ_{i+1} = 0, \quad 0 < i < M, \quad Z_0 = 0, \quad Z_M = G_M^{-1}C_MZ_{M-1} + G_M^{-1}D_MU_{M+1}. \tag{16}$$

Определим покомпонентно Ψ_i:

$$\Psi_i^j = \|G_M^{-1}C_M\| \times \|Z_{M-1}\| + \|G_M^{-1}\| \times \|U_{M+1}\|\varepsilon \pm Z_i^j.$$

Тогда

$$L_i\Psi \le 0, \quad 0 < i < M, \quad \Psi_0 \ge 0, \quad \Psi_M \ge 0.$$

Используя принцип максимума, получаем, что $\Psi_i \ge 0$ при всех i. Это доказывает лемму.

В (15) используется $\|G_M^{-1}\|$. Учитывая, что матрицы G_i являются M-матрицами со строгим диагональным преобладанием, можно показать, что

$$\|G_i^{-1}\| \le \frac{1}{\Delta}\max_j G_i^{jj} / \min_j G_i^{jj}.$$

Теперь перейдем от краевой задачи (1), (2) к начальной:

$$L_iV = G_iV_i - C_iV_{i-1} = -F_i, \quad i > 0, \quad V_0 = R.$$

Учитывая условия (3), (4), можно показать, что $V_i \longrightarrow 0$, $i \longrightarrow \infty$.

Лемма 6. *Пусть для некоторой вектор-функции Ψ выполнены условия*

$$\Psi_0 \ge 0, \quad L_i\Psi \ge 0, \quad i \ge 1. \tag{17}$$

Тогда $\Psi_i \ge 0$ при всех $i \ge 0$.

Доказательство. Допустим, что для некоторых i, j оказалось $\Psi_i^j < 0$. Без ограничения общности можно считать, что i – наименьший индекс, для которого оказалось $\Psi_i^j < 0$, причем j дает минимум из всех Ψ_i^k при заданном i. Тогда имеем

$$(L_i\Psi)^j = \sum_{k=1}^{N} G_i^{jk}(\Psi_i^k - \Psi_i^j) + \Psi_i^j\sum_{k=1}^{N}(G_i^{jk} - C_i^{jk}) - C_i^{jj}(\Psi_{i-1}^j - \Psi_i^j) < 0.$$

Получили противоречие с условиями (17). Это доказывает лемму.

Используя лемму 6 и условия (4), несложно показать, что

$$\max_i\|V_i\| \le \|R\| + \Delta^{-1}\max_i\|F_i\|.$$

Лемма 7. *Пусть $\|D_i\| \le \varepsilon$ при всех i. Тогда*

$$\max_i\|U_i - V_i\| \le \Delta^{-1}\max_i\|U_i\|\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $Z_i = U_i - V_i$. Тогда Z является решением начальной задачи

$$G_iZ_i - C_iZ_{i-1} = D_iU_{i+1}, \quad i > 0, \quad Z_0 = 0.$$

Теперь утверждение леммы можно получить на основании принципа максимума.

Учитывая, что $\|D_i\| \le \varepsilon$, мы редуцировали исходную задачу (1), (2) к краевой задаче на сетке с конечным числом узлов или к начальной задаче с точностью $O(\varepsilon)$. Теперь остановимся на асимптотическом подходе к решению вспомогательных задач (7) и (8), что позволит редуцировать (1), (2) к краевой задаче на сетке с конечным числом узлов или к начальной задаче с более высоким порядком точности по параметру ε.

Итак, пусть коэффициенты в разностном уравнении (1) зависят от малого положительного параметра ε и для некоторого $r > 0$ справедливы разложения

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_{k=0}^{r} C_i^{(k)}\varepsilon^k + O(\varepsilon^{r+1}), \quad D_i = \sum_{k=1}^{r} D_i^{(k)}\varepsilon^k + O(\varepsilon^{r+1}), \\ G_i &= \sum_{k=0}^{r} G_i^{(k)}\varepsilon^k + O(\varepsilon^{r+1}), \quad F_i = \sum_{k=0}^{r} F_i^{(k)}\varepsilon^k + O(\varepsilon^{r+1}). \end{aligned} \tag{18}$$

В (18) под $O(\varepsilon^{r+1})$ понимаются матрица или вектор с нормой порядка $O(\varepsilon^{r+1})$. Для редукции краевых условий используем вырождение матриц D_i, поэтому в разложении D_i сумма начинается с $k = 1$.

