ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1998, том 38, № 10, с. 1671–1682

УДК 519.624.2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

© 1998 г. А. И. Задорин

(644099 Омск, Певцова, 13, Омский филиал Ин-та матем. СО РАН)

Поступила в редакцию 05.06.95 г.
Переработанный вариант 20.01.98 г.

Рассматриваются сначала линейное, а затем нелинейное уравнение второго порядка с малым параметром при старшей производной на полуоси. Осуществлен переход к конечному интервалу с оценкой возникающей погрешности. Обоснована равномерная сходимость схемы направленных разностей для редуцированной задачи.

При математическом моделировании различных физических явлений, таких как распространение примеси от источника и процесс распространения пламени, краевые условия могут ставиться на бесконечности. При решении дифференциальных уравнений для таких задач конечно-разностным методом необходимо перейти к ограниченной области. При этом требуется оценить погрешность в решении, возникающую при переносе краевых условий на границу ограниченной области.

Краевые задачи на полубесконечном интервале рассматривались в ряде работ, например в [1]–[11]. В соответствии с подходом [2]–[9], при корректной постановке краевой задачи с предельным условием на бесконечности должно быть гарантировано, что это предельное условие выделяет семейство решений исходного уравнения и что значения этих решений порождают в фазовом пространстве переменных устойчивое многообразие. Требование, чтобы значения решений при определенных значениях аргумента принадлежали этому многообразию, дает граничное условие в конечной точке.

В данной работе сначала рассмотрено линейное, а затем нелинейное автономное уравнение второго порядка на полубесконечном интервале. Рассмотрен вопрос переноса предельного краевого условия из бесконечности. Оценена погрешность, возникающая при аппроксимации краевого условия, соответствующего условию на бесконечности. Показано, как эта погрешность влияет на точность решения задачи на конечном интервале.

Доказано, что задача, сформулированная на конечном интервале, не содержит выраженного пограничного слоя и для ее решения можно использовать схему направленных разностей, которая обладает в данном случае свойством равномерной сходимости по малому параметру.

Всюду под C и C_i понимаются положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов разностной сетки, причем в случаях, где это не вызывает недоразумений, различные величины ограничиваются сверху одной постоянной C. Под нормой сеточной функции или функции непрерывного аргумента $p(x)$ подразумевается $\|p\| = \max|p(x)|$, где x пробегает область определения функции.

1. СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Рассмотрим краевую задачу для линейного уравнения:

$$-\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)(u-B) = 0, \quad u(0) = A, \quad \lim_{x\to\infty}[u(x)-B] = \lim_{x\to\infty}u'(x) = 0. \tag{1.1}$$

Предполагаем, что функции $a(x)$, $c(x)$ непрерывны, $D \ge a(x) \ge \alpha > 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $c(x) \ge \beta > 0$, $a(x) \longrightarrow m$, $c(x) \longrightarrow n$, $x \longrightarrow \infty$.

Согласно [10, с. 29], при наложенных ограничениях существует единственное решение задачи (1.1). Вопрос переноса краевого условия из бесконечности в случае линейной задачи рассматривался, например, в [3], [6]. Остановимся на свойствах решения задачи (1.1).

Лемма 1. *При $A \le B$ решение задачи* (1.1) *возрастает, при $A \ge B$ – убывает.*

Доказательство. Пусть $z = u - B$. Тогда

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + a(x)z' + c(x)z = 0, \quad z(0) = A - B, \quad \lim_{x \to \infty} z(x) = \lim_{x \to \infty} z'(x) = 0.$$

Пусть $A \le B$ (случай $A \ge B$ аналогичен). Рассуждая от противного, нетрудно показать, что $z(x) \le 0$ при всех x, поэтому $u(x) \le B$. С другой стороны,

$$u'(x) = -\varepsilon^{-1}\int_x^\infty c(s)(u(s) - B)\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(t)dt\right]ds. \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует, что $u'(x) \ge 0$. Лемма доказана.

Из (1.2) следует, что для некоторой постоянной C

$$|u'(x)| \le C. \tag{1.3}$$

Как известно [13], для оператора L_ε справедлив принцип максимума, если из условия $L_\varepsilon\Psi(x) \ge 0$, $\alpha_1 < x < \alpha_2$, следует, что $\Psi(x)$ не может иметь на интервале (α_1, α_2) отрицательного минимума, где функция $\Psi(x) \in C^1[\alpha_1, \alpha_2] \cap C^2(\alpha_1, \alpha_2)$. Из принципа максимума следует, что если $L_\varepsilon\Psi(x) \ge 0$, $\alpha_1 < x < \alpha_2$, $\Psi(\alpha_1) \ge 0$, $\Psi(\alpha_2) \ge 0$, то $\Psi(x) \ge 0$, $\alpha_1 \le x \le \alpha_2$. Принцип максимума можно применять также в случае краевых условий III рода и в случае разностного оператора [14, с. 40].

Лемма 2. *При всех* $x \in [0, \infty)$

$$|u(x) - B| \le |A - B|\exp(r_0 x), \tag{1.4}$$

где r_0 *– отрицательный корень уравнения*

$$-\varepsilon r^2 + Dr + \beta = 0.$$

Доказательство. Пусть $z = u - B$. Определим

$$\Psi(x) = |A - B|\exp(r_0 x) \pm z(x).$$

Тогда

$$\Psi(0) \ge 0, \quad \lim_{x \to \infty}\Psi(x) = 0, \quad L_\varepsilon\Psi(x) \ge 0, \quad 0 < x < \infty.$$

Вследствие принципа максимума, справедливого для дифференциального оператора L_ε, имеем $\Psi(x) \ge 0$ $(0 \le x < \infty)$. Это доказывает лемму.

Для решения задачи (1.1) конечно-разностным методом необходимо перейти к краевым условиям на конечном интервале. Согласно [3], [4], условие на бесконечности в задаче (1.1) эквивалентно для больших x соотношению

$$u'(x) = \gamma(x)[u(x) - B], \tag{1.5}$$

где $\gamma(x)$ является решением сингулярной задачи Коши

$$R_\varepsilon\gamma = \varepsilon\gamma' - a\gamma + \varepsilon\gamma^2 - c = 0, \quad \lim_{x \to \infty}\gamma(x) = r, \tag{1.6}$$

где r – отрицательный корень уравнения $\varepsilon r^2 - mr - n = 0$; решение (1.6) существует и единственно.

