Перенос краевого условия из бесконечности при численном решении уравнений второго порядка с малым параметром

А.И. Задорин

УДК 519.62

Задорин А.И. Перенос краевого условия из бесконечности при численном решении уравнений второго порядка с малым параметром // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 1999. — Т. 2, № 1. — С. 21–35.

Рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной на полубесконечном интервале. Предлагается способ перехода к задаче на конечном интервале. Для решения вспомогательной сингулярной задачи Коши предлагается использовать асимптотический подход.

Zadorin A.I. The transfer of the boundary condition from the infinity for the numerical solution to the second order equations with a small parameter // Siberian J. of Numer. Mathematics / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 1999. — Vol. 2, № 1. — P. 21–35.

The ordinary second order differential equations with a small parameter effecting the higher derivative on the semi-infinite interval are considered. The method of the transition of that problem to the finite interval is proposed. To solve the auxiliary Cauchy problem the asymptotic method is used.

При математическом моделировании различных физических явлений, например, переноса примеси или распространения пламени, краевые условия могут ставиться на бесконечности. При решении таких задач конечно-разностным методом необходимо перейти к ограниченной области. В данной работе рассматривается вопрос переноса краевых условий из бесконечности в случае обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной.

Для переноса краевого условия из бесконечности используется подход, предложенный в [1–3]. В соответствии с этим подходом выделяется одномерное многообразие решений исходного уравнения, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Из условия принадлежности решения этому многообразию следует граничное условие в конечной точке. Наличие малого параметра в дифференциальном уравнении позволяет решить вспомогательную сингулярную задачу Коши асимптотическим методом. Исследуется влияние погрешности, возникающей при редукции задачи к конечному интервалу, на решение задачи, сформулированной на конечном интервале.

Всюду под C и C_i понимаются положительные постоянные, не зависящие от ε, причем в случаях, где это не вызывает недоразумений, различные величины ограничиваются сверху одной постоянной C. Под нормой сеточной функции или функции непрерывного аргумента $p(x)$ подразумевается $\|p\| = \max|p(x)|$, где x пробегает область определения функции.

1. Случай несамосопряженной линейной задачи

Рассмотрим краевую задачу:

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)u = f(x), \quad u(0) = A, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0. \tag{1.1}$$

Предполагаем достаточную гладкость a, c, f,

$$D \geq a(x) \geq \alpha > 0, \quad \varepsilon \in (0,1], \quad B \geq c(x) \geq b > 0,$$

$$f(x) \to 0, \quad a(x) \to a_0, \quad c(x) \to c_0, \quad x \to \infty.$$

Согласно [4], при наложенных ограничениях существует единственное решение задачи (1.1).

Как известно, если для оператора L_ε справедлив принцип максимума, то для достаточно гладкой функции $\Psi(x)$ из условий

$$\Psi(\alpha_1) \geq 0, \quad \Psi(\alpha_2) \geq 0, \quad L_\varepsilon\Psi(x) \geq 0, \ \alpha_1 < x < \alpha_2,$$

следует $\Psi(x) \geq 0$, $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$. Аналогично принцип максимума может быть применен к краевым условиям третьего рода и к дифференциальным операторам для уравнений первого порядка. На основании принципа максимума можно показать:

$$\|u\| \leq |A| + \left\| \frac{f(x)}{c(x)} \right\|.$$

Остановимся на вопросе переноса краевого условия из бесконечности. Используем подход [1–3], согласно которому предельное условие на бесконечности выделяет одномерное устойчивое многообразие решений в фазовом пространстве переменных (u, u'). Для заданного $L_0 > 0$ условие принадлежности $(u(L_0), u'(L_0))$ этому многообразию задает граничное условие в этой точке.

Итак, следующим уравнением определим многообразие решений уравнения (1.1), для которых выполнится предельное условие на бесконечности:

$$u'(x) = \gamma(x)u(x) + \beta(x), \tag{1.2}$$

где $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ являются решениями сингулярных задач Коши:

$$R_\varepsilon\gamma = \varepsilon\gamma' - a(x)\gamma + \varepsilon\gamma^2 - c(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \gamma(x) = r, \tag{1.3}$$

где r – отрицательный корень уравнения $\varepsilon r^2 - a_0 r - c_0 = 0$,

$$\varepsilon\beta' - [a(x) - \gamma(x)\varepsilon]\beta = f(x), \quad \lim_{x\to\infty} \beta(x) = 0. \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3) и (1.4) можно получить, если использовать соотношение (1.2) в уравнении (1.1). В дальнейшем соотношение (1.2) при заданном $x = L_0$ будем использовать в качестве правого граничного условия.

Перейдем к анализу свойств решения задачи (1.3). Введем

$$v(x) = \exp\left[\int_0^x \gamma(t)\,dt\right]. \tag{1.5}$$

Учитывая предельное условие на $\gamma(x)$, можно заключить, что функция $v(x)$ является решением линейной краевой задачи:

$$-\varepsilon v'' + a(x)v' + c(x)v = 0, \quad v(0) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} v(x) = 0. \tag{1.6}$$

Задача (1.6) является частным случаем задачи (1.1), для нее справедлив принцип максимума, решение этой задачи существует и единственно. Из этого следует существование и единственность решения задачи (1.3).