Определим приближенно матрицу A_∞ из уравнения (9). Будем искать матрицу A_∞ в виде суммы:

$$\tilde{A}^p_\infty = \sum_{k=0}^{p} A^{(k)}\varepsilon^k, \quad p \le r.$$

Учитывая асимптотические разложения (18), из (9) относительно $A^{(k)}$ получаем матричное уравнение

$$G^{(0)}_\infty A^{(k)} = S^{(k)},$$

где

$$S^{(k)} = \sum_{s=1}^{k}\sum_{q=0}^{k-s} D^{(s)}_\infty A^{(q)} A^{(k-s-q)} - \sum_{s=0}^{k-1} G^{(s)}_\infty A^{(k-s)} + C^{(k)}_\infty, \quad k \ge 1,$$

$$A^{(0)} = (G^{(0)}_\infty)^{-1} C^{(0)}_\infty.$$

Учитывая условия (3), можно заключить, что при достаточно малых значениях ε верно $\|\tilde{A}^p_\infty\| < 1$.

Теперь получим асимптотические формулы для нахождения A_i из (7). Строим матрицу A_i в виде суммы:

$$\tilde{A}^p_i = \sum_{k=0}^{p} A^{(k)}_i \varepsilon^k, \quad p \le r.$$

Учитывая асимптотические разложения коэффициентов и решения в (7), относительно $A^{(k)}_i$ получаем матричное уравнение

$$G^{(0)}_i A^{(k)}_i = S^{(k)}_i,$$

где

$$S^{(k)}_i = \sum_{s=1}^{k}\sum_{q=0}^{k-s} D^{(s)}_i A^{(q)}_i A^{(k-s-q)}_{i+1} - \sum_{s=0}^{k-1} G^{(s)}_i A^{(k-s)}_i + C^{(k)}_i, \quad k \ge 1,$$

$$A^{(0)}_i = (G^{(0)}_i)^{-1} C^{(0)}_i.$$

Учитывая ограничения (3), можно заключить, что при достаточно малых значениях ε верно $\|\tilde{A}^p_i\| < 1$.

Лемма 8. *Пусть* $\|\tilde{A}^p_i\| \le 1$ *при всех* i. *Тогда найдется постоянная* C_0 *такая, что при всех* $i > 0$

$$\|A_i - \tilde{A}^p_i\| \le C_0 \varepsilon^{p+1}.$$

Доказательство. Применение асимптотических разложений к решению задачи (7) соответствует тому, что от (7) осуществляется переход к задаче с возмущенными коэффициентами:

$$\tilde{A}^p_i = (\tilde{G}_i - \tilde{D}_i \tilde{A}^p_{i+1})^{-1} \tilde{C}_i, \quad \tilde{A}^p_i \longrightarrow \tilde{A}^p_\infty, \quad i \longrightarrow \infty,$$

где матрица $\tilde{A}^p_\infty$ является решением уравнения

$$\tilde{D}_\infty A^2 - \tilde{G}_\infty A + \tilde{C}_\infty = 0,$$

причем при всех $i > 0$

$$\|D_i - \tilde{D}_i\|, \|G_i - \tilde{G}_i\|, \|C_i - \tilde{C}_i\| \le C_0\varepsilon^{p+1}.$$

Пусть $Z_i = A_i - \tilde{A}_i^p$. Нетрудно показать, что матрицы Z_i удовлетворяют соотношениям

$$Z_i = G_i^{-1}D_iZ_{i+1}A_i + G_i^{-1}D_i\tilde{A}_{i+1}^pZ_i + P_i,$$

$$P_i = G_i^{-1}(\tilde{G}_i - G_i)\tilde{A}_i^p + G_i^{-1}(D_i - \tilde{D}_i)\tilde{A}_{i+1}^p\tilde{A}_i^p + G_i^{-1}(C_i - \tilde{C}_i),$$

$$Z_i \longrightarrow Z_\infty = A_\infty - \tilde{A}_\infty^p, \quad i \longrightarrow \infty.$$