Из (1.5) и леммы 1 следует $\gamma(x) \le 0$ при $x > 0$, из (1.2) и (1.5) нетрудно получить $|\gamma(x)| \le \|c\|/\alpha$.

С учетом (1.5) запишем задачу (1.1) на конечном интервале:

$$-\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)(u - B) = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(L_0) = \gamma(L_0)[u(L_0) - B]. \tag{1.7}$$

При переходе от (1.1) к задаче (1.7) значение $\gamma(L_0)$ может быть найдено с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на точность решения задачи (1.7).

Теорема 1. *Пусть* $\tilde\gamma(L_0) \le 0$, $|\gamma(L_0) - \tilde\gamma(L_0)| \le \Delta$. *Пусть* $\tilde u$ *– решение задачи* (1.7) *в случае возмущенного значения* $\tilde\gamma(L_0)$. *Тогда при всех* $x \in [0, L_0]$

$$|u(x) - \tilde u(x)| \le |A - B|\varepsilon\Delta\alpha^{-1}\exp[r_0 L_0 + \alpha\varepsilon^{-1}(x - L_0)].$$

Доказательство. Определим $z = u - \tilde u$. Тогда z является решением задачи

$$L_\varepsilon z = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(L_0) - \tilde\gamma(L_0)z(L_0) = [\gamma(L_0) - \tilde\gamma(L_0)][u(L_0) - B].$$

Определим функцию

$$\Psi(x) = \Delta\varepsilon\alpha^{-1}|u(L_0) - B|\exp[\varepsilon^{-1}\alpha(x - L_0)] \pm z(x).$$

Тогда

$$\Psi(0) \ge 0, \quad \Psi'(L_0) - \tilde\gamma(L_0)\Psi(L_0) \ge 0, \quad L_\varepsilon\Psi(x) \ge 0, \quad 0 < x < L_0.$$

Из принципа максимума и леммы 2 следует утверждение теоремы.

Оценим погрешность, которая может возникнуть, если при задании краевого условия в точке L_0 не использовать соотношение (1.5).

В соответствии с доказанной теоремой, в случае условия $\tilde{u}'(L_0) = 0$ выполнится оценка

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \le \varepsilon|A - B|\alpha^{-2}\|c\|\exp[r_0L_0 + \alpha\varepsilon^{-1}(x - L_0)], \quad 0 \le x \le L_0. \tag{1.8a}$$

Нетрудно показать, что в случае условия $\tilde{u}(L_0) = B$ выполнится

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \le |A - B|\exp[r_0L_0 + \alpha\varepsilon^{-1}(x - L_0)], \quad 0 \le x \le L_0. \tag{1.8б}$$

Остановимся на вопросе приближенного решения задачи (1.6). Перейдем от (1.6) к уравнению с возмущенными коэффициентами:

$$\varepsilon\tilde{\gamma}' - \tilde{a}\tilde{\gamma} + \varepsilon\tilde{\gamma}^2 - \tilde{c} = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\tilde{\gamma}(x) = r. \tag{1.9}$$

Предполагаем непрерывность функций a, c:

$$\tilde{a}(x) \longrightarrow m, \quad \tilde{c}(x) \longrightarrow n, \quad x \longrightarrow \infty, \quad \tilde{a}(x) \ge \tilde{\alpha} > 0, \quad \tilde{c}(x) \ge \tilde{\beta} > 0.$$

Лемма 3. *Пусть* $\|a - \tilde{a}\| \le \Delta$, $\|c - \tilde{c}\| \le \Delta$. *Тогда найдется* C *такое, что*

$$\|\gamma - \tilde{\gamma}\| \le C\Delta. \tag{1.10}$$

Доказательство. Учитывая, что (1.9) является аналогом уравнения (1.6) в случае возмущенных коэффициентов в уравнении (1.1), получаем $\tilde{\gamma}(x) \le 0$, $|\tilde{\gamma}(x)| \le \|\tilde{c}\|/\tilde{\alpha}$. Пусть $z = \gamma - \tilde{\gamma}$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' - [a - \varepsilon(\gamma + \tilde{\gamma})]z = c - \tilde{c} + (a - \tilde{a})\tilde{\gamma}, \quad \lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

Применяя принцип максимума к оператору R_ε, нетрудно показать, что

$$\|z\| \le \Delta\alpha^{-1}(1 + \|\tilde{c}\|\tilde{\alpha}^{-1}),$$

откуда следует (1.10). Лемма доказана.

Если при достаточно больших x справедливы представления

$$a(x) \approx \tilde{a}(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^{-i}, \quad c(x) \approx \tilde{c}(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i x^{-i}, \quad a_0 = m, \quad c_0 = n,$$

то, согласно [3], $\gamma(x)$ может быть приближенно найдено в виде

$$\gamma(x) \approx \tilde{\gamma}(x) = \sum_{i=0}^{N} \gamma_i x^{-i}.$$

Для этого необходимо подставить разложения a, c в (1.6): получим рекуррентную формулу относительно γ_i. Более точные утверждения имеются в [3].

Для приближенного нахождения $\gamma(x)$ можно использовать малость параметра ε. Пусть $\gamma_0(x)$ – отрицательное решение уравнения

$$-a\gamma_0(x) + \varepsilon\gamma_0^2(x) - c = 0.$$

Лемма 4. *Пусть функции* $a(x)$, $c(x)$ *непрерывно дифференцируемы при всех* $0 \le x < \infty$, $|a'(x)|$, $|c'(x)| \le C_1$. *Тогда найдется* C *такое, что при всех* $x \in [0, \infty)$ *будет* $|\gamma(x) - \gamma_0(x)| \le C\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $z = \gamma - \gamma_0$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' - az = \varepsilon(\gamma_0^2 - \gamma^2) - \varepsilon\gamma_0', \quad \lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

Для оператора R_ε справедлив принцип максимума, вследствие которого из условий

$$\lim_{x\to\infty}\Psi(x) \ge 0, \quad R_\varepsilon\Psi(x) \le 0, \quad 0 \le x < \infty, \tag{1.11}$$

вытекает $\Psi(x) \ge 0$ $(0 \le x < \infty)$. Определим

$$\Psi(x) = \alpha^{-1}\|\varepsilon(\gamma_0^2 - \gamma^2) - \varepsilon\gamma_0'\| \pm z(x).$$

Тогда выполнятся соотношения (1.11) и поэтому

$$|z(x)| \le \varepsilon\alpha^{-1}\|\gamma_0^2 - \gamma^2 - \gamma_0'\|. \tag{1.12}$$

Функция $\gamma_0(x)$ ограничена вместе с производной равномерно по ε. Учитывая, что $|\gamma(x)| \le C$, из (1.12) получаем утверждение леммы.