Применяя принцип максимума к задаче (1.6), можно показать, что

$$\exp(r_1 x) \le v(x) \le \exp(r_2 x), \quad r_1 = -\frac{2B}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4B\varepsilon}}, \quad r_2 = -\frac{2b}{D + \sqrt{D^2 + 4b\varepsilon}}.$$

Покажем, что $v'(x) < 0$ при $x < \infty$. Это следует из представления производной:

$$v'(x) = -\varepsilon^{-1} \int_x^\infty c(s)v(s) \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(t)\,dt\right] ds.$$

Из (1.5) следует $v'(x) = \gamma(x)v(x)$, поэтому при всех $x < \infty$

$$\gamma(x) < 0. \tag{1.7}$$

Лемма 1. *При всех* x

$$-\frac{2B}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4B\varepsilon}} \le \gamma(x) \le -\frac{2b}{D + \sqrt{D^2 + 4b\varepsilon}} < 0. \tag{1.8}$$

Доказательство. Докажем вторую часть этого неравенства (первая часть доказывается аналогично). Пусть

$$S = -\frac{2b}{D + \sqrt{D^2 + 4b\varepsilon}}.$$

Тогда $\varepsilon S^2 - DS - b = 0$. Пусть $z(x) = S - \gamma(x)$. Тогда

$$Lz = \varepsilon z' - (a(x) - \varepsilon(S + \gamma(x)))z = (D - a(x))S + b - c(x) \le 0, \quad \lim_{x\to\infty} z(x) \ge 0.$$

В соответствии с (1.7) $S + \gamma(x) < 0$, поэтому из рассуждений от противного следует $z(x) \ge 0$, $x < \infty$. □

Остановимся на вопросе приближенного решения задачи (1.3). Покажем, что решение задачи (1.3) устойчиво к возмущению коэффициентов. Перейдем от (1.3) к задаче:

$$\varepsilon\tilde{\gamma}' - \tilde{a}(x)\tilde{\gamma} + \varepsilon\tilde{\gamma}^2 - \tilde{c}(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \tilde{\gamma}(x) = r. \tag{1.9}$$

Предполагаем, что

$$\tilde{a}(x) \to a_0, \quad \tilde{c}(x) \to c_0, \quad x \to \infty, \qquad \tilde{D} \ge \tilde{a}(x) \ge \tilde{\alpha} > 0, \quad \tilde{B} \ge \tilde{c}(x) \ge \tilde{b} > 0. \tag{1.10}$$

Лемма 2. *Пусть* $|a(x) - \tilde{a}(x)| \le \Delta$, $|c(x) - \tilde{c}(x)| \le \Delta$ *для* $x \ge L_0$. *Тогда найдется* C:

$$|\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \le C\Delta \quad \text{для } x \ge L_0. \tag{1.11}$$

Доказательство. Пусть $z = \gamma - \tilde{\gamma}$. Тогда

$$R_\epsilon z = \varepsilon z' - [a - \varepsilon(\gamma + \tilde{\gamma})]z = c - \tilde{c} + (a - \tilde{a})\tilde{\gamma}, \quad \lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

Теперь утверждение леммы можно получить с помощью принципа максимума. □

На основании леммы 2 для достаточно больших x функцию $\gamma(x)$ можно приближенно найти на основе разложения коэффициентов $a(x)$ и $c(x)$ в ряды по обратным степеням x. Такой подход использовался в [3].

Если при достаточно больших x справедливы представления:

$$a(x) \approx \tilde{a}(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^{-i}, \qquad c(x) \approx \tilde{c}(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i x^{-i}, \tag{1.12}$$

то $\gamma(x)$ может быть приближенно найдено в виде:

$$\gamma(x) \approx \tilde{\gamma}(x) = \sum_{i=0}^{N} \gamma_i x^{-i}.$$

Для этого необходимо подставить разложения a, c, γ в (1.3) и получим рекуррентную формулу относительно γ_i. Если для $x \ge L_0$ имеют место разложения (1.12), и при этом

$$|a(x) - \tilde{a}(x)| \le C/x^{N+1}, \qquad |c(x) - \tilde{c}(x)| \le C/x^{N+1},$$

то, в соответствии с леммой 2, $|\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \le C_1/L_0^{N+1}$ при $x \ge L_0$. При переносе краевого условия из бесконечности длина конечного интервала, к которому редуцируется исходная задача, должна быть достаточно большой.

Для приближенного нахождения $\gamma(x)$ можно использовать малость параметра ε и строить асимптотический ряд по параметру ε. Такое разложение решения будет применимо при всех $x > 0$. При этом длина интервала, к которому сводится исходная задача, может быть произвольной. Параметр ε должен быть достаточно мал.

Решение задачи (1.3) ищем в виде асимптотического ряда:

$$\tilde{\gamma}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \gamma_n(x)\varepsilon^n. \tag{1.13}$$

Подставляя это разложение в (1.3) и собирая члены при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную формулу:

$$\gamma_n(x) = a(x)^{-1}\left[\gamma'_{n-1}(x) + \sum_{i+j=n-1} \gamma_i(x)\gamma_j(x)\right], \tag{1.14}$$

где $0 \le i, j \le n-1$, $n \ge 1$,

$$\gamma_0(x) = -c(x)/a(x). \tag{1.15}$$

Лемма 3. *Пусть функции $a(x)$ и $c(x)$ – N раз непрерывно дифференцируемые функции. Тогда для достаточно малых значений ε для некоторой постоянной C при всех x*

$$|\gamma(x) - \tilde{\gamma}_N(x)| \le C\varepsilon^{N+1}.$$

Доказательство. Для величины r, соответствующей предельному условию на бесконечности, сделаем разложение в ряд по ε:

$$\tilde{r}_N = \sum_{k=0}^{N} r_k \varepsilon^k.$$

Подставляя это разложение в уравнение $\varepsilon r^2 - a_0 r - c_0 = 0$ и приводя подобные при одинаковых степенях ε, получим:

$$r_n = a_0^{-1}\left[\sum_{i+j=n-1} r_i r_j\right], \quad r_0 = -\frac{c_0}{a_0}. \tag{1.16}$$

