Численное решение уравнения с малым параметром и точечным источником на бесконечном интервале

А.И. Задорин

УДК 519.632

Задорин А.М. Численное решение уравнения с малым параметром и точечным источником на бесконечном интервале // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 1998. — Т. 1, № 3. — С. 249–260.

Рассматривается уравнение второго порядка с малым параметром при старшей производной на бесконечном интервале. Предполагается, что производная решения имеет разрыв первого рода при $x = 0$. Задано условие на скачок производной. Исследуется вопрос переноса краевых условий на конечный интервал, строится и обосновывается разностная схема для решения возникающей на конечном интервале задачи.

Zadorin A.I. Numerical solution of the equation with a small parameter and a point source on the infinite interval // Siberian J. of Numer. Mathematics / Sib. Division of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 1998. — Vol. 1, № 3. — P. 249–260.

The second order equation with a small parameter effecting a higher derivative and a point source on the infinite interval is considered. The question of the trasformation of the boundary conditions to the finite interval is investigated. The difference scheme for the problem on the finite interval is constructed. The uniform convergence of the difference scheme is proved.

При математическом моделировании стационарного распространения примеси от точечного источника возникает краевая задача для уравнения с малыми параметрами при старших производных и источником, содержащим δ-функцию Дирака. Краевые условия для такой задачи ставятся в бесконечно удаленной от источника точке. При этом возникает вопрос, как перенести краевые условия на границу ограниченной области.

Другая проблема – в потере гладкости решения из-за присутствия в уравнении источника с δ-функцией. В [1, 2] эта проблема решается на основе использования интегрального тождества и построения соотношений баланса для ячеек сеточной области. В [3] предлагается в окрестности источника использовать приближенную аналитическую формулу для решения, а вне этой окрестности использовать конечно-разностную схему, но не исследуется точность данного подхода.

В данной работе эти вопросы рассматриваются в случае обыкновенного дифференциального уравнения. Рассматриваемая постановка задачи является упрощением задачи, моделирующей реальные процессы переноса, однако она содержит часть имеющихся проблем.

Итак, рассмотрим исходную краевую задачу

$$Lu = \varepsilon u'' - a(x)u' - c(x)u = f(x), \quad x \neq 0, \tag{1а}$$

$$L_0 u = \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q, \tag{1б}$$

$$u(x) \to 0,\ x \to -\infty, \qquad u(x) \to 0,\ x \to +\infty, \tag{1в}$$

где

$$
\begin{aligned}
&D \geq a(x) \geq \alpha > 0, \quad c(x) \geq \beta > 0, \quad \varepsilon > 0,\ Q > 0,\\
&a(x) \to a_1, \quad c(x) \to c_1, \quad f(x) \to 0, \quad x \to -\infty,\\
&a(x) \to a_2, \quad c(x) \to c_2, \quad f(x) \to 0, \quad x \to +\infty.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Предполагаем, что функции $a(x)$, $c(x)$, $f(x)$ – достаточно гладкие. Условие на скачок производной соответствует тому, что в точке $x = 0$ находится точечный источник мощности Q, задаваемый δ-функцией Дирака [4].

Решение $u(x)$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой функцией всюду, кроме точки нуль, где сама функция непрерывна, а ее первая производная имеет разрыв первого рода.

Задача (1), (2) является модельной при анализе переноса примеси от точечного источника в направлении ветра [4], при этом: $u(x)$ – концентрация примеси, ε – коэффициент диффузии, $a(x)$ – скорость ветра, $c(x)$ – коэффициент поглощения примеси, Q – мощность точечного источника, $f(x)$ – несосредоточенный источник или сток примеси.

В данной работе из оценки производных решения сделан вывод, что в окрестности источника имеется внутренний экспоненциальный переходной слой. При построении разностной схемы на конечном интервале учтено поведение решения в окрестности источника. Схемы экспоненциальной подгонки строились в целом ряде работ, например, в [5–8]. В данной работе так же строится схема экспоненциальной подгонки, в отличие от [5–8] в постановке задачи добавляется соотношение на скачок производной.

Перенос краевых условий из бесконечности осуществлен на основании подхода [10, 11]. В соответствии с этим подходом предельное условие на бесконечности выделяет семейство решений исходного уравнения и значения этих решений порождают в фазовом пространстве переменных устойчивое многообразие, принадлежность решения к которому при определенных значениях аргумента дает граничное условие в конечной точке.

Всюду далее под C и C_i будут подразумеваться положительные постоянные, не зависимые от параметра ε и шагов разностной сетки. Под нормой функции непрерывного аргумента $p(x)$ будем понимать $\|p\| = \max |p(x)|$, где x пробегает область определения функции. Аналогично определяется норма сеточной функции $\|p^h\|_\Omega$.

1. Анализ решения исходной задачи

Покажем, что для дифференциального оператора, соответствующего задаче (1), справедлив принцип максимума, и из условий

$$
L\Psi(x) \leq 0, \quad x \neq 0, \qquad L_0\Psi(x) \leq 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \Psi(x) \geq 0 \tag{3}
$$

следует, что $\Psi(x) \geq 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, для функции $\Psi(x)$, дважды непрерывно дифференцируемой всюду кроме нуля, в котором сама функция непрерывна, а ее первая производная имеет разрыв первого рода.