2. НЕЛИНЕЙНОЕ АВТОНОМНОЕ УРАВНЕНИЕ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Рассмотрим краевую задачу

$$T_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + mu' + g(u) = 0, \quad u(0) = A, \quad \lim_{x\to\infty}[u(x) - B] = \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0. \tag{2.1}$$

Предполагаем, что функция $g(s)$ дважды непрерывно дифференцируема при всех $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{gathered} \varepsilon \in (0, 1], \quad m > 0, \quad g(B) = 0, \quad g'(B) > 0, \quad |g''(B)| \le C, \\ g'(s) \ge -\beta, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0, \quad m^2 - 4\beta\varepsilon \ge \sigma > 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Вопросы переноса краевого условия из бесконечности в случае нелинейного уравнения рассматривались в [4], [5], [7]–[9], [11]. В [7] показана устойчивость решения задачи на конечном интервале к погрешности при задании правого краевого условия. Обоснована сходимость метода линеаризации Пикара. В [11] на полубесконечном интервале рассмотрено одномерное стационарное уравнение Бюргерса, краевое условие из бесконечности в точку L_0 снесено в результате аналитического интегрирования исходного уравнения от L_0 до бесконечности.

Задача (2.1) с ограничениями (2.2) является модельной, например, при математическом описании переноса пламени в случае одностадийного кинетического механизма и подобия полей температуры и концентрации [15], когда

$$g(T) = K(T - B)\exp(-E/T),$$

где T – температура смеси, m – скорость переноса пламени, ε – коэффициент диффузии, A – температура свежей смеси, B – температура горения, K – константа скорости реакции, E – энергия активации.

Получим оценку устойчивости оператора T_ε.

Лемма 5. *Пусть $p(x)$, $q(x)$ – две произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, ограниченные на бесконечности. Тогда при всех $0 \le x < \infty$*

$$|p(x) - q(x)| \le \exp(2\beta m^{-1}x)[m^2\beta^{-1}\sigma^{-1}\|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + |p(0) - q(0)|]. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $z = p - q$. Тогда

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + mz' + [g(p) - g(q)](p - q)^{-1}z = T_\varepsilon p - T_\varepsilon q.$$

Для $y < \infty$ рассмотрим интервал $[0, y]$. Определим

$$\Psi(x) = \exp(2\beta m^{-1}x)[m^2\beta^{-1}\sigma^{-1}\|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + |z(0)|] + \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - y)]|z(y)| \pm z(x).$$

При таком задании $\Psi(x)$ выполнится

$$L_\varepsilon\Psi(x) > 0, \quad 0 < x < y, \quad \Psi(0) \ge 0, \quad \Psi(y) \ge 0.$$

Учитывая, что для оператора L_ε справедлив принцип максимума [16], получаем $\Psi(x) \ge 0$ при $0 \le x \le y$. Устремляя $y \longrightarrow \infty$, приходим к утверждению леммы.

Задавая $p = u$, $q = 0$ в (2.3), получаем

$$|u(x)| \le \exp(2\beta m^{-1}x)[m^2\beta^{-1}\sigma^{-1}|g(0)| + |A|].$$

В силу условия $g'(B) > 0$, для заданного α: $g'(B) > \alpha > 0$ найдется L такая, что $g'_u(u(x)) \ge \alpha$ при $x \ge L$.

Лемма 6. *Решение $u(x)$ задачи* (2.1) *возрастает при $x \ge L$, если $u(L) \le B$, и убывает при $u(L) \ge B$.*

Доказательство. Пусть $u(L) \le B$, $z = u - B$. Определим линейный оператор:

$$L_\varepsilon\varphi = -\varepsilon\varphi'' + m\varphi' + [g(z + B) - g(B)]z^{-1}\varphi. \tag{2.4}$$

Если $\varphi(L) \le 0$, $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$, $L_\varepsilon\varphi(x) = 0$, то, как нетрудно убедиться, $\varphi(x) \le 0$ при $x \ge L$. Определяя $\varphi = z$, получаем $u(x) \le B$. Используя представление производной

$$u'(x) = -\varepsilon^{-1}\int_x^\infty [g(u(s)) - g(B)]\exp[m\varepsilon^{-1}(x - s)]ds, \tag{2.5}$$

получаем $u'(x) \ge 0$ при $x \ge L$. Случай $u(L) \ge B$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 7. *При всех $x \geq L$*

$$|u(x)-B| \leq |u(L)-B| \exp[r_0(x-L)],$$

где r_0 – отрицательный корень уравнения $-\varepsilon r^2 + mr + \alpha = 0$.

Доказательство можно осуществить на основе принципа максимума для оператора L_ε, как это сделано в лемме 2.

Используя (2.5), несложно показать, что производная решения задачи (2.1) удовлетворяет оценке (1.3).

Итак, получена оценка решения задачи (2.1) и его производной при выполнении условий (2.2). В соответствии с [10], [12], решение этой задачи существует и единственно.

Остановимся на вопросе переноса краевого условия из бесконечности в точку L_0. Предельное краевое условие на бесконечности в (2.1) при достаточно больших x эквивалентно соотношению (см. [8], [9]):

$$u'(x) = r_1[u(x)-B] + \gamma(u(x)), \tag{2.6}$$

где r_1 – отрицательный корень уравнения $-\varepsilon r^2 + mr + g'(B) = 0$, $\gamma(u)$ – решение задачи типа Ляпунова

$$\varepsilon\gamma'(u)[r_1(u-B)+\gamma(u)] = \varepsilon r_2\gamma(u) + g(u) - g'(B)(u-B); \quad \gamma(B) = 0, \quad r_1 + r_2 = m\varepsilon^{-1}; \tag{2.7}$$

решение задачи (2.7) существует и единственно. Перейдем от (2.1) к задаче на конечном интервале:

$$-\varepsilon u'' + mu' + g(u) = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(L_0) = r_1[u(L_0)-B] + \gamma(u(L_0)). \tag{2.8}$$

Оценим влияние погрешности в задании γ на решение задачи (2.8).

