Численный метод для системы линейных уравнений второго порядка с малым параметром на полубесконечном интервале*

А.И. Задорин, О.В. Харина

УДК 519.62

Задорин А.И., Харина О.В. Численный метод для системы линейных уравнений второго порядка с малым параметром на полубесконечном интервале // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2004. — Т. 7, № 2. — С. 103–114.

Рассматривается краевая задача для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старших производных на полубесконечном интервале. Рассматриваются системы уравнений типа реакция–диффузия и конвекция–диффузия. Исследуется метод редукции задачи к конечному интервалу на основе выделения многообразия решений, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Вспомогательные сингулярные задачи Коши для дифференциальных матричных уравнений Риккати решаются на основе разложений решения по степеням малого параметра и независимой переменной. Оценивается точность предложенного подхода. Редуцированная к конечному интервалу задача решается с применением сетки Шишкина. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: *система дифференциальных уравнений, перенос краевого условия из бесконечности, разностная схема, матричное дифференциальное уравнение Риккати, асимптотические разложения, устойчивость краевой задачи.*

Zadorin A.I., Harina O.V. Numerical method for a system of linear equations of second order with a small parameter on a semi-infinite interval // Siberian J. of Numer. Mathematics / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2004. — Vol. 7, № 2. — P. 103–114.

A boundary value problem for a linear system of ordinary second order differential equations with a small parameter at higher derivatives on a semi-infinite interval is considered. Systems of reaction-diffusion and convection-diffusion equations are considered. The method of reduction of a problem to a finite interval problem, based on the extraction of a set of solutions satisfying the limit conditions on infinity, is investigated. Auxiliary singular Cauchy problems for the differential matrix Riccati equations are solved with the use of a series in powers of a small parameter and an independent variable. Accuracy of the method proposed is estimated. The Shishkin mesh is proposed for solving a problem after its reduction to a finite interval. The results of numerical experiments are presented.

Key words: *system of differential equations, transfer of the boundary condition from infinity, difference scheme, matrix differential Riccati equation, asymptotic series, stability of a boundary value problem.*

Рассматриваются вопросы численного решения краевой задачи для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-01166).

при старших производных на полубесконечном интервале. Исходная задача сводится к краевой задаче для конечного интервала с помощью подхода, основанного на выделении всего многообразия решений, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности [1, 2]. Это многообразие задается в виде линейной системы уравнений первого порядка и при фиксированном значении аргумента может рассматриваться в качестве граничного условия для задачи на конечном интервале. Коэффициенты этой системы определяются как решения задач Коши для дифференциального матричного уравнения Риккати и для линейной системы уравнений с предельным условием на бесконечности. Решить эти задачи предлагается на основе разложения решения в ряд по степеням малого параметра или x^{-1}. Для оценки точности разложений исследуется устойчивость решения задачи Коши для уравнения Риккати к возмущению матриц-коэффициентов. В том случае, когда редуцированная к конечному интервалу задача является сингулярно возмущенной, для ее решения предлагается использовать неравномерную сетку [3]. Данная работа является продолжением [4], где рассмотрена система уравнений без конвективных членов.

Введем некоторые обозначения. Используется евклидова норма для векторов и спектральная норма для матриц. Под C и C_i понимаются положительные константы, не зависящие от параметра ε и шагов разностной сетки. Предполагается, что матрица является неотрицательной, если ее собственные значения не лежат в левой полуплоскости.