Из сравнения (1.14) и (1.16) следует $\lim_{x\to\infty} \tilde{\gamma}_N(x) = \tilde{r}_N$. В силу того, что производная $r^{(N+1)}(\varepsilon)$ ограничена равномерно по ε,

$$|r(\varepsilon) - \tilde{r}_N(\varepsilon)| \le C_0 \varepsilon^{N+1}. \tag{1.17}$$

Определим $z = \gamma - \tilde{\gamma}_N$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' - \{a(x) - \varepsilon(\gamma(x) + \tilde{\gamma}_N(x))\} z = F(x), \quad \lim_{x\to\infty} z(x) = s,$$

где

$$|F(x)| \le C_0 \varepsilon^{N+1}, \quad |s| \le C_0 \varepsilon^{N+1}. \tag{1.18}$$

Для некоторой постоянной C_1 справедливы неравенства $|\gamma_i(x)| \le C_1$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Следовательно, $|\tilde{\gamma}_N(x)| \le C_1/(1-\varepsilon)$. Тогда $a(x) - \varepsilon(\gamma(x) + \tilde{\gamma}_N(x)) \ge \alpha/2$ при $\varepsilon \le \alpha/(\alpha + 2C_1)$. Определим $\Psi(x) = C\varepsilon^{N+1} \pm z(x)$. Тогда с учетом (1.18) для некоторой постоянной C выполнятся условия:

$$\lim_{x\to\infty} \Psi(x) \ge 0, \quad R_\varepsilon \Psi(x) \le 0, \quad 0 \le x < \infty.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \ge 0$, $0 \le x < \infty$. □

Итак, решение задачи (1.3) может быть найдено с помощью асимптотического разложения (1.13).

Теперь остановимся на вопросе нахождения $\beta(x)$ из (1.4). Нетрудно показать, что

$$\|\beta(x)\| \le \left\|\frac{f(x)}{a(x)}\right\|.$$

Перейдем от (1.4) к уравнению с возмущенными коэффициентами:

$$\varepsilon\tilde{\beta}' - [\tilde{a}(x) - \tilde{\gamma}(x)\varepsilon]\tilde{\beta} = \tilde{f}(x), \quad \lim_{x\to\infty} \tilde{\beta}(x) = 0.$$

Предполагаем, что

$$\tilde{a}(x) \to a_0, \quad \tilde{\gamma}(x) \to r, \quad \tilde{f}(x) \to 0, \quad x \to \infty, \qquad \tilde{a} \ge \tilde{\alpha} > 0, \quad \tilde{\gamma}(x) \le 0.$$

Пусть для $x \ge L_0$

$$|a(x) - \tilde{a}(x)| \le \Delta, \quad |f(x) - \tilde{f}(x)| \le \Delta, \quad |\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \le \Delta_1.$$

Покажем, что тогда найдется C:

$$|\beta(x) - \tilde{\beta}(x)| \le C[\Delta + \Delta_1\varepsilon] \text{ для } x \ge L_0. \tag{1.19}$$

Пусть $z = \beta - \tilde{\beta}$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' - [\tilde{a} - \varepsilon\tilde{\gamma}]z = f - \tilde{f} + \beta(a - \tilde{a}) + \beta\varepsilon(\tilde{\gamma} - \gamma), \quad \lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

Применяя принцип максимума к оператору R_ε, нетрудно получить оценку (1.19).

Таким образом, если функция $\gamma(x)$ найдена с некоторой погрешностью, то это не вызывает увеличения погрешности при расчете $\beta(x)$.

При достаточно больших x функция $\beta(x)$ может быть найдена на основе разложения коэффициентов a, γ, f в ряд по степеням x^{-1} по аналогии с $\gamma(x)$.

Для нахождения $\beta(x)$ можно использовать и малость параметра ε. Пусть

$$\beta(x) \approx \sum_{n=0}^{N} \beta_n(x)\varepsilon^n.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (1.4), получим:

$$\beta_{n+1}(x) = \frac{\beta_n'(x) + \gamma(x)\beta_n(x)}{a(x)}, \quad \beta_0(x) = -\frac{f(x)}{a(x)}.$$

Если a, c, f – N раз непрерывно дифференцируемые функции, то на основании принципа максимума нетрудно показать, что для некоторой постоянной C при всех x

$$\left|\beta(x) - \sum_{n=0}^{N} \beta_n(x)\varepsilon^n\right| \le C\varepsilon^{N+1}.$$

Покажем, что соотношение (1.2) задает устойчивую сепаратрису особой точки $(0,0)$ в фазовом пространстве переменных (u, u'). Из (1.2) следует:

$$u(x) = u(x_0)\exp\left[\int_{x_0}^{x} \gamma(t)\,dt\right] + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\exp\left[\int_{s}^{x} \gamma(t)\,dt\right] ds.$$

Учитывая неравенства (1.8) и условие $\beta(x) \to 0$, $x \to \infty$, теперь несложно получить $(u(x), u'(x)) \to (0,0)$ при $x \to \infty$.

С учетом уравнения сепаратрисы (1.2) задачу (1.1) можно записать на конечном интервале $[0, L_0]$:

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)u = f(x), \\ &u(0) = A, \quad u'(L_0) - \gamma(L_0)u(L_0) = \beta(L_0). \end{aligned} \tag{1.20}$$

При переходе от (1.1) к задаче (1.20) значения $\gamma(L_0)$ и $\beta(L_0)$ могут быть найдены с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на решение задачи (1.20).