Предположим, что $\Psi(x_0) < 0$ для некоторого x_0. Тогда в силу непрерывности $\Psi(x)$ и заданных краевых условий существует точка s локального отрицательного минимума. Если $s \neq 0$, то получим противоречие с условием $L\Psi(s) \leq 0$; если же $s = 0$, то – противоречие с условием $L_0\Psi(s) \leq 0$. Итак, из (3) следует $\Psi(x) \geq 0$.

Согласно принципу максимума $u(x) \geq 0$ при $f = 0$ и решение задачи (1) единственно.

Лемма 1. *При всех x*

$$|u(x)| \le \left\| \frac{f(x)}{c(x)} \right\| + \Phi(x), \tag{4}$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} Q\alpha^{-1}\exp(\alpha\varepsilon^{-1}x), & \text{если } x \le 0, \\ Q\alpha^{-1}\exp(r_0 x), & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

$$r_0 = -\frac{2\beta}{D + \sqrt{D^2 + 4\beta\varepsilon}}, \quad 0 > r_0 > -\beta/D.$$

Доказательство. Определим

$$\Psi(x) = \left\| \frac{f(x)}{c(x)} \right\| + \Phi(x) \pm u(x).$$

Тогда $L_0\Psi(x) \le 0$. Нетрудно убедиться, что $L\Psi(x) \le 0$ при $x < 0$. В случае $x > 0$ имеем:

$$L\Psi(x) \le Q\alpha^{-1}[\varepsilon r_0^2 - Dr_0 - \beta]\exp(r_0 x) = 0.$$

Итак, для функции $\Psi(x)$ выполнены условия (3). Из принципа максимума следует утверждение леммы. □

Рассмотрим случай $f = 0$. Покажем, что $u(x)$ возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$. Пусть $x > 0$. Представляя уравнение (1a) в дивергентном виде и интегрируя, получим:

$$u'(x) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_x^\infty [c(s)u(s) + f(s)]\exp\left[\int_s^x \varepsilon^{-1}a(t)\,dt\right] ds. \tag{5}$$

Из этого соотношения функция $u(x)$ при $f = 0$ убывает. Случай $x < 0$ аналогичен.

Лемма 2. *Пусть функции $a(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы. Найдется постоянная C такая, что для $j = 1, 2, 3, 4$ при всех $x < 0$ справедливы оценки $|u^j(x)| \le C[1 + \varepsilon^{-j}\exp(\alpha\varepsilon^{-1}x)]$.*

Доказательство. Пусть $x < 0$. Представим уравнение (1a) в виде:

$$\frac{d}{dx}\left(\varepsilon u'(x)\exp\left[\int_x^0 a(s)\varepsilon^{-1}ds\right]\right) = [c(x)u(x) + f(x)]\exp\left[\int_x^0 a(s)\varepsilon^{-1}ds\right]. \tag{6}$$

Пусть величина η такова, что $u(0) - u(-\varepsilon) = u'(\eta)\varepsilon$. Из этого уравнения и из того, что функция $u(x)$ равномерно ограничена по ε, следует неравенство $|u'(\eta)| \le C\varepsilon^{-1}$. Интегрируя уравнение (6) от η до 0, получим $|u'(-0)| \le C\varepsilon^{-1}$. Интегрируя (6) от x до 0, получим требуемую оценку при $j = 1$.

Дифференцируя уравнение (1a), вводя $p(x) = u'(x)$, и представляя полученное уравнение в виде (6), получаем аналогичным образом оценку при $j = 2$. Таким же образом можно рассмотреть случай других j. □

Лемма 3. *Пусть функции $a(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы. Тогда найдется постоянная C такая, что для $j = 1, 2, 3, 4$ при всех $x > 0$ справедливы оценки $|u^j(x)| \le C$.*

Утверждение леммы при $j = 1$ следует из представления производной в виде (5). При других j может использоваться аналогичное представление для других производных.

Итак, решение задачи (1) имеет внутренний экспоненциальный слой слева от точки $x = 0$ и не имеет больших градиентов по параметру ε правее точки $x = 0$.

Остановимся на вопросе переноса краевых условий из $\pm\infty$. Согласно подходу [10, 11], предельное условие $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$ выделяет однопараметрическое семейство решений уравнения (1а) в соответствии с представлением

$$\varepsilon u'(x) = \gamma_1(x)u(x) + \beta_1(x), \quad x < 0, \tag{7}$$

где $\gamma_1(x)$ является решением сингулярной задачи Коши

$$\varepsilon\gamma' - a(x)\gamma + \gamma^2 - c(x)\varepsilon = 0, \quad \gamma(x) \to r_1,\ x \to -\infty, \tag{8}$$

r_1 – положительный корень уравнения $\gamma^2 - a_1\gamma - c_1\varepsilon = 0$, функция $\beta_1(x)$ служит решением сингулярной задачи Коши

$$\varepsilon\beta_1' + [\gamma_1(x) - a(x)]\beta_1 = \varepsilon f(x), \quad \beta_1(x) \to 0,\ x \to -\infty. \tag{9}$$