1. Система уравнений типа диффузия–реакция

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^2 \boldsymbol{u}''(x) - C(x)\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{f}(x), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{A}, \quad \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{u}(x) = 0, \tag{1.1}$$

где $\varepsilon > 0$, матрица $C(x)$ и вектор-функция $\boldsymbol{f}(x)$ достаточно гладкие, $C(x)$ является положительно-определенной матрицей порядка n:

$$C(x) \geq \alpha I, \quad \alpha > 0, \quad \lim_{x\to\infty} C(x) = C_\infty, \quad \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{f}(x) = 0. \tag{1.2}$$

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{u}(x)$ является решением задачи* (1.1). *Тогда*

$$\|\boldsymbol{u}(x)\| \leq \sqrt{\max_x \frac{1}{\alpha^2} \|\boldsymbol{f}(x)\|^2 + \|\boldsymbol{A}\|^2}, \quad x \geq 0.$$

Доказательство. Умножая уравнение (1.1) на $\boldsymbol{u}(x)$ и используя представление

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})'' = 2(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}') + 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}''),$$

получим

$$\frac{\varepsilon^2}{2}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})'' - \alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = ((C(x) - \alpha I)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}') + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}).$$

Учитывая (1.2) и неравенство $2|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u})| \leq \sigma\|\boldsymbol{u}\|^2 + \sigma^{-1}\|\boldsymbol{f}\|^2$ для $\sigma > 0$, при $\sigma = \alpha$ получим

$$\varepsilon^2(\boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{u}(x))'' - \alpha(\boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{u}(x)) \geq -\frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{f}(x)\|^2.$$

Полагая $v(x) = \|\boldsymbol{u}(x)\|^2$, будем иметь

$$L_1 v(x) = \varepsilon^2 v''(x) - \alpha v(x) \geq -\frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{f}(x)\|^2, \quad v(0) = \|\boldsymbol{A}\|^2, \quad \lim_{x\to\infty} v(x) = 0.$$

Определим функцию

$$\psi(x) = \max_x \frac{1}{\alpha^2}\|\boldsymbol{f}(x)\|^2 + \|\boldsymbol{A}\|^2 - v(x),$$

тогда

$$\psi(0) \geq 0, \quad L_1\psi(x) \leq 0 \text{ при } x > 0, \quad \lim_{x\to\infty} \psi(x) \geq 0.$$

Из принципа максимума следует $\psi(x) \geq 0$ при $x > 0$. □

При численном решении задачи (1.1) необходимо редуцировать ее к задаче для конечного интервала. Для этого выделим многообразие решений уравнения (1.1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности, которое используется в дальнейшем в качестве недостающего граничного условия в конечной точке. Это многообразие зададим как множество решений системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varepsilon\boldsymbol{u}'(x) + G(x)\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{\beta}(x), \tag{1.3}$$

где матрица $G(x)$ – решение сингулярной задачи Коши для матричного уравнения Риккати

$$\varepsilon G'(x) - G^2(x) + C(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} G(x) = C_\infty^{1/2}, \tag{1.4}$$

вектор-функция $\boldsymbol{\beta}(x)$ – решение сингулярной задачи Коши

$$\varepsilon\boldsymbol{\beta}'(x) - G(x)\boldsymbol{\beta}(x) = \boldsymbol{f}(x), \quad \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{\beta}(x) = 0. \tag{1.5}$$

Лемма 2. *Пусть матрица $G(x)$ является решением задачи* (1.4). *Тогда $G(x) \geq \sqrt{\alpha} I$.*

Доказательство. В соответствии с [5] из неравенства $C_\infty \geq \alpha\, I$ следует, что $C_\infty^{1/2} \geq \sqrt{\alpha}\, I$. Воспользуемся тем, что $\sqrt{\alpha}\, I$ является решением задачи

$$\varepsilon U'(x) = U^2(x) - \alpha I, \quad \lim_{x\to\infty} U(x) = \sqrt{\alpha} I.$$

При этом выполняется неравенство

$$H_1 = \begin{pmatrix} C(x) & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \geq H_2 = \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