Теорема 1. *Пусть $\tilde{u}(x)$ – решение задачи (1.20) в случае возмущенных значений $\tilde{\gamma}(L_0)$, $\tilde{\beta}(L_0)$. Пусть*

$$\tilde{\gamma}(L_0) \le 0, \quad |\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)| \le \Delta_1, \quad |\beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0)| \le \Delta_2.$$

Тогда при всех $x \in [0, L_0]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \le \varepsilon\alpha^{-1}\Big[\Delta_2 + \Delta_1|u(L_0)|\Big]\exp\Big[\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_0)\Big]. \tag{1.21}$$

Доказательство. Определим $z = u - \tilde{u}$. Тогда $z(x)$ является решением задачи:

$$L_\varepsilon z = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)z(L_0) = \beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0) + (\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0))u(L_0).$$

Определим функцию

$$\Psi(x) = \Big[\Delta_2 + \Delta_1|u(L_0)|\Big]\varepsilon\alpha^{-1}\exp\Big[\varepsilon^{-1}\alpha(x - L_0)\Big] \pm z(x).$$

Тогда

$$\Psi(0) \ge 0, \qquad \Psi'(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)\Psi(L_0) \ge 0, \qquad L_\varepsilon\Psi(x) \ge 0, \quad 0 < x < L_0.$$

Из принципа максимума следует $\Psi(x) \ge 0$ при $0 \le x \le L_0$. □

Используя уравнение (1.2), от задачи (1.1) можно перейти к задаче Коши:

$$u'(x) - \gamma(x)u(x) = \beta(x), \quad u(0) = A. \tag{1.22}$$

Функции $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ в (1.22) из задач (1.3) и (1.4) могут быть найдены с некоторой погрешностью. На основании принципа максимума можно показать, что если при всех x

$$\tilde{\gamma}(x) \le -\theta, \quad \theta > 0, \qquad |\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \le \Delta, \qquad |\beta(x) - \tilde{\beta}(x)| \le \Delta,$$

то $\|u - \tilde{u}\| \le \theta^{-1}(1 + \|u\|)\Delta$.

Для решения задачи (1.22) можно использовать один из методов решения задачи Коши [5].

2. Линейное уравнение без первой производной

Рассмотрим краевую задачу

$$L_\varepsilon u = \varepsilon^2 u'' - c^2(x)u = f(x), \quad u(0) = A, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0. \tag{2.1}$$

Предполагаем достаточную гладкость $c(x)$, $f(x)$,

$$\varepsilon \in (0,1], \qquad B \ge c(x) \ge b > 0, \qquad f(x) \to 0, \quad c(x) \to c_0, \quad x \to \infty. \tag{2.2}$$

Согласно [4], при наложенных ограничениях существует единственное решение задачи (2.1). На основании принципа максимума нетрудно показать, что

$$\|u\| \le |A| + \left\|\frac{f(x)}{c^2(x)}\right\|. \tag{2.3}$$

Правому предельному краевому условию в фазовом пространстве переменных (u, u') соответствует особая точка $(0,0)$. В соответствии с подходом [1–3] зададим устойчивую сепаратрису этой особой точки соотношением:

$$\varepsilon u'(x) = \gamma(x)u(x) + \beta(x), \tag{2.4}$$

где $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ являются решениями сингулярных задач Коши:

$$R_\varepsilon\gamma = \varepsilon\gamma' + \gamma^2 - c^2(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\gamma(x) = -c_0, \tag{2.5}$$

$$\varepsilon\beta' + \gamma(x)\beta = f(x), \quad \lim_{x\to\infty}\beta(x) = 0. \tag{2.6}$$

Перейдем к анализу свойств решения задачи (2.5). Введем

$$v(x) = \exp\left[\int\limits_0^x \varepsilon^{-1}\gamma(t)\,dt\right]. \tag{2.7}$$

Учитывая предельное условие на $\gamma(x)$, можно заключить, что функция $v(x)$ является решéнием линейной краевой задачи:

$$\varepsilon^2 v'' - c^2(x)v = 0, \quad v(0) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} v(x) = 0. \tag{2.8}$$

Задача (2.8) является частным случаем задачи (2.1), ее решение существует и единственно. Из этого следует существование и единственность решения задачи (2.5), так как в соответствии с (2.7) $\gamma(x) = v'(x)/v(x)$ при $x < \infty$. Из (2.8) следует, что $v(x) > 0$, $v'(x) < 0$, $x < \infty$. Следовательно, $\gamma(x) < 0$ при $x < \infty$.

Лемма 4. *При всех* $x < \infty$

$$-B \le \gamma(x) \le -b < 0. \tag{2.9}$$

Доказательство. Докажем вторую часть этого неравенства (первая часть доказывается аналогично). Пусть $z(x) = -b - \gamma(x)$. Тогда

$$Lz = \varepsilon z' + [-b + \gamma(x)]z = b^2 - c^2(x) \le 0, \quad \lim_{x\to\infty} z(x) \ge 0.$$

В силу того, что $-b+\gamma(x) < 0$, из рассуждений от противного получим $z(x) \ge 0$, $x < \infty$. □

Остановимся на вопросе приближенного решения задачи (2.5). Покажем, что решение задачи (2.5) устойчиво к возмущению $c(x)$. Перейдем от (2.5) к задаче:

$$\varepsilon\tilde{\gamma}' + \tilde{\gamma}^2 - \tilde{c}^2(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \tilde{\gamma}(x) = -c_0. \tag{2.10}$$

Предполагаем, что $\tilde{c}(x) \to c_0$, $x \to \infty$, $\tilde{c}(x) \ge \tilde{b} > 0$.