Сначала оценим Z_∞. Можно убедиться, что Z_∞ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} Z_\infty &= G_\infty^{-1}D_\infty Z_\infty A_\infty + G_\infty^{-1}D_\infty\tilde{A}_\infty^pZ_\infty + P_\infty, \\ P_\infty &= G_\infty^{-1}(D_\infty - \tilde{D}_\infty)(\tilde{A}_\infty^p)^2 + G_\infty^{-1}(\tilde{G}_\infty - G_\infty)\tilde{A}_\infty^p + G_\infty^{-1}(C_\infty - \tilde{C}_\infty), \quad \|P_\infty\| \le C_0\varepsilon^{p+1}. \end{aligned} \tag{19}$$

Переходя в (19) к оценке по норме и учитывая условия (3), (4), получаем

$$\|Z_\infty\| \le (1-\sigma)^{-1}C_0\varepsilon^{p+1}. \tag{20}$$

В силу предельного условия на бесконечности и оценки (20), при достаточно больших i ($i \ge M$)

$$\|Z_i\| \le C_1\varepsilon^{p+1}.$$

Оценим $\|Z_i\|$ при $i \le M$. Учитывая, что $\|P_i\| \le C_0\varepsilon^{p+1}$ при всех i, и используя ограничения (3), (4), получаем

$$\max_{i \le M}\|Z_i\| \le (1-\sigma)^{-1}C_0\varepsilon^{p+1}.$$

Это доказывает лемму.

Исследуем, как неточности в матрицах A_i влияют на решение задачи (8).

Лемма 9. *Пусть при всех i*

$$\|\tilde{A}_i\| \le 1, \quad \|\tilde{A}_i - A_i\| \le \eta,$$

$\tilde{B}_i$ – решение задачи (8) *в случае возмущенных матриц $\tilde{A}_i$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{i \ge k}\|\tilde{B}_i - B_i\| \le \frac{C_0}{\Delta}\eta\max_i\|D_i\|\max_{i \ge k}\|B_i\|, \quad k \ge 1.$$

Доказательство. Пусть $Z_i = B_i - \tilde{B}_i$. Тогда Z является решением задачи

$$D_i(Z_{i+1} - Z_i) - [G_i - D_i - D_i\tilde{A}_{i+1}]Z_i = D_i(\tilde{A}_{i+1} - A_{i+1})B_i, \quad Z_i \longrightarrow 0, \quad i \longrightarrow \infty.$$

Теперь утверждение леммы 9 следует из леммы 3.

Пусть для матриц $Q_i = G_i - D_i - D_iA_{i+1}$ справедливо асимптотическое разложение

$$Q_i = \sum_{k=0}^{r} Q_i^{(k)}\varepsilon^k + O(\varepsilon^{r+1}).$$

Тогда решение задачи (8) можно искать в виде

$$B_i^p = \sum_{k=0}^{p} B_i^{(k)}\varepsilon^k, \quad p \le r.$$

Подставляя в (8) асимптотические разложения коэффициентов и решения, получаем, что $B_i^{(k)}$

для каждого k можно найти через уже вычисленные векторы $B_i^{(s)}$, $s < k$, из уравнения

$$Q_i^{(0)}B_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} D_i^{(j)}(B_{i+1}^{(k-j)} - B_i^{(k-j)}) - \sum_{j=1}^{k} Q_i^{(j)}B_i^{(k-j)} - F_i^{(k)}, \quad k \geq 1,$$

$$Q_i^{(0)}B_i^{(0)} = -F_i^{(0)}, \quad Q_i^{(0)} = G_i^{(0)}.$$

Лемма 10. *Пусть* $\|\tilde{A}_i^p\| \leq 1$ *при всех* i. *Тогда при всех* i

$$\|B_i - B_i^p\| \leq C_0\varepsilon^{p+1}.$$

Доказательство. При использовании асимптотических разложений коэффициенты уравнения (8) приближены с точностью до $O(\varepsilon^{p+1})$, поэтому B^p является решением задачи

$$\tilde{D}_i(B_{i+1}^p - B_i^p) - \tilde{Q}_iB_i^p = \tilde{F}_i, \quad B_i^p \longrightarrow 0, \quad i \longrightarrow \infty,$$