Аналогично, предельное краевое условие $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ выделяет однопараметрическое семейство решений

$$u'(x) = \gamma_2(x)u(x) + \beta_2(x), \tag{10}$$

где $\gamma_2(x)$ есть решение сингулярной задачи Коши

$$\varepsilon\gamma' - a(x)\gamma + \varepsilon\gamma^2 - c(x) = 0, \quad \gamma(x) \to r_2,\ x \to +\infty, \tag{11}$$

r_2 – отрицательный корень уравнения $\varepsilon\gamma^2 - a_2\gamma - c_2 = 0$, функция $\beta_2(x)$ является решением сингулярной задачи Коши

$$\varepsilon\beta_2' - [a(x) - \gamma_2(x)\varepsilon]\beta_2 = f(x), \quad \beta_2(x) \to 0,\ x \to +\infty. \tag{12}$$

Используя в (1б) соотношения (7) и (10), при $f = 0$ получим:

$$u(0) = \frac{Q}{\gamma_1(0) - \varepsilon\gamma_2(0)}. \tag{13}$$

Оценим вспомогательные функции $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$.

Лемма 4.

$$\gamma_1(x) \ge \alpha > 0 \quad \textit{при всех } x \le 0, \qquad \gamma_2(x) \le r_0 < 0 \quad \textit{при всех } x \ge 0. \tag{14}$$

Доказательство. Оцениваемые функции не зависят от f, поэтому рассмотрим случай $f(x) = 0$, $\beta_1(x) = 0$. Исходя из (7), несложно получить соотношение

$$u(x) = u(0)\exp\left[\int\limits_0^x \varepsilon^{-1}\gamma_1(x)\,dx\right].$$

Согласно принципу максимума $u(x) \le u(0)\exp[\alpha\varepsilon^{-1}x]$ при $x \le 0$. Из этих двух соотношений следует оценка $\int_x^0 [\gamma_1(s) - \alpha]\,ds \ge 0$ для произвольного $x \le 0$. Отсюда $\gamma_1(0) \ge \alpha$.

Итак, $\lim_{x\to-\infty}\gamma_1(x)\ge\alpha$, $\gamma_1(0)\ge\alpha$. Можно показать, что если s – точка локального экстремума функции $\gamma_1(x)$, то

$$\gamma_1(s)=\frac{1}{2}\left[a(s)+\sqrt{a(s)^2+4\varepsilon\, c(s)}\right]>\alpha.$$

Отсюда $\gamma_1(x)\ge\alpha$. Второе неравенство в (14) доказывается аналогично. □

Используя лемму 4 в (13), при $f=0$ получим: $0<u(0)\le Q/[\alpha+|r_0|\varepsilon]$.

С учетом соотношений (7), (10), от задачи (1) можно перейти к задаче на конечном интервале, содержащем точку $x=0$:

$$\begin{aligned}
&Lu=\varepsilon u''-a(x)u'-c(x)u=f(x),\quad x\ne0,\\
&L_0u=\varepsilon u'(+0)-\varepsilon u'(-0)=-Q,\\
&\varepsilon u'(L_1)-\gamma_1(L_1)u(L_1)=\beta_1(L_1),\quad u'(L_2)-\gamma_2(L_2)u(L_2)=\beta_2(L_2).
\end{aligned}\tag{15}$$

По аналогии с задачей (1) можно показать, что, в силу условий $\gamma_1(x)>0$, $\gamma_2(x)<0$, к дифференциальному оператору задачи (15) можно применять принцип максимума.

Функции γ_i и β_i, как решения соответствующих сингулярных задач Коши, могут быть найдены с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на решение задачи (15).

При $f=0$ можно получить более точный результат, поэтому рассмотрим этот случай отдельно.

Пусть $\tilde u(x)$ – решение задачи (15) для возмущенных значений $\tilde\gamma_i$ и $\tilde\beta_i$.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)=0$, $\beta_1(x)=\beta_2(x)=0$. *Пусть также*

$$|\tilde\gamma_1(L_1)-\gamma_1(L_1)|\le\Delta_1,\quad \tilde\gamma_1(L_1)\ge\alpha,\quad |\tilde\gamma_2(L_2)-\gamma_2(L_2)|\le\Delta_2,\quad \tilde\gamma_2(L_2)\le0.$$

Тогда при всех $x\in[L_1,L_2]$ *выполняется оценка*

$$|u(x)-\tilde u(x)|\le\Delta_1\frac{Q}{\alpha^2}\exp[\alpha\varepsilon^{-1}L_1]+\varepsilon\Delta_2\frac{Q}{\alpha^2}\exp[r_0L_2+\alpha\varepsilon^{-1}(x-L_2)]\,.\tag{16}$$

Доказательство. Пусть $z=u-\tilde u$. Тогда

$$\begin{aligned}
&Lz(x)=0,\quad L_0z(x)=0,\\
&-\varepsilon z'(L_1)+\tilde\gamma_1z(L_1)=(\tilde\gamma_1-\gamma_1)u(L_1),\\
&z'(L_2)-\tilde\gamma_2z(L_2)=(\gamma_2-\tilde\gamma_2)u(L_2).
\end{aligned}$$

Определим $\Psi(x)=\tilde\gamma_1^{-1}\Delta_1|u(L_1)|+\alpha^{-1}\varepsilon\Delta_2|u(L_2)|\exp[\varepsilon^{-1}\alpha(x-L_2)]\pm z(x)$. Нетрудно убедиться, что при всех $x\ne0$

$$L\Psi(x)\le0,\quad L_0\Psi(x)\le0,\quad -\varepsilon\Psi'(L_1)+\tilde\gamma_1\Psi(L_1)\ge0,\quad \Psi'(L_2)-\tilde\gamma_2\Psi(L_2)\ge0.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x)\ge0$ при всех x. Учитывая (4), получим утверждение теоремы. □

Исходя из оценки (16), можно проанализировать, как за счет выбора L_1 и L_2 уменьшить погрешность, возникающую при приближенном решении задач (8) и (11).