Лемма 5. *Пусть* $|c^2(x) - \tilde{c}^2(x)| \le \Delta$ *при* $x \ge L_0$. *Тогда*

$$|\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \le b^{-1}\Delta \ \text{при} \ x \ge L_0.$$

Доказательство. Учитывая, что уравнение (2.10) является аналогом уравнения (2.5) в случае возмущенных коэффициентов в уравнении (2.5), получим $\tilde{\gamma}(x) \le 0$.

Пусть $z = \gamma - \tilde{\gamma}$. Тогда

$$\varepsilon z' + (\gamma(x) + \tilde{\gamma}(x))z = c^2(x) - \tilde{c}^2(x), \quad \lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

Используя принцип максимума, получаем утверждение леммы. □

На основании леммы 5 для достаточно больших x функцию $\gamma(x)$ можно приближенно найти на основе разложения $c(x)$ и $\gamma(x)$ в ряд по обратным степеням x.

Теперь будем искать решение задачи (2.5) в виде асимптотического ряда по параметру ε:

$$\tilde{\gamma}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \gamma_n(x)\varepsilon^n. \tag{2.11}$$

Подставляя это разложение в (2.5) и собирая члены при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную формулу:

$$\gamma_n = -\frac{1}{2\gamma_0}\left[\gamma'_{n-1} + \sum_{i+j=n} \gamma_i\gamma_j\right], \quad \gamma_0(x) = -c(x), \tag{2.12}$$

где $1 \le i, j \le n-1$, $n \ge 1$.

По аналогии с леммой 3 можно доказать, что справедлива

Лемма 6. *Пусть $c(x)$ – N раз непрерывно дифференцируемая функция. Тогда для достаточно малых значений ε для некоторой постоянной C при всех x*

$$|\gamma(x) - \tilde{\gamma}_N(x)| \le C\varepsilon^{N+1}.$$

Как и в случае несамосопряженной задачи $\beta(x)$ из (2.6) может быть найдено в виде асимптотического ряда. Из (2.6) следует, что для $x \ge L_0$

$$|\beta(x)| \le \max_{x \ge L_0} |f(x)|/b.$$

Если искать $\beta(x)$ в виде ряда $\tilde{\beta}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \beta_n(x)\varepsilon^n$, то коэффициенты β_n связаны рекуррентным соотношением

$$\beta_n(x) = -\frac{\beta'_{n-1}(x)}{\gamma(x)}, \quad \beta_0(x) = \frac{f(x)}{\gamma(x)}. \tag{2.13}$$

На основании принципа максимума нетрудно показать, что если функции $f(x)$ и $c(x)$ N раз непрерывно дифференцируемы, то для некоторой постоянной C при всех x $|\beta(x) - \tilde{\beta}_N(x)| \le C\varepsilon^{N+1}$.

Покажем, что решение задачи (2.6) устойчиво к возмущению $\gamma(x)$.

Пусть $\tilde{\beta}(x)$ – решение задачи (2.6) в случае возмущенной функции $\tilde{\gamma}(x)$. На основании принципа максимума можно показать, что если при $x \ge L_0$

$$\tilde{\gamma}(x) \le -\tilde{b} < 0, \quad |\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \le \Delta,$$

то при всех $x \ge L_0$

$$|\beta(x) - \tilde{\beta}(x)| \le \max_{x \ge L_0} |\beta(x)|\tilde{b}^{-1}\Delta.$$

С учетом соотношения (2.4) перейдем от (2.1) к задаче на конечном интервале:

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon u = \varepsilon^2 u'' - c^2(x)u = f(x), \\ &u(0) = A, \quad \varepsilon u'(L_0) - \gamma(L_0)u(L_0) = \beta(L_0). \end{aligned} \tag{2.14}$$

При переходе от (2.1) к задаче (2.14) значения $\gamma(L_0)$ и $\beta(L_0)$ могут быть найдены с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на решение задачи (2.14).

На основании принципа максимума нетрудно убедиться, что справедлива

Теорема 2. *Пусть $\tilde{u}(x)$ – решение задачи (2.14) в случае возмущенных значений $\tilde{\gamma}(L_0)$, $\tilde{\beta}(L_0)$. Пусть найдется $\tilde{b} > 0$ такое, что*

$$\tilde{\gamma}(L_0) \le -\tilde{b} < 0, \quad |\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)| \le \Delta, \quad |\beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0)| \le \Delta.$$

Тогда при всех $x \in [0, L_0]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \le \tilde{b}^{-1}(1 + \|u\|)\Delta.$$

Остановимся на вопросе численного решения задачи (2.14). По аналогии с [6] можно показать, что для производных решения задачи (2.1) справедливы оценки

$$|u^{(j)}(x)| \le C\Big[1 + \varepsilon^{-j}\exp(-b\varepsilon^{-1}x)\Big], \quad j = 1,2,3,4. \tag{2.15}$$

Таким образом, решение задачи (2.14) содержит экспоненциальный пограничный слой около границы $x = 0$. Равномерно сходящаяся разностная схема для такой задачи может быть построена либо за счет подгонки к погранслойному росту решения [7], либо за счет построения в пограничном слое специальной неравномерной сетки [8].

Решение задачи (2.1) может быть найдено и с помощью решения задачи Коши для уравнения (2.4):

$$\varepsilon u'(x) - \gamma(x)u(x) = \beta(x), \quad u(0) = A. \tag{2.16}$$

Для нахождения решения задачи (2.16) можно использовать равномерно сходящуюся схему [6, 9]. Функции $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ в (2.16), как это было определено выше, находятся с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на решение задачи (2.16).