Теорема 2. *Пусть $\tilde{u}$ – решение задачи (2.8) в случае возмущенной функции $\tilde{\gamma}(V)$. Пусть функция $\tilde{\gamma}(V)$ непрерывно дифференцируема при всех $V \in \mathbb{R}$,*

$$-r_1 - \tilde{\gamma}'(V) \geq -\beta_0, \quad V \in \mathbb{R}, \quad \beta_0 > 0, \quad m - 2\beta_0\varepsilon \geq \eta > 0.$$

Пусть $|\gamma(u(L_0)) - \tilde{\gamma}(u(L_0))| \leq \Delta$. Тогда при всех $x \in [0, L_0]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq 2\Delta\varepsilon\eta^{-1}\exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x-L_0)].$$

Доказательство. Пусть $z = u - \tilde{u}$. Тогда

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + mz' + [g(u) - g(\tilde{u})](u-\tilde{u})^{-1}z = 0,$$

$$z(0) = 0, \quad D_\varepsilon z = z'(L_0) + \tau z(L_0) = \gamma(u(L_0)) - \tilde{\gamma}(u(L_0)),$$

где $\tau = -r_1 - \tilde{\gamma}'(\theta)$ для некоторого θ между $u(L_0)$ и $\tilde{u}(L_0)$.

Можно показать, что если существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$ такая, что

$$\varphi(x) > 0, \quad D_\varepsilon\varphi > 0, \quad L_\varepsilon\varphi(x) > 0, \quad 0 < x < L_0,$$

то для оператора L_ε справедлив принцип максимума и из условий

$$\Psi(x) \in C^2[0, L_0], \quad L_\varepsilon\Psi(x) \geq 0, \quad 0 < x < L_0, \quad \Psi(0) \geq 0, \quad D_\varepsilon\Psi \geq 0 \tag{2.9}$$

следует $\Psi(x) \geq 0$ $(0 \leq x \leq L_0)$. Чтобы показать это, нужно представить $\Psi(x)$ в виде произведения $\Psi(x) = \varphi(x)V(x)$, и тогда сформулированное утверждение следует из рассуждений от противного.

Учитывая ограничения на $\tilde{\gamma}$, убеждаемся, что в качестве $\varphi(x)$ можно выбрать $\varphi(x) = \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x-L_0)]$. Определим

$$\Psi(x) = 2\Delta\varepsilon\eta^{-1}\exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x-L_0)] \pm z(x).$$

При таком задании $\Psi(x)$ выполнятся условия (2.9) и поэтому, в силу принципа максимума, $\Psi(x) \geq 0$ $(x \in [0, L_0])$. Это доказывает теорему.

Лемма 8. *При всех $x \geq L$ выполняется*

$$|\gamma(u(x))| \leq C\exp[2r_0(x-L)],$$

где r_0 определено в лемме 7.

Доказательство. Учитывая (2.6), (2.7), получаем

$$\varepsilon\frac{d}{dx}\gamma(u(x)) - r_2\varepsilon\gamma(u(x)) = g(u(x)) - g'(B)[u(x) - B].$$

Из этого уравнения следует

$$\gamma(u(x)) = -\varepsilon^{-1}\int_x^\infty [g(u(s)) - g'(B)(u(s) - B)]\exp[r_2(x-s)]ds.$$

Следовательно,

$$|\gamma(u(x))| \le \max_{x \ge L}\left|g''_u(u(x))\right|(2r_2\varepsilon)^{-1}[u(x) - B]^2, \quad x \ge L.$$

Учитывая значение r_2 и лемму 7, получаем утверждение леммы.

Остановимся на случае $\tilde{\gamma}(u) = 0$. Правое краевое условие тогда принимает вид

$$\tilde{u}'(L_0) = r_1[\tilde{u}(L_0) - B].$$

Из теоремы 2 и леммы 8 при $L_0 \ge L$ получим оценку точности:

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \le C\varepsilon\exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0) + 2r_0(L_0 - L)].$$

Проанализируем, какой может быть погрешность, если при задании правого краевого условия при переходе к конечному интервалу не учитывать поведение решения при достаточно больших x.

Пусть $\tilde{u}'(L_0) = 0$. Нетрудно показать, что при $L_0 > L$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \le C\varepsilon\exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0) + r_0(L_0 - L)], \quad 0 \le x \le L_0.$$

Пусть $\tilde{u}(L_0) = B$. В этом случае при $L_0 > L$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \le C\exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0) + r_0(L_0 - L)], \quad 0 \le x \le L_0.$$

Остановимся на вопросе о приближенном решении задачи (2.7). Определим

$$\gamma_0(u) = [g'(B)(u - B) - g(u)]/(\varepsilon r_2). \tag{2.10}$$

Лемма 9. *Найдется C такое, что при всех $x > 0$ будет*

$$|\gamma(u(x)) - \gamma_0(u(x))| \le C\varepsilon,$$

где $u(x)$ – решение задачи (2.1).

Доказательство. Пусть $z = \gamma - \gamma_0$. Из (2.7) следует, что

$$\varepsilon\frac{d}{dx}z(u(x)) - \varepsilon r_2 z(u(x)) = -\varepsilon\gamma_0'(u(x))u'(x).$$

Из этого уравнения можно получить

$$z(u(x)) = \int_x^\infty \gamma_0'(u(s))u'(s)\exp[r_2(x-s)]ds.$$

Теперь нетрудно убедиться, что $|z(u(x))| \le C\varepsilon$. Лемма доказана.

Заметим, что при выборе $\gamma_0(u)$ согласно (2.10) в соответствии с леммой 9 выполнены условия теоремы 2 с $\Delta = C\varepsilon$, следовательно, при этом верна соответствующая данной теореме оценка погрешности перехода к конечному интервалу.

3. АНАЛИЗ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Рассмотрим краевую задачу

$$T_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + a(x)u' + f(u, x) = 0, \quad u(0) = A, \quad R_\varepsilon u = u'(L_0) + \Theta(u(L_0)) = 0. \tag{3.1}$$

Полагаем, что всюду ниже выполнены условия

$$\begin{gathered}\varepsilon \in (0, 1], \quad a(x) \ge \alpha > 0, \quad \Theta'(V) \ge -\beta_0, \quad V \in \mathbb{R}, \quad \alpha - 2\varepsilon\beta_0 \ge \eta > 0, \\ f'_u \ge -\beta, \quad \alpha^2 - 4\delta\varepsilon \ge \sigma > 0, \quad \beta > 0, \quad \beta_0 > 0, \quad \delta = \max\{\beta, \beta_0, \beta_0\alpha\}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Предполагаем, что функции a, f, Θ дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам. Задача (3.1) с условиями (3.2) является более общей, чем задачи (1.7) и (2.8). Остановимся на свойствах решения задачи (3.1) с условиями (3.2).