Из (16) следует, что с уменьшением параметра ε погрешность Δ_2 уменьшается линейно, а Δ_1 – экспоненциально.

При численном моделировании распространения примеси от точечного источника в ряде работ в качестве краевых условий задают условие совпадения концентрации примеси с фоновой или условие, что производная концентрации стала равной нулю. Проанализируем точность этих подходов для модельной задачи (1) и $Q > 0$, $f = 0$ (когда действует только точечный источник).

Итак, рассмотрим различные способы задания краевых условий:

1. $\tilde{u}(L_1) = 0$, $\tilde{u}(L_2) = 0$. Задавая функцию

$$\Psi(x) = |u(L_1)| + |u(L_2)| \exp[\varepsilon^{-1}\alpha(x - L_2)] \pm z(x), \quad z = u - \tilde{u},$$

на основании принципа максимума можем убедиться, что $\Psi(x) \geq 0$, $x \in [L_1, L_2]$. Следовательно, при всех $x \in [L_1, L_2]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{Q}{\alpha} \exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon} L_1\right] + \frac{Q}{\alpha} \exp\left[r_0 L_2 + \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - L_2)\right]. \tag{17}$$

2. $\tilde{u}'(L_1) = 0$, $\tilde{u}'(L_2) = 0$. Отсюда $\tilde{\gamma}_1(L_1) = 0$, $\tilde{\gamma}_2(L_2) = 0$. В соответствии с (16)

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \gamma_1(L_1)\frac{Q}{\alpha^2} \exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon} L_1\right] + \varepsilon \|c\| \frac{Q}{\alpha^3} \exp\left[r_0 L_2 + \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - L_2)\right], \tag{18}$$

где $\alpha < \gamma_1(L_1) \leq \sqrt{D^2 + 4\|c\|\varepsilon}$.

3. $\tilde{u}(L_1) = 0$, $\tilde{u}'(L_2) = 0$. Нетрудно убедиться, что

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{Q}{\alpha} \exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon} L_1\right] + \varepsilon \|c\| \frac{Q}{\alpha^3} \exp\left[r_0 L_2 + \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - L_2)\right]. \tag{19}$$

Из (17)–(19) видно, что без использования специальных краевых условий наименьшая погрешность будет при нулевом условии Дирихле на левом конце конечного интервала (с "наветренной" стороны) и равенстве нулю производной на правом конце интервала.

Теперь рассмотрим общий случай. По аналогии с теоремой 1 можно доказать, что справедлива

Теорема 2. *Пусть*

$$|\tilde{\gamma}_1(L_1) - \gamma_1(L_1)| \leq \Delta_1, \quad |\tilde{\beta}_1(L_1) - \beta_1(L_1)| \leq \Delta_1, \quad \tilde{\gamma}_1(L_1) \geq \alpha,$$

$$|\tilde{\gamma}_2(L_2) - \gamma_2(L_2)| \leq \Delta_2, \quad |\tilde{\beta}_2(L_2) - \beta_2(L_2)| \leq \Delta_2, \quad \tilde{\gamma}_2(L_2) \leq 0.$$

Тогда для некоторой постоянной C при всех $x \in [L_1, L_2]$ выполняется оценка

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq C\{\Delta_1 + \varepsilon\Delta_2 \exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_2)]\}.$$

Теперь построим приближенные формулы для нахождения $\gamma_i(x)$ и $\beta_i(x)$ из соответствующих сингулярных задач Коши.

Положим

$$\tilde{\gamma}_1(x) = \frac{1}{2}\left[a(x) + \sqrt{a(x)^2 + 4c(x)\varepsilon}\right]. \tag{20}$$

Лемма 5. *Пусть функции $a(x)$, $c(x)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда найдется $C > 0$ такое, что $|\gamma_1(x) - \tilde{\gamma}_1(x)| \leq C\varepsilon$ при всех $x \leq 0$.*

Доказательство. Пусть $z(x) = \gamma_1(x) - \tilde{\gamma}_1(x)$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' + [\gamma_1(x) + \tilde{\gamma}_1(x) - a(x)]z = -\varepsilon\tilde{\gamma}_1'(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} z(x) = 0.$$

В силу леммы 4, $\gamma_1(x) + \tilde{\gamma}_1(x) - a(x) \geq \alpha$. Зададим $\Psi(x) = \varepsilon\alpha^{-1}\|\tilde{\gamma}_1'(x)\| \pm z(x)$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty} \Psi(x) \geq 0, \quad R_\varepsilon\Psi(x) \geq 0, \quad x \in (-\infty, 0].$$

По принципу максимума $\Psi(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty, 0]$. Отсюда, $|z(x)| \leq \varepsilon\alpha^{-1}\|\tilde{\gamma}_1'(x)\|$. □