Можно показать, что если при всех x

$$\tilde\gamma(x) \le -\tilde b, \;\; \tilde b > 0, \quad |\gamma(x) - \tilde\gamma(x)| \le \Delta, \quad |\beta(x) - \tilde\beta(x)| \le \Delta,$$

то

$$\|u - \tilde u\| \le \tilde b^{-1}(1 + \|u\|)\Delta.$$

3. Нелинейное уравнение с первой производной

Рассмотрим краевую задачу

$$T_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + mu' + g(u) = 0, \quad u(0) = A, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = B. \tag{3.1}$$

Предполагаем, что функция $g(s)$ является достаточно гладкой при всех $s \in R$,

$$\begin{gathered} \varepsilon \in (0,1], \quad m > 0, \quad g(B) = 0, \quad g'(B) > 0, \\ g'(s) \ge -\beta, \;\; s \in R, \quad \beta > 0, \quad m^2 - 4\beta\varepsilon \ge \sigma > 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Согласно [4], решение задачи (3.1) при условиях (3.2) существует и единственно. Остановимся на вопросе переноса краевого условия из бесконечности в некоторую точку L_0.

Согласно подходу [1–3] устойчивая сепаратриса "седла" в фазовом пространстве переменных (u, u') задается соотношением:

$$u'(x) = r_1(u(x) - B) + \gamma(u(x)), \tag{3.3}$$

где r_1 – отрицательный корень уравнения $-\varepsilon r^2 + mr + g'(B) = 0$, $\gamma(u)$ – решение задачи типа Ляпунова:

$$\begin{gathered} \varepsilon\gamma'(u)[r_1(u - B) + \gamma(u)] = \varepsilon r_2\gamma(u) + g(u) - g'(B)(u - B), \\ \gamma(B) = 0, \quad r_1 + r_2 = m\varepsilon^{-1}, \end{gathered} \tag{3.4}$$

имеющей единственное решение.

Учитывая (3.3) и выражая из (3.4) $\gamma(u(x))$ в явном виде, можно показать, что для произвольного $L_0 > 0$ при всех $x \geq L_0$

$$|\gamma(u(x))| \leq \frac{1}{m} \max_{x \geq L_0} \left| g''_u(u(x)) \right| (u(x) - B)^2,$$

где $u(x)$ – решение задачи (3.1).

Решение задачи (3.4) ищем в виде асимптотического ряда

$$\tilde{\gamma}_N(u) = \sum_{n=0}^{N} \gamma_n(u)\varepsilon^n. \tag{3.5}$$

Перепишем уравнение (3.4) в виде

$$r_1\varepsilon[\gamma'(u)(u - B) + \gamma(u)] + \varepsilon\gamma'(u)\gamma(u) = m\gamma(u) + g(u) - g'(B)(u - B). \tag{3.6}$$

Учтем, что

$$r_1\varepsilon = (m - S(\varepsilon))/2, \quad S(\varepsilon) = \sqrt{m^2 + 2p\varepsilon}, \quad p = 2g'(B),$$

где

$$S(\varepsilon) = m + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{K_i}{i!} p^i m^{1-2i} \varepsilon^i, \qquad K_i = \prod_{n=0}^{i-2} (2n + 1), \quad K_1 = 1. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.5) в (3.6), учитывая (3.7) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, при всех $n > 0$ получим

$$\gamma_n = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma'_i \gamma_{n-1-i} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{1}{2} \frac{K_i}{i!} \frac{[2g'(B)]^i}{m^{2i}} \left[\gamma'_{n-i}(u - B) + \gamma_{n-i}\right], \tag{3.8}$$

причем

$$\gamma_0(u) = \frac{g'(B)(u - B) - g(u)}{m}. \tag{3.9}$$

Лемма 7. *Пусть $g(u)$ – $(N+1)$ раз непрерывно дифференцируемая функция. Тогда для некоторой постоянной C при всех x*

$$|\gamma(u(x)) - \tilde{\gamma}_N(u(x))| \leq C\varepsilon^{N+1},$$

где $u(x)$ – решение задачи (3.1).

Доказательство. Пусть $z(u(x)) = \gamma(u(x)) - \tilde{\gamma}_N(u(x))$. Тогда $z(u(x))$ является решением задачи

$$\varepsilon \frac{d}{dx} z(u(x)) - \varepsilon r_2 z(u(x)) = F(x), \quad \lim_{x \to \infty} z(u(x)) = 0, \tag{3.10}$$

где $|F(x)| \leq C_0\varepsilon^{N+1}$. Из (3.10) следует:

$$z(u(x)) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{\infty} F(s) \exp[r_2(x - s)]\, ds.$$

Из этого соотношения получаем $|z(u(x))| \leq C_0 m^{-1} \varepsilon^{N+1}$. □

Уравнение (3.3) позволяет свести задачу (3.1) к конечному интервалу:

$$\begin{aligned} &-\varepsilon u'' + mu' + g(u) = 0, \\ &u(0) = A, \quad u'(L_0) = r_1[u(L_0) - B] + \gamma(u(L_0)). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Задача (3.11) поставлена на конечном интервале и может быть решена с применением разностной схемы. Функция $\gamma(u)$ из (3.4) может быть найдена приближенно. Исследуем влияние погрешности в задании $\gamma(u(L_0))$ на решение задачи (3.11).