В соответствии с [6] $G(x) \geq \sqrt{\alpha} I$ для $x \geq 0$. □

Лемма 3. *Пусть $U(x)$ является решением следующей матричной задачи:*

$$L_2 U = \varepsilon U'(x) - Q(x)U(x) - U(x)S(x) = F(x), \quad U(r) = U_0,$$

$U(x)$ – симметричная матрица, $Q(x) \geq \beta I$, $S(x) \geq \omega I$. Тогда для $x \leq r$

$$\|U(x)\| \leq \|U_0\| + \frac{1}{\beta + \omega} \max_x \|F(x)\|.$$

Доказательство. Полагая

$$\psi(x) = \|U_0\| I + \frac{\max_x \|F(x)\|}{\beta + \omega} I \pm U(x),$$

получим

$$\psi(r) \geq 0, \qquad L_2\psi(x) \leq -\frac{\max_x \|F(x)\|}{\beta + \omega}\Big(Q + S\Big) \pm F(x) \leq 0, \quad x < r.$$

Используя принцип максимума [7], получим $\psi(x) \geq 0$. □

Лемма 4. *Пусть* $C(x)$ *и* $\tilde{C}(x)$ *– симметричные матрицы,* $\tilde{G}(x)$ *– решение задачи* (1.4) *в случае матрицы* $\tilde{C}(x)$:

$$\tilde{C}(x) \geq \tilde{\alpha} I, \quad \|C(x) - \tilde{C}(x)\| \leq \Delta, \quad \left\|C_\infty^{1/2} - \tilde{C}_\infty^{1/2}\right\| \leq \delta.$$

Тогда для $x \geq 0$

$$\|G(x) - \tilde{G}(x)\| \leq \delta + \frac{\Delta}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}}}.$$

Доказательство. Полагая $K(x) = G(x) - \tilde{G}(x)$, получим

$$L_3 K = \varepsilon K'(x) - G(x)K(x) - K(x)\tilde{G}(x) = \tilde{C}(x) - C(x), \quad \lim_{x\to\infty} K(x) = C_\infty^{1/2} - \tilde{C}_\infty^{1/2}.$$

Матрица $K(x)$, как разность двух симметричных матриц, симметрична. Из леммы 3 следует

$$\|K(x)\| \leq \delta + \frac{\Delta}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}}}. \qquad \square$$

Таким образом, в случае симметричной матрицы $C(x)$ задача (1.4) имеет единственное решение, которое устойчиво к возмущению этой матрицы.

Для решения задачи (1.5), используя принцип максимума, нетрудно получить оценку

$$\|\beta(x)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|\boldsymbol{f}(x)\|.$$

Редуцируем задачу (1.1) к задаче на конечном интервале на основе выделенного многообразия

$$\varepsilon^2 \boldsymbol{u}''(x) - C(x)\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{f}(x), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{A}, \quad \varepsilon \boldsymbol{u}'(L) + G(L)\boldsymbol{u}(L) = \boldsymbol{\beta}(L). \tag{1.6}$$

В [4] доказано, что решения задач (1.1) и (1.6) совпадают на интервале $[0, L]$. Ниже аналогичный анализ будет проведен для задачи (2.13).

Матрица $G(x)$ и вектор-функция $\boldsymbol{\beta}(x)$ из сингулярных задач Коши (1.4) и (1.5) могут быть найдены в виде асимптотических рядов по параметру ε:

$$G^m(x) = \sum_{k=0}^{m} G_k(x)\varepsilon^k, \qquad \boldsymbol{\beta}^m(x) = \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{\beta}_k(x)\varepsilon^k.$$

Коэффициенты G_k и $\boldsymbol{\beta}_k$ находятся рекуррентно:

$$G_0(x)G_k(x) + G_k(x)G_0(x) = (G_{k-1}(x))' - \sum_{i=1}^{k-1} G_i(x)G_{k-i}(x), \quad G_0(x) = C^{1/2}(x); \tag{1.7а}$$

$$G(x)\boldsymbol{\beta}_k(x) = (\boldsymbol{\beta}_{k-1}(x))', \quad G(x)\boldsymbol{\beta}_0(x) = -\boldsymbol{f}(x). \tag{1.7б}$$