Докажем, что для двух произвольных, дважды непрерывно дифференцируемых функций $p(x)$ и $q(x)$ справедлива оценка

$$|p(x)-q(x)| \le S(x) = \exp(2\delta\alpha^{-1}x)[\alpha^2\delta^{-1}\sigma^{-1}\|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + |p(0)-q(0)|] + \\ + 2\varepsilon\eta^{-1}|R_\varepsilon p - R_\varepsilon q|\exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x-L_0)]. \tag{3.3}$$

Введем $z = p - q$. Тогда

$$L_\varepsilon z(x) = -\varepsilon z''(x) + a(x)z'(x) + [f(p, x) - f(q, x)](p-q)^{-1}z = T_\varepsilon p - T_\varepsilon q,$$
$$z(0) = p(0) - q(0), \quad D_\varepsilon z = z'(L_0) + \tau z(L_0) = R_\varepsilon p - R_\varepsilon q,$$

где $\tau = \Theta'(s)$ для некоторого s между $p(L_0)$ и $q(L_0)$.

Определим $\Psi(x) = S(x) \pm z(x)$. Тогда для $\Psi(x)$ будут выполнены неравенства (2.9) и на основании принципа максимума получена оценка (3.3).

Из оценки (3.3) следует единственность решения задачи (3.1) и оценка решения

$$|u(x)| \le \exp(2\delta\alpha^{-1}x)[\alpha^2\delta^{-1}\sigma^{-1}\|f(0, x)\| + |A|] + 2\varepsilon\eta^{-1}|\Theta(0)|\exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x-L_0)].$$

Существование решения задачи (3.1) следует из того, что можно построить верхнее и нижнее решения [12, с. 39]. Оценим производные решения задачи (3.1).

Лемма 10. *Найдется C такое, что при всех $x \in [0, L_0]$*

$$|u^{(j)}(x)| \le C\{1 + \varepsilon^{1-j}\exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x-L_0)]\}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{3.4}$$

Доказательство. Используя (3.1), нетрудно показать, что

$$u'(x) = \exp\left[\int_{L_0}^{x}\varepsilon^{-1}a(s)ds\right]u'(L_0) - \varepsilon^{-1}\int_{x}^{L_0} f(u(s), s)\exp\left[\int_{s}^{x}\varepsilon^{-1}a(s)ds\right]ds. \tag{3.5}$$

Из краевого условия следует, что $|u'(L_0)| \le C$. Тогда из (3.5) получим $|u'(L_0)| \le C_1$.

Докажем (3.4) при $j = 2$. Пусть $p(x) = u'(x)$. Дифференцируя (3.1), получаем

$$-\varepsilon p''(x) + a(x)p'(x) = F(x, u, u'), \quad |F(x, u, u')| \le C_2.$$

Следовательно,

$$p'(x) = \exp\left[\int_{L_0}^{x}\varepsilon^{-1}a(s)ds\right]p'(L_0) + \varepsilon^{-1}\int_{x}^{L_0} F(s, u(s), u'(s))\exp\left[\int_{s}^{x}\varepsilon^{-1}a(s)ds\right]ds.$$

Из (3.1) получим $|p'(L_0)| \le C_3\varepsilon^{-1}$. Теперь из представления для $p'(x)$ следует (3.4) при $j = 2$. Случай $j = 3$ аналогичен. Лемма доказана.

Согласно лемме 10, решение задачи (3.1) может иметь слабо выраженный пограничный слой около конца интервала $x = L_0$, когда производные, начиная со второй, неограниченно растут при $\varepsilon \longrightarrow 0$. Целесообразно исследовать схему направленных разностей на равномерную сходимость по параметру ε, так как эта схема проще схем с экспоненциальными подгонками, например из [16]–[18]. Итак, на равномерной сетке Ω с шагом h выпишем схему направленных разностей для задачи (3.1):

$$T_n^h u^h = -\varepsilon\Lambda_{xx,n}u^h + a_n\Lambda_{x,n}u^h + f(u_n^h, x_n) = 0, \quad u_0^h = A, \quad R_h u^h = \Lambda_{x,N}u^h + \Theta(u_N^h) = 0, \tag{3.6}$$

где

$$\Lambda_{x,n}u^h = \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h}, \quad \Lambda_{xx,n}u^h = \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2}.$$

Для анализа схемы (3.6) рассмотрим линейный оператор

$$L_n^h z^h = -\varepsilon\Lambda_{xx,n}z^h + a_n\Lambda_{x,n}z^h + b_n z_n^h \tag{3.7}$$

с краевыми условиями

$$z_0^h, \quad D_h z^h = \tau z_N^h + \Lambda_{x,N}z^h. \tag{3.8}$$

Лемма 11. *Пусть в* (3.7), (3.8) $\varepsilon > 0$, $a_n \geq 0$. *Тогда если* $\exists\varphi^h$:

$$\varphi_n^h > 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N, \quad L_n^h\varphi^h > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \quad D_h\varphi^h > 0, \tag{3.9}$$

то для оператора L^h *справедлив принцип максимума и из условий*

$$z_0^h \geq 0, \quad D_h z^h \geq 0, \quad L_n^h z^h \geq 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{3.10}$$

следует $z_n^h \geq 0$ *при всех* $n = 0, 1, \ldots, N$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого n_0 будет $z_{n_0}^h < 0$, и получим противоречие. Определим сеточную функцию V^h: $z_n^h = V_n^h\varphi_n^h$. Тогда $V_{n_0}^h < 0$. Покажем, что V^h имеет локальный отрицательный минимум. Из условия $z_0^h \geq 0$ следует $V_0^h \geq 0$. Для z_N^h справедливо одно из двух:

1) $z_N^h \geq 0$; тогда $V_N^h \geq 0$, при этом V^h имеет локальный отрицательный минимум;

2) $z_N^h < 0$; из условия $D_h\varphi^h > 0$ следует

$$\tau\varphi_N^h V_N^h + \frac{\varphi_N^h V_N^h - \varphi_{N-1}^h V_N^h}{h} < 0,$$

с другой стороны, из условия $D_h z^h \geq 0$ получим

$$\tau\varphi_N^h V_N^h + \frac{\varphi_N^h V_N^h - \varphi_{N-1}^h V_{N-1}^h}{h} \geq 0;$$

из этих двух неравенств следует $V_N^h > V_{N-1}^h$.