Теорема 3. *Пусть $\tilde{u}$ – решение задачи (3.11) в случае возмущенной функции $\tilde{\gamma}(v)$. Пусть функция $\tilde{\gamma}(v)$ непрерывно дифференцируема при всех $v \in R$,*

$$-r_1 - \tilde{\gamma}'(v) \geq -\beta_0, \quad v \in R, \quad \beta_0 > 0, \quad m - 2\beta_0\varepsilon \geq \eta > 0.$$

Пусть $|\gamma(u(L_0)) - \tilde{\gamma}(u(L_0))| \leq \Delta$. Тогда при всех $x \in [0, L_0]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq 2\Delta\varepsilon\eta^{-1} \exp\Big[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)\Big].$$

Доказательство. Пусть $z = u - \tilde{u}$. Тогда

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + mz' + [g(u) - g(\tilde{u})](u - \tilde{u})^{-1} z = 0, \\ &z(0) = 0, \quad D_\varepsilon z = z'(L_0) - (r_1 + \tilde{\gamma}'(\theta))z(L_0) = \gamma(u(L_0)) - \tilde{\gamma}(u(L_0)). \end{aligned}$$

Определим

$$\Psi(x) = 2\Delta\varepsilon\eta^{-1} \exp\Big[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)\Big] \pm z(x).$$

При таком задании $\Psi(x)$ при всех $x \in (0, L_0)$:

$$L_\varepsilon\Psi(x) \geq 0, \quad \Psi(0) \geq 0, \quad D_\varepsilon\Psi \geq 0.$$

В силу принципа максимума, справедливого для оператора L_ε, $\Psi(x) \geq 0$, $x \in [0, L_0]$. □

На основании соотношения (3.3) задачу (3.1) можно свести к задаче Коши для уравнения первого порядка:

$$u'(x) - f(u) = 0, \quad u(0) = A, \quad f(u) = r_1(u - B) + \gamma(u). \tag{3.13}$$

Нетрудно показать, что если

$$r_1 + \tilde{\gamma}'(v) \leq -\theta, \quad v \in R, \quad \theta > 0, \tag{3.14}$$

$\tilde{u}(x)$ – решение задачи (3.13) с возмущенной функцией $\tilde{\gamma}(u)$, то из того, что при всех x $|\gamma(u(x)) - \tilde{\gamma}(u(x))| \leq \Delta$, следует $\|u - \tilde{u}\| \leq \theta^{-1}\Delta$. Если строить $\tilde{\gamma}(u)$ в виде (3.5), то условия (3.14) будут выполнены для достаточно малых значений ε, если $g'(v) \geq b$, $v \in R$, для некоторого $b > 0$.

Задача (3.13) не содержит пограничного слоя и для ее решения можно использовать какой-либо из методов решения задачи Коши [5].

4. Нелинейное уравнение без первой производной

Рассмотрим случай нелинейной краевой задачи:

$$\varepsilon^2 u''(x) - g(u) = 0, \quad u(0) = A, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = B. \tag{4.1}$$

Предполагаем достаточную гладкость функции g,

$$M^2 \geq g'(s) \geq \beta^2, \;\; s \in R, \quad M > 0, \quad \beta > 0, \quad g(B) = 0. \tag{4.2}$$

Такая задача может возникнуть, например, при моделировании процесса диффузионного горения [10].

На основании принципа максимума можно убедиться, что $u(x)$ возрастает при $A < B$ и убывает, если $A > B$. Из (4.1) следует:

$$(\varepsilon u'(x))^2 = F(u) = -2\int_u^B g(s)\,ds. \tag{4.3}$$

Таким образом,

$$\varepsilon u'(x) = \begin{cases} \sqrt{F(u)} & \text{при } A < B, \\ -\sqrt{F(u)} & \text{при } A > B. \end{cases} \tag{4.4}$$

На основании соотношений (4.4) можно перенести краевое условие из бесконечности. Рассмотрим случай $A < B$ (случай $A > B$ аналогичен). Задача (4.1) на конечном интервале принимает вид:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 u''(x) - g(u) = 0, \quad 0 < x < L_0, \\ &u(0) = A, \quad \varepsilon u'(L_0) + S(u(L_0)) = 0, \quad S(u) = -\sqrt{F(u)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Можно показать, что

$$\frac{M^2}{\beta} \geq S'(v) \geq \frac{\beta^2}{M}, \quad v \leq B. \tag{4.6}$$

Пусть $\tilde{u}$ – решение задачи (4.5) в случае возмущенной функции $\tilde{S}(u)$. Пусть $\tilde{S}'(v) \geq \beta_0$, $v \leq B$. Можно показать, что если

$$|\tilde{S}(u(L_0)) - S(u(L_0))| \leq \Delta,$$

то при всех $x \in [0, L_0]$ выполнится

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \beta_0^{-1}\Delta.$$

При построении разностной схемы для задачи (4.5) необходимо учитывать, что решение имеет пограничный слой около границы $x = 0$.

Соотношение (4.3) можно использовать для сведения исходной задачи (4.1) к начальной. Для определенности полагаем $A < B$. Тогда начальная задача имеет вид

$$\varepsilon u'(x) + S(u) = 0, \quad u(0) = A, \tag{4.7}$$

где $S'(v)$ удовлетворяет оценкам (4.6). Решение задачи (4.7) содержит пограничный слой около начальной точки $x = 0$. Для решения такой задачи можно использовать, например, схему из [9].