Покажем, что найденное приближенное решение $G^m(x)$ удовлетворяет предельному условию на бесконечности (1.4). Из (1.7а) следует, что

$$G_0(\infty) = C_\infty^{1/2}, \quad G_0(\infty)G_k(\infty) + G_k(\infty)G_0(\infty) = -\sum_{i=1}^{k-1} G_i(\infty)G_{k-i}(\infty).$$

Из этого уравнения следует, что $G_k(\infty) = 0$, $k = 1, \dots, m$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} G^m(x) = \lim_{x\to\infty} G(x) = C_\infty^{1/2}.$$

Так как матрица $G^m(x)$ строится на основе асимптотических разложений решения уравнения (1.4), то она является решением уравнения $\varepsilon\tilde{G}'(x) - \tilde{G}^2(x) + \tilde{C}(x) = 0$, где $\|C(x) - \tilde{C}(x)\| \le C_0\varepsilon^{m+1}$. Пусть матрица $C(x)$ симметрична. Покажем, что матрица $\tilde{C}(x)$ тоже симметрична. Сначала покажем, что приближенное решение $G^m(x)$ является симметричной матрицей. На каждом шаге по k решается уравнение Сильвестра (1.7a). Правая часть этого уравнения является симметричной матрицей. Основано это на том, что матрица $C(x)$ симметрична, а для двух симметричных матриц A и B матрица $P = AB + BA$ тоже является симметричной. Уравнение Сильвестра (1.7a) имеет единственное решение и, переходя от этого уравнения к сопряженному, получаем, что $(G_k)^T = G_k$ как решения одного уравнения. Из матричного уравнения Риккати, которому удовлетворяет $G^m(x)$, следует, что матрица $\tilde{C}(x)$ является симметричной.

Итак, если матрица $C(x)$ симметрична, то в соответствии с леммой 4

$$\|G(x) - G^m(x)\| \le C\varepsilon^{m+1}.$$

Отметим, что для формирования задачи (1.6) коэффициенты G и β достаточно вычислить при $x = L$. Для нахождения $C^{1/2}(L)$ используем итерационный метод вычисления корня из положительно-определенной матрицы [8]. Полагаем $C^{1/2}(L) = D + B$, где элементами диагональной матрицы D являются квадратные корни из диагональных элементов матрицы $C(L)$. Для вычисления матрицы B используем итерационную формулу

$$DB_k + B_kD = A - D^2 - B_{k-1}^2, \quad A = C(L),$$

которую можно записать в виде

$$(B_k)_{ij} = \frac{1}{D_i + D_j}\Big((A - D^2)_{ij} - (B_{k-1}^2)_{ij}\Big), \quad i,j = 1,\dots,n. \tag{1.8}$$

В результате извлечения квадратного корня из симметричной положительно-определенной матрицы $C(L)$ получим симметричную положительно-определенную матрицу $G_0(L)$.

Уравнение на $G_k(x)$ вида $AX + XB = H$ является непрерывным уравнением Сильвестра, которое однозначно разрешимо для любой правой части, если $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \ne 0$ для любых i, j. В данном случае $A = B = G_0(x)$. Так как $G_0(x)$ – положительно-определенная матрица, суммы ее собственных значений попарно не равны нулю. При выполнении этого условия и симметричной правой части H решение уравнения Сильвестра будет единственным и симметричным.

Для решения таких уравнений существуют ортогональные методы, например, алгоритмы Бартелса–Стьюарта и Голуба–Нэша–ван-Лоана [9].