Введем

$$\tilde{\gamma}_2(x) = -2c(x)\left[a(x) + \sqrt{a(x)^2 + 4c(x)\varepsilon}\right]^{-1}. \tag{21}$$

Лемма 6. *Пусть функции $a(x)$, $c(x)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда найдется $C > 0$ такое, что $|\gamma_2(x) - \tilde{\gamma}_2(x)| \leq C\varepsilon$ при всех $x \geq 0$.*

Доказательство. Пусть $z(x) = \gamma_2(x) - \tilde{\gamma}_2(x)$. Тогда

$$R_\varepsilon z(x) = \varepsilon z' - [a(x) - \varepsilon\gamma_2 - \varepsilon\tilde{\gamma}_2]z = -\varepsilon\tilde{\gamma}_2'(x), \qquad \lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

Для оператора R_ε справедлив принцип максимума:

$$\lim_{x\to\infty} \Psi(x) \geq 0, \quad R_\varepsilon\Psi(x) \leq 0, \quad 0 \leq x < \infty \qquad \Rightarrow \qquad \Psi(x) \geq 0, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Зададим $\Psi(x) = \varepsilon\alpha^{-1}\|\tilde{\gamma}_2'\| \pm z(x)$. В силу принципа максимума $|z(x)| \leq \varepsilon\alpha^{-1}\|\tilde{\gamma}_2'(x)\|$. Функция $\tilde{\gamma}_2'(x)$ равномерно ограничена по ε. □

Пусть

$$\tilde{\beta}_2(x) = -\frac{f(x)}{a(x)}. \tag{22}$$

Применяя принцип максимума к задаче (12), можно показать, что $|\beta_2(x) - \tilde{\beta}_2(x)| \leq C\varepsilon$ при всех $x > 0$ и постоянной $C > 0$.

В соответствии с полученными оценками точность формул (20)–(22) увеличивается с уменьшением параметра ε. Эти формулы можно применять к задаче (15) при произвольных L_1 и L_2.

Задача (9) при задании $\tilde{\gamma}_1$ в соответствии с (20) принимает вид:

$$\begin{gathered} \beta_1' + d(x)\beta_1 = f(x), \quad \beta_1(x) \to 0, \quad x \to -\infty, \\ d(x) = 2c(x)\left[a(x) + \sqrt{a(x)^2 + 4\varepsilon c(x)}\right]^{-1}. \end{gathered} \tag{23}$$

Для достаточно больших $|x|$ функция $\beta_1(x)$ из (23) может быть определена с помощью разложения в ряд по обратным степеням x [10]. Если при $x \ll 0$ справедливы представления

$$d(x) \approx \sum_{i=0}^{N} d_i x^{-i}, \qquad f(x) \approx \sum_{i=0}^{N} f_i x^{-i},$$

то значение $\beta_1(x)$ может быть приближенно найдено в виде

$$\beta_1(x) \approx \tilde{\beta}_1(x) = \sum_{i=0}^{N} \beta_i^0 x^{-i}.$$

Для этого необходимо подставить в (23) разложения d, f, β_1 и получить рекуррентную формулу относительно β_i^0. Подробнее данный подход изложен в [10]. В частности, если существует $f_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} xf(x)$, то $|\beta_1(x)| \le C/|x|$. Если еще существуют пределы

$$d_0 = \lim_{x\to-\infty} d(x), \quad d_1 = \lim_{x\to-\infty} x(d(x) - d_0), \quad f_2 = \lim_{x\to-\infty} x(xf(x) - f_1),$$

то, полагая $\tilde{\beta}_1(x) = f_1/(d_0 x)$, получим $|\beta_1(x) - \tilde{\beta}_1(x)| \le C/x^2$ при некотором $C > 0$.

Данный подход может быть применен к нахождению приближений для $\beta_2(L_2)$, $\gamma_1(L_1)$ и $\gamma_2(L_2)$.

2. Построение и анализ разностной схемы

Остановимся на вопросе численного решения задачи (15). Согласно лемме 2 решение задачи (15) имеет внутренний экспоненциальный слой слева от точки $x = 0$. Следовательно, по крайней мере слева от точки $x = 0$, в случае равномерной сетки, целесообразно использовать схему экспоненциальной подгонки [5]. Пусть Ω – равномерная сетка на интервале $[L_1, L_2]$:

$$\Omega = \{x_n : \ x_n = x_{n-1} + h, \ x_0 = L_1, \ x_N = L_2, \ \ x_M = 0\}.$$

При аппроксимации $u'(-0)$ учтем экспоненциальный рост решения. В результате получим разностную схему:

$$\begin{aligned}
L_n^h u^h &= \varepsilon_n \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} - a_n \frac{u_{n+1}^h - u_{n-1}^h}{2h} - c_n u_n^h = f(x_n),\\
L_M^h u^h &= \varepsilon \frac{u_{M+1}^h - u_M^h}{h} - \tilde{\varepsilon} \frac{u_M^h - u_{M-1}^h}{h} = -Q \ ,\\
L_0^h u^h &= -\varepsilon \frac{u_1^h - u_0^h}{h} + \gamma_1(L_1) u_0^h = -\beta_1(L_1),\\
L_N^h u^h &= \frac{u_N^h - u_{N-1}^h}{h} - \gamma_2(L_2) u_N^h = \beta_2(L_2),
\end{aligned} \tag{24}$$

где $n = 1, 2, \ldots, N-1$, $n \ne M$, и

$$\varepsilon_n = \frac{a_n h}{2} \operatorname{cth} \frac{a_n h}{2\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{a_M h}{1 - \exp(-a_M \varepsilon^{-1} h)}, \quad a_n = a(x_n), \quad c_n = c(x_n). \tag{25}$$

Схема (24) является обобщением схемы из [5] на случай краевых условий третьего рода и скачка производной в некоторой внутренней точке.