Нетрудно убедиться, что если $\tilde{u}$ – решение задачи (4.7) в случае возмущенной функции $\tilde{S}(u)$, $\tilde{S}'(v) \ge \beta_0$, $v \le B$, то из условия

$$|\tilde{S}(u(x)) - S(u(x))| \le \Delta, \quad 0 \le x \le L_0$$

следует

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \le \beta_0^{-1}\Delta, \quad 0 \le x \le L_0.$$

5. Результаты численных экспериментов

Сначала была рассмотрена нелинейная краевая задача:

$$-\varepsilon u'' + u' + u\exp(u) = 0, \quad u(0) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0. \tag{5.1}$$

Условия (3.2) для этой задачи выполнены. Задача (5.1) сводилась к конечному интервалу и для решения редуцированной задачи применялась схема направленных разностей. Численно исследовалось влияние способа задания краевого условия на решение разностной схемы. Для этого решение схемы при различных способах задания краевого условия сравнивалось с решением такой же схемы на достаточно длинном интервале. Шаг разностной сетки принимался постоянным, $h = 0.1$. Пусть z^h соответствует разности схемных решений на заданном интервале длины L_0 и на интервале длины L: $z^h = u^h_{L_0} - u^h_L$, $L = 100$.

Сравним три способа переноса краевого условия из бесконечности: 1) $u(L_0) = 0$, 2) $u'(L_0) = 0$, 3) согласно (3.11) с $\tilde{\gamma}(u) = \gamma_0(u)$, где $\gamma_0(u)$ соответствует (3.9).

Решение разностной схемы находилось модифицированным методом итераций Пикара, причем в случае третьего способа задания краевого условия осуществлялась линеаризация и краевого условия. Нелинейность в краевом условии не увеличивала количество итераций. На каждом итерационном шаге решение находилось методом прогонки.

В табл. 1 приведена норма погрешности $\|z^h\|$ в зависимости от способа задания краевого условия и длины интервала при $\varepsilon = 1$, в табл. 2 – при $\varepsilon = 0.1$.

Таблица 1. Норма погрешности в зависимости от L_0 при $\varepsilon = 1.0$

L_0	$u(L_0) = 0$	$u'(L_0) = 0$	(3.11), $\tilde{\gamma} = \gamma_0$
1	0.42	0.16	$0.17_{10}{-1}$
5	$0.30_{10}{-1}$	$0.13_{10}{-1}$	$0.41_{10}{-4}$
10	$0.14_{10}{-2}$	$0.61_{10}{-3}$	$0.68_{10}{-5}$

Таблица 2. Норма погрешности в зависимости от L_0 при $\varepsilon = 0.1$

L_0	$u(L_0) = 0$	$u'(L_0) = 0$	(3.11), $\tilde{\gamma} = \gamma_0$
1	0.26	$0.54_{10}{-1}$	$0.12_{10}{-2}$
5	$0.64_{10}{-2}$	$0.11_{10}{-2}$	$0.54_{10}{-5}$
10	$0.78_{10}{-4}$	$0.13_{10}{-4}$	$0.74_{10}{-7}$

Таблица 3. Норма погрешности в зависимости от ε при $L_0 = 1.0$

ε	$u(L_0) = 2$	$u'(L_0) = 0$	(3.11), $\tilde{\gamma} = \gamma_0$
1	0.71	0.17	$0.17_{10}{-1}$
$1_{10}{-1}$	0.66	$0.59_{10}{-1}$	$0.14_{10}{-2}$
$1_{10}{-2}$	0.66	$0.34_{10}{-1}$	$0.98_{10}{-4}$
$1_{10}{-3}$	0.66	$0.31_{10}{-1}$	$0.88_{10}{-5}$

Затем аналогичным образом была рассмотрена краевая задача:

$$-\varepsilon u'' + u' + (u-2)\exp(-1/u) = 0, \quad u(0) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 2. \tag{5.2}$$

Задача (3.1) при задании $g(u) = K(u-B)\exp(-E/u)$, $K, E > 0$ является модельной при математическом описании переноса пламени [10]. Не все условия в (3.2) при этом выполнены. В табл. 3 приведена $\|z^h\|$ в случае задачи (5.2) при $L_0 = 1$ в зависимости от способа задания краевого условия и значения ε.

В соответствии с результатами численных экспериментов при переносе краевого условия из бесконечности среди рассматриваемых способов более точен подход, предлагаемый в (3.11).

Литература

[1] **Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б.** Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Сообщ. по вычисл. матем. — М.: ВЦ АН СССР, 1981.

[2] **Конюхова Н.Б.** Гладкие многообразия Ляпунова и сингулярные краевые задачи / Сообщ. по вычисл. матем. — М.: ВЦ АН СССР, 1996.

[3] **Биргер Е.С., Ляликова Н.Б.** О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. — 1965. — Т. 5, № 6. — С. 979–990.

[4] **Клоков Ю.А.** Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики. — Рига: Рижский институт инженеров гражданского воздушного флота, 1963.

[5] **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. — М: Наука, 1987.

[6] **Дулан Э., Миллер Д., Шилдерс У.** Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. — М: Мир, 1983.

[7] **Задорин А.И.** Разностная схема для самосопряженной сингулярно возмущенной третьей краевой задачи // Моделирование в механике. — Новосибирск, 1989. — Т. 3, № 1. — С. 77–82.

[8] **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 841–890.

[9] **Боглаев И.П.** О численном интегрировании сингулярно-возмущенной задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. — 1985. — Т. 25, № 7. — С. 1009–1022.

[10] **Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б. и др.** Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980.

644099, г. Омск, ул. Певцова, 13
Омский филиал Института математики
им. С.Л. Соболева СО РАН
E-mail:zadorin@iitam.omsk.net.ru

Статья поступила
2 июня 1998 г.
Переработанный вариант
7 октября 1998 г.