Рассмотрим алгоритм Бартелса–Стьюарта для уравнения (1.7a) при $x = L$ в случае симметричной матрицы $C(x)$:

1) Матрица $G_0(L)$ приводится к верхней форме Шура $\tilde{G}_0(L)$, которая будет диагональной матрицей в силу симметричности $G_0(L)$. Это приведение можно сделать с помощью программы, приведенной в [9], или пакета Maple. В результате будет найдена трансформирующая ортогональная матрица Q такая, что $\tilde{G}_0(L) = Q^TG_0(L)Q$.
2) Преобразование правой части: $\tilde{H}(L) = Q^TH(L)Q$.
3) Нахождение $Y(L)$ из преобразованного матричного уравнения
$$\tilde{G}_0(L)Y(L) + Y(L)\tilde{G}_0(L) = \tilde{H}(L).$$
4) Нахождение $G_k(L) = QY(L)Q^T$.

Для нахождения приближенного решения уравнения (1.5), как говорилось выше, можно использовать разложения по параметру ε, учитывая рекуррентные формулы (1.7б). Применяя принцип максимума, можно показать, что

$$\|\beta - \boldsymbol{\beta}^m\| \le C\varepsilon^{m+1}.$$

Так как матрица $G(x)$ и вектор-функция $\boldsymbol{\beta}(x)$ могут быть найдены только приближенно, требуется исследовать задачу (1.6) на устойчивость к возмущению этих коэффициентов.

Теорема 1. *Пусть $\tilde{\boldsymbol{u}}(x)$ – решение задачи (1.6) в случае, когда $G(L)$, $\beta(L)$ заменены на $\tilde{G}(L)$, $\tilde{\beta}(L)$. Предположим, что $\|G(L) - \tilde{G}(L)\| \le \Delta$, $\|\boldsymbol{\beta}(L) - \tilde{\beta}(L)\| \le \Delta$. Тогда для* $0 \le x \le L$

$$\|\boldsymbol{u}(x) - \tilde{\boldsymbol{u}}(x)\| \le C\Delta.$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{u}(x) - \tilde{\boldsymbol{u}}(x)$, тогда $\boldsymbol{z}(x)$ является решением задачи

$$\varepsilon^2 \boldsymbol{z}''(x) - C(x)\boldsymbol{z}(x) = 0,$$

$$\boldsymbol{z}(0) = 0, \quad \varepsilon \boldsymbol{z}'(L) + \tilde{G}(L)\boldsymbol{z}(L) = (\tilde{G}(L) - G(L))\boldsymbol{u}(L) + \boldsymbol{\beta}(L) - \tilde{\beta}(L).$$

Умножая уравнения этой задачи скалярно на $\boldsymbol{z}$ и полагая $v(x) = \|\boldsymbol{z}(x)\|^2$, получим

$$L_4 v = \varepsilon^2 v''(x) - 2\alpha v(x) \ge 0, \quad v(0) = 0, \qquad L_5 v = \varepsilon v'(L) + \sqrt{\tilde{\alpha}} v(L) \le \frac{2\Delta^2}{\sqrt{\tilde{\alpha}}}\Big(1 + \|\boldsymbol{u}(L)\|^2\Big).$$

Определим функцию

$$\psi(x) = \frac{2\Delta^2}{\tilde{\alpha}}\Big(1 + \|\boldsymbol{u}(L)\|^2\Big) - v(x).$$

Тогда $\psi(0) \ge 0$, $L_4\psi \le 0$, $L_5\psi \ge 0$. Из этих соотношений следует, что $\psi(x) \ge 0$. □

2. Система уравнений типа диффузия–конвекция

Рассмотрим систему уравнений в векторном виде

$$T_\varepsilon \boldsymbol{u}(x) = \varepsilon \boldsymbol{u}''(x) - a(x)\boldsymbol{u}'(x) - C(x)\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{f}(x), \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{A}, \quad \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{0}. \tag{2.2}$$

Предполагаем, что $C(x)$ – матрица порядка n,

$$\begin{gathered} C_\infty = \lim_{x\to\infty} C(x), \quad \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{0}, \quad \lim_{x\to\infty} a(x) = a_\infty, \\ D \ge a(x) \ge \alpha > 0, \quad C(x) \ge \beta I, \quad \beta > 0, \quad \varepsilon > 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Функция $a(x)$, вектор-функция $\boldsymbol{f}(x)$ и матрица $C(x)$ предполагаются достаточно гладкими.