где

$$\|D_i - \tilde{D}_i\|, \|Q_i - \tilde{Q}_i\|, \|F_i - \tilde{F}_i\| \leq C_0\varepsilon^{p+1}.$$

Пусть $Z_i = B_i - B_i^p$. Тогда Z является решением задачи

$$D_i(Z_{i+1} - Z_i) - Q_iZ_i = F_i - \tilde{F}_i + (Q_i - \tilde{Q}_i)B_i + (\tilde{D}_i - D_i)(B_{i+1} - B_i) +$$

$$+ (D_i - \tilde{D}_i)(Z_{i+1} - Z_i) + (\tilde{Q}_i - Q_i)Z_i, \quad Z_i \longrightarrow 0, \quad i \longrightarrow \infty.$$

Используя лемму 3, получаем утверждение леммы.

Для перехода от (1), (2) к краевой задаче (12) с конечным числом узлов требуется находить только A_M и B_M.

Используя соотношение (6), исходную задачу (1), (2) можно свести к начальной:

$$U_i = A_iU_{i-1} + B_i, \quad i > 0, \quad U_0 = R. \tag{21}$$

Решения задач (1), (2) и (21) совпадают. Коэффициенты A_i и B_i, используемые в (21), могут быть вычислены приближенно. Исследуем влияние погрешности в задании этих коэффициентов на решение задачи (21).

Лемма 11. *Пусть* $\tilde{U}$ *– решение задачи* (21) *в случае возмущенных* $\tilde{A}_i$ *и* $\tilde{B}_i$ *и* $\|\tilde{A}_i\| \leq \eta < 1$ *при всех* i. *Тогда при всех* i

$$\|U_i - \tilde{U}_i\| \leq \frac{1}{1-\eta}\left\{\max_i\|A_i - \tilde{A}_i\|\max_i\|U_i\| + \max_i\|B_i - \tilde{B}_i\|\right\}.$$

Доказательство. Определим $Z_i = U_i - \tilde{U}_i$. Тогда $Z_0 = 0$ и для $i > 0$

$$Z_i = \tilde{A}_iZ_{i-1} + (A_i - \tilde{A}_i)U_{i-1} + B_i - \tilde{B}_i.$$

Переходя в этом соотношении к оценке по норме, получаем утверждение леммы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берлянд М.Е.* Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
2. *Владимиров В.С.* Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка // Прикл. матем. и механ. 1955. Т. 19. Вып. 3. С. 315–324.
3. *Федорюк М.В.* Уравнение Гельмгольца в волноводе (отгонка краевого условия от бесконечности) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 2. С. 374–387.
4. *Константинов А.А., Маслов В.П., Чеботарёв А.М.* Снос краевых условий для уравнений с частными производными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 12. С. 1763–1778.

5. *Задорин А.И.* Численное решение эллиптического уравнения с пограничными слоями в полубесконечной полосе // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4. № 1. С. 33–47.
6. *Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б.* Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1981.
7. *Абрамов А.А., Конюхова Н.Б.* Перенос допустимых граничных условий из особой точки для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1985.
8. *Конюхова Н.Б., Пак Т.В.* Сингулярные задачи Коши с большим параметром для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 4. С. 501–519.
9. *Конюхова Н.Б.* Сингулярные задачи Коши для сингулярно возмущенных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. ур-ния. 1996. Т. 32. № 1. С. 52–61; II // № 4. С. 491–500.
10. *Курочкин С.В.* Численное нахождение краевого условия вблизи особенности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 5. С. 543–552.
11. *Balla K.* On asymptotic behavior of solutions to some difference equations // Advances in Difference Equations. Proc. Sec. Internat. Conf. Difference Equations. Veszprem, Hungary, 1995. P. 67–80. Gordon and Breach Sci. Publs., 1997.
12. *Balla K.* Characterization of solutions in the discretization of a parabolic equation on the infinite strip: MTA SZTAKI. LORDS. WP 96-7. Badapest, 1996.
13. *Balla K.* Asymptotic behavior of certain Riccati difference equations // Comput. Math. Applic. 1998. V. 36. № 10–12. P. 243–250.
14. *Задорин А.И.* Перенос краевого условия из бесконечности при численном решении уравнений второго порядка с малым параметром // Сибирский ж. вычисл. матем. 1999. Т. 2. № 1. С. 21–36.
15. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
16. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.