Тогда для V^h выполнятся условия $V_0^h \geq 0, 0 > V_N^h > V_{N-1}^h$, откуда следует, что V^h имеет локальный отрицательный минимум.

Пусть минимум достигается в узле x_m. Тогда

$$4V_m^h < 0, \quad \Lambda_{x,m}V^h \leq 0, \quad \Lambda_{x,m+1}V^h \geq 0. \tag{3.11}$$

Нетрудно убедиться, что

$$L_m^h z^h = a_m\varphi_{m-1}^h\Lambda_{x,m}V^h + V_m^h L_m^h\varphi^h - \varepsilon h^{-1}\varphi_{m+1}^h\Lambda_{x,m+1}V^h + \varepsilon h^{-1}\varphi_{m-1}^h\Lambda_{x,m}V^h.$$

Учитывая условия (3.9) и (3.11), получаем $L_m^h z^h < 0$, что противоречит (3.10). Лемма доказана.

Определим сеточные функции φ^h, θ^h, ρ^h:

$$\varphi_n^h = \left(1 + \frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)^{n-N}, \quad \theta_n^h = \left(1 + \frac{2\delta h}{\alpha}\right)^n, \quad \rho_n^h = \left(1 + \frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)^{n+1-N}. \tag{3.12}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\theta_n^h \leq \exp(2\delta\alpha^{-1}x_n), \quad \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x_n - L_0)] \leq \varphi_n^h \leq \exp[\alpha(2\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_0)].$$

Лемма 12. *Пусть* $h \leq h_0 = \min\{\sigma/(4\alpha\beta), \eta/(2\alpha\beta_0)\}$, p^h *и* q^h – *две произвольные сеточные функции. Тогда при всех* n

$$\begin{gathered}|p_n^h - q_n^h| \leq C[\|T^h p^h - T^h q^h\| + |p_0^h - q_0^h|]\exp(2\delta\alpha^{-1}x_n) + \\ + (4\varepsilon + 2\alpha h)\eta^{-1}|R_h p^h - R_h q^h|\exp[\alpha(2\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_0)].\end{gathered} \tag{3.13}$$

Доказательство. Определим $z^h = p^h - q^h$. Тогда

$$L^h z^h = T^h p^h - T^h q^h, \quad z_0^h = p_0^h - q_0^h, \quad D_h z^h = R_h p^h - R_h q^h, \tag{3.14}$$

где L^h соответствует (3.7) с $b_n = [f(p_n^h, x_n) - f(q_n^h, x_n)]/(p_n^h - q_n^h)$, D_h – линейный оператор:

$$D_h z^h = [\Theta(p_N^h) - \Theta(q_N^h)](p_N^h - q_N^h)^{-1}z_N^h + \Lambda_{x,N}z^h.$$

Учитывая ограничение $h \leq h_0$, получаем при всех n

$$L_n^h\varphi^h \geq \sigma(8\varepsilon + 4\alpha h)^{-1}\varphi_n^h, \quad L_n^h\theta^h \geq \delta\sigma(2\alpha^2 + 4\delta\alpha h)^{-1}\theta_n^h, \quad D_h\varphi^h \geq \eta(4\varepsilon + 2\alpha h)^{-1}, \quad D_h\theta^h \geq 0. \tag{3.15}$$

Учитывая (3.15) и лемму 11, получаем, что для оператора L^h справедлив принцип максимума. Определим Ψ^h:

$$\Psi^h = C\{\|T^h p^h - T^h q^h\| + |p_0^h - q_0^h|\}\theta^h + (4\varepsilon + 2\alpha h)\eta^{-1}|R_h p^h - R_h q^h|\varphi^h \pm z^h.$$

Учитывая (3.14), (3.15), можно подобрать C таким образом, чтобы для функции Ψ^h выполнились условия (3.10). Тогда из принципа максимума следует утверждение леммы.

Из (3.13) следуют единственность решения схемы (3.6) и оценка устойчивости

$$|u_n^h| \le C_1[\|f(0, x)\| + |A|]\exp\left(\frac{2\delta}{\alpha}x_n\right) + C_2|\Theta(0)|(\varepsilon + h)\exp\left[\frac{\alpha(x_n - L_0)}{2\varepsilon + \alpha h}\right]. \tag{3.16}$$

Существование решения схемы (3.6) следует из наличия верхнего и нижнего решений. Исследуем вопрос о равномерной сходимости схемы (3.6).

Теорема 3. *Пусть $h \le h_0$, где h_0 определено в лемме* 12. *Найдется C такое, что*

$$\|[u]_\Omega - u^h\| \le Ch, \tag{3.17}$$

где $[u]_\Omega$ – решение задачи (3.1) *в узлах сетки Ω.*

Доказательство. Определим $z^h = u^h - [u]_\Omega$. Тогда

$$L^h z^h = T^h u^h - T^h[u]_\Omega, \tag{3.18}$$

где L^h соответствует (3.7) при $b_n = [f(u_n^h, x_n) - f(u_n, x_n)]/(u_n^h - u_n)$, $u_n = u(x_n)$. Оценим правую часть (3.18):

$$T_n^h u^h - T_n^h[u]_\Omega = \varepsilon(u''(x_n) - \Lambda_{xx,n}[u]_\Omega) - a_n(u'(x_n) - \Lambda_{x,n}[u]_\Omega).$$

Используя неравенства (см. [18])

$$|\Lambda_{xx,n}[u]_\Omega - u''(x_n)| \le \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |u'''(s)|ds, \tag{3.19}$$

$$|\Lambda_{x,n}[u]_\Omega - u'(x_n)| \le h^{-1}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\int_s^{x_n}|u''(t)|dtds \tag{3.20}$$

и привлекая оценки производных (3.4), получаем

$$|T_n^h u^h - T_n^h[u]_\Omega| \le C_1 h\{1 + \theta^{-1}\exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x_{n+1} - L_0)]\},$$