Используя полученные оценки производных, оценивая погрешность аппроксимации в каждом узле сетки, подбирая подходящую барьерную сеточную функцию и применяя принцип максимума, по аналогии с [6] можно показать, что справедлива

Теорема 3. *Пусть $u(x)$, u^h – решения задач (15) и (24) соответственно. Тогда найдется постоянная $C > 0$ такая, что при всех $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ выполняется оценка*

$$|u_n^h - u(x_n)| \le Ch.$$

Докажем устойчивость схемы (24) к возмущениям функций $\gamma_1(L_1)$, $\beta_1(L_1)$ и $\gamma_2(L_2)$, $\beta_2(L_2)$. Такой анализ необходим в связи с тем, что эти функции находятся приближенно. Пусть $\tilde{u}^h$ – решение разностной схемы (24) в случае возмущенных значений $\tilde{\gamma}_i$ и $\tilde{\beta}_i$.

Теорема 4. *Пусть* $f(x) = 0$, $\beta_1(x) = \beta_2(x) = 0$. *Пусть также*

$$|\tilde{\gamma}_1(L_1) - \gamma_1(L_1)| \le \Delta_1, \quad \tilde{\gamma}_1(L_1) \ge \alpha, \qquad |\tilde{\gamma}_2(L_2) - \gamma_2(L_2)| \le \Delta_2, \quad \tilde{\gamma}_2(L_2) \le 0 .$$

Тогда для постоянной C, соответствующей оценке сходимости в теореме 3, при всех $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} |u_n^h - \tilde{u}_n^h| \le\ & \Delta_1\alpha^{-1}[Q\alpha^{-1}\exp(\alpha\varepsilon^{-1}L_1) + Ch] + \\ & \Delta_2(2\varepsilon + \alpha h)\alpha^{-1}[Q\alpha^{-1}\exp(r_0 L_2) + Ch]\exp\{\alpha(2\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_2)\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда

$$\begin{aligned} L_n^h z^h &= \varepsilon_n \frac{z_{n+1}^h - 2z_n^h + z_{n-1}^h}{h^2} - a_n \frac{z_{n+1}^h - z_{n-1}^h}{2h} - c_n z_n^h = 0, \\ L_M^h z^h &= \varepsilon \frac{z_{M+1}^h - z_M^h}{h} - \tilde{\varepsilon} \frac{z_M^h - z_{M-1}^h}{h} = 0, \\ L_0^h z^h &= -\varepsilon \frac{z_1^h - z_0^h}{h} + \tilde{\gamma}_1(L_1) z_0^h = (\tilde{\gamma}_1 - \gamma_1) u_0^h, \\ L_N^h z^h &= \frac{z_N^h - z_{N-1}^h}{h} - \tilde{\gamma}_2(L_2) z_N^h = (\gamma_2 - \tilde{\gamma}_2) u_N^h, \end{aligned}$$

где $n = 1, 2, \ldots, N-1$, $n \ne M$.

Зададим $\phi_n^h = [1 + \alpha h/(2\varepsilon)]^{n-N}$ и покажем, что при всех $n = 1, 2, \ldots, N-1$

$$L_n^h \phi^h \le 0. \tag{26}$$

Пусть $n \ne M$. Тогда $L_n^h \phi^h$ можно записать в виде:

$$L_n^h \phi^h = \left(\varepsilon_n - \frac{a_n h}{2}\right) \frac{\phi_{n+1}^h - 2\phi_n^h + \phi_{n-1}^h}{h^2} - a_n \frac{\phi_n^h - \phi_{n-1}^h}{h} - c_n \phi_n^h.$$

Нетрудно показать, что $x \operatorname{cth}(x) \le 1 + x$ при $x > 0$. Следовательно, $\varepsilon_n - (a_n h)/2 \le \varepsilon$. С учетом этого неравенства получим

$$L_n^h \phi^h \le (4\varepsilon + 2\alpha h)^{-1}(\alpha^2 - 2a_n\alpha)\phi_n^h \le 0.$$

Пусть теперь $n = M$. Учитывая, что $x/[1 - \exp(-x)] \ge 1 + x/2$ при $x > 0$, получим: $\tilde{\varepsilon} \ge \varepsilon + (a_M h)/2$. Поэтому

$$L_M^h \phi^h \le \varepsilon \frac{\phi_{M+1}^h - 2\phi_M^h + \phi_{M-1}^h}{h} - \frac{a_M}{2}(\phi_M^h - \phi_{M-1}^h) \le 0.$$

Итак, при всех $n = 1, 2, \ldots, N-1$ справедливы неравенства (26).