где $\theta = \max(h, \varepsilon)$. Определим Ψ^h:

$$\Psi^h = (C_2\theta^h + C_3\rho^h)h \pm z^h.$$

Учитывая, что

$$D_h z^h = \frac{\Theta(u_N^h) - \Theta(u_N)}{u_N^h - u_N}z_N^h + \Lambda_{x,N}z^h = u'_N - \Lambda_{x,N}[u]_\Omega,$$

и используя соотношения (3.4) и (3.20), получаем

$$|D_h z^h| \le C_4 h\theta^{-1}.$$

Учитывая, что

$$L_n^h\rho^h \ge C_5\theta^{-1}\rho_n^h, \quad \rho_n^h \ge \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x_{n+1} - L_0)],$$

и привлекая соотношения (3.15) и (3.18), получаем, что при некоторых C_2 и C_3 для Ψ^4 выполнятся неравенства (3.10). В соответствии с принципом максимума, при всех n будет $\Psi_n^h \ge 0$. Это доказывает, что $|z_n^h| \le Ch$ при всех n, кроме случая $n = N$. Остается показать, что $|z_N^h| \le Ch$. Для этого случая имеем

$$|z_N^h| \le |u_N - u_{N-1}| + |u_{N-1} - u_{N-1}^h| + |u_N^h - u_{N-1}^h|.$$

Из краевого условия в (3.6) получаем $\left|u_N^h - u_{N-1}^h\right| \le C_6 h$. Пользуясь полученной оценкой для $n < N$, приходим к утверждению теоремы.

Схема (3.6) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений. Покажем, что при достаточно хорошем начальном приближении метод Ньютона является сходящимся, причем сходимость метода равномерна по параметру ε. Итак, определим метод линеаризации:

$$\begin{gathered} -\varepsilon\Lambda_{xx,n}u^{j+1} + a_n\Lambda_{x,n}u^{j+1} + f'_u(u_n^j, x_n)u_n^{j+1} = f'_u(u_n^j, x_n)u_n^j - f(u_n^j, x_n), \\ u_0^{j+1} = A, \quad \Theta'(u_N^j)u_N^{j+1} + \Lambda_{x,N}u^{j+1} = -\Theta(u_N^j) + \Theta'(u_N^j)u_N^j. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Сеточная функция u^0 предполагается заданной. Определим $z^j = u^h - u^j$. Тогда

$$-\varepsilon\Lambda_{xx,n}z^{j+1} + a_n\Lambda_{x,n}z^{j+1} + f'_u(u_n^j, x_n)z_n^{j+1} = 0.5 f''_u(\theta_n^j, x_n)(z_n^j)^2,$$

$$z_0^{j+1} = 0, \quad \Theta'(u_N^j)z_N^{j+1} + \Lambda_{x,N}z^{j+1} = -\Theta''(\theta_N^j)(z_N^j)^2/2$$

для некоторой сеточной функции θ^j. Пользуясь принципом максимума, нетрудно получить

$$\|z^{j+1}\| \le C\|z^j\|^2.$$

Следовательно, при достаточно хорошем начальном приближении итерационная схема (3.21) квадратично сходится.

На каждой итерации система уравнений линейна относительно u^{j+1}, но матрица этой системы в силу допустимости $f'_u < 0$ может не иметь диагонального преобладания. Для нахождения решения такой системы можно использовать метод немонотонной прогонки [14].

Покажем, что схема (3.6) устойчива к погрешностям в Θ.

Лемма 13. *Пусть функция* $\tilde\Theta(V)$ *непрерывно дифференцируема при* $V \in \mathbb{R}$, *причем* $\tilde\Theta'(V) \ge -\beta_0$. *Пусть* $\tilde u^h$ *– решение схемы* (3.6) *с возмущенной функцией* $\tilde\Theta$. *Тогда если* $|\Theta(u_N^h) - \tilde\Theta(u_N^h)| \le \Delta$, *то при всех* $x_n \in \Omega$

$$\left|u_n^h - \tilde u_n^h\right| \le \Delta\eta^{-1}(4\varepsilon + 2\alpha h)\exp[\alpha(2\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_0)]. \tag{3.22}$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - \tilde u^h$. Тогда

$$L_n^h z^h = 0, \quad z_0^h = 0, \quad D_h z^h = \frac{z_N^h - z_{N-1}^h}{h} + \frac{\tilde\Theta(u_N^h) - \tilde\Theta(\tilde u_N^h)}{u_N^h - \tilde u_N^h}z_N^h = \tilde\Theta(u_N^h) - \Theta(u_N^h),$$

где L^h соответствует (3.7) с $b_n = [f(u_n^h, x_n) - f(\tilde u_n^h, x_n)]/(u_n^h - \tilde u_n^h)$.

Определим сеточную функцию Ψ^h:

$$\Psi_n^h = \Delta\eta^{-1}(4\varepsilon + 2\alpha h)\varphi_n^h \pm z_n^h.$$

Тогда для функции Ψ^h выполнятся соотношения (3.10) и вследствие принципа максимума при всех n будет $\Psi_n^h \ge 0$. Из этого следует утверждение леммы.

В случае линейной задачи (1.7) имеем $\Theta(u_N^h) = \gamma(L_0)(B - u_N^h)$. Если $|\tilde\gamma(L_0) - \gamma(L_0)| \le \Delta$, то для постоянной C, соответствующей оценке (3.17), получим

$$\left|\tilde\Theta(u_N^h) - \Theta(u_N^h)\right| \le \Delta[|A - B|\exp(r_0 L_0) + Ch].$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Сначала была рассмотрена линейная краевая задача

$$-\varepsilon u''(x) + u'(x) + u(x) - 1 = 0, \quad u(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 1. \tag{4.1}$$

Решение этой задачи выписывалось в явном виде и сравнивалось с решением данного уравнения на конечном интервале при различных подходах к заданию правого краевого условия. Вычислялась максимальная погрешность, возникающая при переходе к конечному интервалу.

В табл. 1 приведена норма погрешности в зависимости от ε и длины интервала L_0 при задании $u(L_0) = 1$.

В табл. 2 приведена норма погрешности при задании $u'(L_0) = 0$.

Задание правого краевого условия согласно (1.5) с выбором $\gamma(x) = r$, где r соответствует (1.6), приводит к совпадению решения задачи на конечном интервале с решением задачи (4.1).