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\phi_N^h - \phi_{N-1}^h}{h} - \tilde{\gamma}_2(L_2)\phi_N^h \ge \frac{\alpha}{2\varepsilon + \alpha h}. \tag{27}$$

Задавая сеточную функцию

$$\Psi_n^h = \alpha^{-1}\Delta_1|u_0^h| + \alpha^{-1}(2\varepsilon+\alpha h)\Delta_2|u_N^h|\phi_n^h \pm z_n^h,$$

с учетом оценок (26), (27) получим

$$L_n^h\Psi^h \le 0, \quad -\varepsilon\frac{\Psi_1^h-\Psi_0^h}{h} + \tilde\gamma_1(L_1)\Psi_0^h \ge 0, \quad \frac{\Psi_N^h-\Psi_{N-1}^h}{h} - \tilde\gamma_2(L_2)\Psi_N^h \ge 0$$

при $n = 1, 2, \dots, N-1$.

В силу принципа максимума $\Psi_n^h \ge 0$ при всех n. Учитывая теорему 3 и оценку (4), получаем утверждение теоремы. □

Теперь рассмотрим общий случай. По аналогии с предыдущей теоремой, при

$$|\tilde\gamma_1(L_1)-\gamma_1(L_1)| \le \Delta_1, \quad |\tilde\beta_1(L_1)-\beta_1(L_1)| \le \Delta_1, \quad \tilde\gamma_1(L_1) \ge \alpha,$$
$$|\tilde\gamma_2(L_2)-\gamma_2(L_2)| \le \Delta_2, \quad |\tilde\beta_2(L_2)-\beta_2(L_2)| \le \Delta_2, \quad \tilde\gamma_2(L_2) \le 0$$

для некоторой постоянной C при всех $x_n \in \Omega$ выполняется оценка

$$|u_n^h - \tilde u_n^h| \le C\{\Delta_1 + (\varepsilon+h)\Delta_2\exp[\alpha(2\varepsilon+\alpha h)^{-1}(x_n-L_2)]\}.$$

Если источник задан в виде δ-функции, то можно не переходить к соотношению (1б) на скачок производной, а ввести для этой функции некоторую аппроксимацию на сетке [12]. Выпишем для такого случая схему экспоненциальной подгонки:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_n\frac{u_{n+1}^h-2u_n^h+u_{n-1}^h}{h^2} - a_n\frac{u_{n+1}^h-u_{n-1}^h}{2h} - c_nu_n^h = f(x_n)+F_n^h,\\ &\varepsilon\frac{u_1^h-u_0^h}{h} - \gamma_1(L_1)u_0^h = \beta_1(L_1), \quad \frac{u_N^h-u_{N-1}^h}{h} - \gamma_2(L_2)u_N^h = \beta_2(L_2), \end{aligned} \tag{28}$$

где ε_n соответствует (25), $a_n = a(x_n)$, $c_n = c(x_n)$, $n = 1, 2, \dots, N-1$,

$$F_n^h = \begin{cases} -Q/h, & \text{если } x_n = 0,\\ 0, & \text{если } x_n \ne 0. \end{cases}$$

Монотонной схеме А.А. Самарского [13] в (28) соответствует $\varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon}{1+a_nh/(2\varepsilon)}$, а схеме направленных разностей - $\varepsilon_n = \varepsilon + a_nh/2$.

Остановимся на результатах численных экспериментов для краевой задачи

$$\varepsilon u'' - u' - u + \delta(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} u(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} u(x) = 0, \tag{29}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Точное решение этой задачи выписывается в явном виде [4, стр. 29]:

$$u(x) = [1+4\varepsilon]^{-0.5}\begin{cases} \exp[(1+\sqrt{1+4\varepsilon})/(2\varepsilon)x] & \text{при } x \le 0,\\ \exp[-2/(1+\sqrt{1+4\varepsilon})x] & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

В численных экспериментах сначала задача (29) сводилась к интервалу $[-1,1]$. Для схемы (24) численно исследовалась ее точность в зависимости от способа задания

Таблица 1. Норма погрешности в зависимости от ε и способа задания краевых условий при $h = 0.01$

ε	Краевые условия		
	Дирихле	Неймана	специальные
1	0.24	0.25	$0.17_{10}{-1}$
$1_{10}{-1}$	0.34	$0.32_{10}{-1}$	$0.38_{10}{-2}$
$1_{10}{-2}$	0.36	$0.75_{10}{-2}$	$0.41_{10}{-2}$
$1_{10}{-3}$	0.37	$0.55_{10}{-2}$	$0.19_{10}{-2}$
$1_{10}{-4}$	0.37	$0.55_{10}{-2}$	$0.18_{10}{-2}$
$1_{10}{-5}$	0.37	$0.55_{10}{-2}$	$0.18_{10}{-2}$

Таблица 2. Норма погрешности в зависимости от ε и шага сетки для схемы (24)

ε	Шаг сетки		
	0.1	0.05	0.01
1	$0.14_{10}{-1}$	$0.69_{10}{-2}$	$0.14_{10}{-2}$
$1_{10}{-1}$	$0.34_{10}{-1}$	$0.18_{10}{-1}$	$0.38_{10}{-2}$
$1_{10}{-2}$	$0.18_{10}{-1}$	$0.11_{10}{-1}$	$0.41_{10}{-2}$
$1_{10}{-3}$	$0.18_{10}{-1}$	$0.90_{10}{-2}$	$0.19_{10}{-2}$
$1_{10}{-4}$	$0.18_{10}{-1}$	$0.90_{10}{-2}$	$0.18_{10}{-2}$
$1_{10}{-5}$	$0.18_{10}{-1}$	$0.90_{10}{-2}$	$0.18_{10}{-2}$