Данные табл. 1 и 2 подтверждают полученные оценки точности (1.8а) и (1.8б) соответственно.

Теперь остановимся на случае нелинейной краевой задачи.

Сначала была рассмотрена нелинейная краевая задача

$$-\varepsilon u'' + u' + u\exp(u) = 0, \quad u(0) = 1, \quad \lim_{x \to \infty} u(x) = 0. \tag{4.2}$$

Задача (4.2) сводилась к конечному интервалу, и для решения редуцированной задачи применялась схема направленных разностей. Численно исследовалось влияние способа задания краевого условия на решение разностной схемы. Шаг разностной сетки принимался постоянным ($h = 0.1$), и за сеточное решение, не искаженное из-за переноса краевого условия из бесконечности, принималось решение на достаточно большом интервале длины L ($L = 100$), при этом $|u(100)|$, $|u'(100)| < \exp(-50)$. Рассматривались различные способы задания краевого условия: M1: $u(L_0) = 0$; M2: $u'(L_0) = 0$; M3: согласно (2.8) с $\gamma(u) = 0$; M4: согласно (2.8) с $\gamma(u)$, соответствующим (2.10).

Схема (3.6) представляет собой систему нелинейных уравнений, и для нахождения ее решения использовался модифицированный метод Пикара:

$$-\varepsilon\Lambda_{xx,\,n}u^{j+1} + a_n\Lambda_{x,\,n}u^{j+1} + Gu_n^{j+1} = Gu_n^j - f(u_n^j, x_n), \quad u_0^{j+1} = A, \quad \Lambda_{x,\,N}u^{j+1} + Gu_N^{j+1} = Gu_N^j - \Theta(u_N^j).$$

При $G \geq 5$ итерационный метод сходился. Итерации заканчивались, если $\|u^{j+1} - u^j\| \leq 10^{-12}$. В табл. 3 приведена норма погрешности в зависимости от способа задания краевого условия и длины интервала при $\varepsilon = 1$, в табл. 4 – при $\varepsilon = 0.1$. Под погрешностью понимается разность между сеточным решением на данном интервале и на интервале длины $L = 100$. При других ε результаты вычислений аналогичны: точность способов M2–M4 увеличивается с уменьшением $(\varepsilon + h)$ и с увеличением длины интервала и согласуется с оценкой (3.22). Наименее точен способ M1. Более точен способ M4. Нелинейность в краевом условии для способа M4 не увеличивала количество итераций.

Аналогичным образом была рассмотрена краевая задача

$$-\varepsilon u'' + u' + (u-2)\exp(-u^{-1}) = 0, \quad u(0) = 1, \quad \lim_{x \to \infty} u(x) = 2. \tag{4.3}$$

Начальное приближение для итерационного метода при всех вычислениях задавалось в виде прямой линии между значениями решения на концах интервала.

Таблица 1

ε \ L_0	1	5	10	20
1.0	1.62	0.14	0.65E-2	0.13E-4
1.0E-1	1.20	0.03	0.31E-3	0.33E-7
1.0E-2	1.11	0.02	0.15E-3	0.75E-8
1.0E-3	1.10	0.02	0.14E-3	0.63E-8
1.0E-4	1.10	0.02	0.14E-3	0.62E-8

Таблица 2

ε \ L_0	1	5	10	20
1.0	0.53	0.52E-1	0.23E-2	0.49E-5
1.0E-1	1.0E-1	0.26E-2	0.26E-4	0.28E-8
1.0E-2	1.1E-2	0.21E-3	0.15E-5	0.74E-10
1.0E-3	1.1E-3	0.20E-4	0.14E-6	0.63E-11
1.0E-4	1.1E-4	0.20E-5	0.14E-7	0.62E-12

Таблица 3

L_0	M1	M2	M3	M4
1	0.42	0.16	0.29E-1	0.17E-1
5	0.30E-1	0.13E-1	0.31E-3	0.41E-4
10	0.14E-2	0.61E-3	0.74E-5	0.68E-5

Таблица 4

L_0	M1	M2	M3	M4
1	0.26	0.54E-1	0.99E-2	0.12E-2
5	0.64E-2	0.11E-2	0.11E-4	0.54E-5
10	0.78E-4	0.13E-4	0.75E-7	0.74E-7

Таблица 5

ε	M1	M2	M3	M4
1.0	0.71	0.17	0.23E-1	0.17E-1
1.0E-1	0.66	0.59E-1	0.13E-1	0.14E-2
1.0E-2	0.66	0.34E-1	0.87E-2	0.98E-4
1.0E-3	0.66	0.31E-1	0.82E-2	0.88E-5

В табл. 5 приведена норма погрешности в случае задачи (4.3) при $L_0 = 1$ в зависимости от способа задания краевого условия и значения ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. *Абрамов А.А.* О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 4. С. 733–737.
3. *Биргер Е.С., Ляликова Н.Б.* О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 6. С. 979–990.
4. *Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б.* Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1981.
5. *Конюхова Н.Б.* К решению краевых задач на бесконечном интервале для некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1970. Т. 10. № 5. С. 1150–1163.
6. *Биргер Е.С.* Об оценке погрешности замены условия ограниченности решения линейного дифференциального уравнения на бесконечном интервале // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 3. С. 674–678.
7. *Конюхова Н.Б.* Об итеративном решении нелинейных краевых задач, выделяющих малые решения некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 5. С. 1221–1231.
8. *Конюхова Н.Б.* Об устойчивых многообразиях Ляпунова для автономных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1358–1379.
9. *Конюхова Н.Б.* Гладкие многообразия Ляпунова и сингулярные краевые задачи // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1996.
10. *Клоков Ю.А.* Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики. Рига, 1963.
11. *Захаров Ю.Н.* Об одном методе решения уравнения с краевыми условиями на бесконечности // Вычисл. технологии. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1993. Т. 2. № 7. С. 55–68.
12. *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, 1978.
13. *Dorr F.W., Parter S.V., Shampine L.F.* Applications of the maximum principle to singular perturbation problems // SIAM Review. 1973. V. 15. № 1. P. 43–87.
14. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
15. *Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б. и др.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
16. *Задорин А.И., Игнатьев В.Н.* Численное решение квазилинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 1. С. 157–160.
17. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237–248.
18. *Kellog R.B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points // Math. Comput. 1978. V. 32. № 144. P. 1025–1039.