Таблица 3. Норма погрешности в зависимости от ε и шага сетки для схемы (28)

ε	Шаг сетки		
	0.1	0.05	0.01
1	$0.60_{10}{-3}$	$0.15_{10}{-3}$	$0.61_{10}{-4}$
$1_{10}{-1}$	$0.13_{10}{-1}$	$0.32_{10}{-2}$	$0.27_{10}{-3}$
$1_{10}{-2}$	$0.72_{10}{-1}$	$0.25_{10}{-1}$	$0.16_{10}{-2}$
$1_{10}{-3}$	$0.89_{10}{-1}$	$0.46_{10}{-1}$	$0.79_{10}{-2}$
$1_{10}{-4}$	$0.91_{10}{-1}$	$0.47_{10}{-1}$	$0.97_{10}{-2}$
$1_{10}{-5}$	$0.91_{10}{-1}$	$0.47_{10}{-1}$	$0.99_{10}{-2}$

Таблица 4. Норма погрешности различных схем в зависимости от параметра ε

ε	Схема направленных разностей	Схема А.А. Самарского	Схема экспоненциальной подгонки
1	$0.84_{10}{-3}$	$0.59_{10}{-4}$	$0.61_{10}{-4}$
$1_{10}{-1}$	$0.12_{10}{-1}$	$0.31_{10}{-3}$	$0.27_{10}{-3}$
$1_{10}{-2}$	0.12	$0.29_{10}{-1}$	$0.16_{10}{-2}$
$1_{10}{-3}$	$0.89_{10}{-1}$	$0.16_{10}{-1}$	$0.79_{10}{-2}$
$1_{10}{-4}$	$0.99_{10}{-2}$	$0.97_{10}{-2}$	$0.97_{10}{-2}$
$1_{10}{-5}$	$0.99_{10}{-2}$	$0.99_{10}{-2}$	$0.99_{10}{-2}$

краевых условий. Задавались условия Дирихле (перенос нулевых краевых условий из $\pm\infty$), условия Неймана (аппроксимация условий равенства нулю производных на концах интервала) и специальные краевые условия (учитывающие $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ из (20) и (21)). В табл. 1 приведена норма погрешности в зависимости от ε и способа задания краевых условий при $h = 0.01$. Из таблицы следует, что наименьшая погрешность достигается при задании краевых условий с приближенными значениями γ_1 и γ_2 из (20) и (21). Для краевых условий Дирихле погрешность значительна.

Далее исследовалась точность схемы (24) с $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ из (20) и (21) в зависимости от шага сетки. Задача решалась на интервале $[-5, 5]$. В табл. 2 приведена норма погрешности в зависимости от ε и шага сетки. Данные таблицы подтверждают равномерную сходимость схемы (24) со скоростью $O(h)$.

В табл. 3 для сравнения при тех же условиях приведена норма погрешности для схемы (28). Из последней таблицы следует, что если не вводить аппроксимацию условия (1б) скачка производной при $x = 0$, то точность схемы экспоненциальной подгонки при определенных ε становится хуже. Подтверждается так же, что если аппроксимировать (1б) без учета экспоненциального роста решения, то точность схемы существенно снижается.

Теперь сравним различные схемы без учета соотношения (1б). Пусть интервале $[-5,5]$, $h = 0.01$; γ_1, γ_2 соответствуют (20) и (21). В табл. 4 приведена норма погрешности различных схем в зависимости от параметра ε.

Литература

[1] **Пененко В.В.** Методы численного моделирования атмосферных процессов. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981.

[2] **Пененко В.В., Алоян А.Е.** Модели и методы для задач охраны окружающей среды. — Новосибирск: Наука, 1985.

[3] **Арраго Л.Р., Швец М.Е.** К вопросу распространения тяжелой однородной примеси из высотного источника // Труды ГГО. — 1963. — № 15. — С. 41–51.

[4] **Марчук Г.И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука, 1982.

[5] **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. — 1969. — Т. 6, № 2. — С. 237–248.

[6] **Kellogg R.B., Tsan A.** Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points // Math. Comput. — 1978. — Vol. 32, № 144. — P. 1025–1039.

[7] **Дулан.Э., Миллер Д., Шилдерс У.** Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. — М.: Мир, 1983.

[8] **Задорин А.И., Игнатьев В.Н.** Численное решение квазилинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. — 1991. — Т. 31, № 1. — С. 157–160.

[9] **Лисейкин В.Д., Петренко В.Е.** Адаптивно-инвариантный метод численного решения задач с пограничными и внутренними слоями. — Новосибирск, 1989.

[10] **Биргер Е.С., Ляликова Н.Б.** О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. — 1965. — Т. 5, № 6. — С. 979–990.

[11] **Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б.** Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по вычисл. матем. — М.: ВЦ АН СССР, 1981.

[12] **Берлянд М.Е.** Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. — Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

[13] **Самарский А.А.** Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.

644099, г. Омск, ул. Певцова, 13,
Омский филиал Института математики
им. С.Л. Соболева
E-mail: zadorin@iitam.omsk.net.ru

Статья поступила
1 октября 1997 г.
Переработанный вариант
11 февраля 1998 г.