Получим оценку устойчивости для решения задачи (2.1), (2.2).

Лемма 5. *Справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{u}(x)\| \le \sqrt{\|\boldsymbol{A}\|^2 + \frac{1}{\beta^2}\max_x \|\boldsymbol{f}(x)\|^2}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Доказательство леммы проводится по аналогии с леммой 1. Пусть $w(x) = \|\boldsymbol{u}(x)\|^2$. Умножим уравнение (2.1) скалярно на $\boldsymbol{u}(x)$ и получим

$$\frac{\varepsilon}{2}w''(x) - \frac{a(x)}{2}w'(x) - \beta w(x) = (C(x)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - \beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \varepsilon(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}') + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}).$$

Из этого уравнения получим

$$L_6 w(x) = \varepsilon w''(x) - a(x)w'(x) - \beta w(x) \geq -\frac{1}{\beta}\|\boldsymbol{f}\|^2. \tag{2.5}$$

Определим

$$\Psi(x) = \frac{1}{\beta^2}\max_x \|\boldsymbol{f}(x)\|^2 + \|\boldsymbol{A}\|^2 - w(x).$$

Используя оценку (2.5), получим

$$L_6\Psi(x) \leq 0, \quad x > 0, \quad \Psi(0) \geq 0, \quad \lim_{x\to\infty}\Psi(x) \geq 0.$$

Использование принципа максимума дает $\Psi(x) \geq 0$ при $x \geq 0$. □

Сведем задачу (2.1), (2.2) к задаче для конечного интервала. Определим многообразие решений уравнения (2.1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности как множество решений уравнения первого порядка

$$\boldsymbol{u}'(x) + G(x)\boldsymbol{u}(x) = \theta(x), \tag{2.6}$$

где $G(x)$ – решение сингулярной задачи Коши для матричного уравнения Риккати

$$\varepsilon G' - \varepsilon G^2 - a(x)G + C(x) = 0, \quad G(x) \to G_\infty, \quad x \to \infty, \tag{2.7}$$

$\theta(x)$ – решение линейной задачи

$$\varepsilon\theta' - [a(x)I + \varepsilon G(x)]\theta = \boldsymbol{f}(x), \quad \theta(x) \to \boldsymbol{0}, \quad x \to \infty. \tag{2.8}$$

В (2.7) G_∞ – решение квадратного матричного уравнения

$$\varepsilon G^2 + a_\infty G - C_\infty = 0, \quad G_\infty = 2C_\infty\Big[a_\infty I + (a_\infty^2 I + 4C_\infty\varepsilon)^{1/2}\Big]^{-1}. \tag{2.9}$$

Покажем, что (2.6) действительно выделяет множество решений уравнения (2.1), стремящихся к нулю на бесконечности. Учитывая уравнения (2.7) и (2.8), можно заключить, что уравнение (2.1) превращается в тождество на решениях уравнения (2.6). Предельное нулевое условие на бесконечности для решений уравнения (2.6) выполнено в силу того, что спектр матрицы G_∞ находится в правой полуплоскости. Остановимся на свойствах решений задачи (2.7).

Лемма 6. *Пусть матрица $C(x)$ симметрична, $G(x)$ – решение задачи (2.7). Тогда при всех $x \geq 0$*

$$G(x) \geq \delta I, \qquad \delta = \frac{2\beta}{D + \sqrt{D^2 + 4\beta\varepsilon}}.$$

Доказательство. В силу симметричности $C(x)$ матрица $G(x)$, как решение задачи (2.7), симметрична. Пусть $G_{\min} = \delta I$, $Z = G - G_{\min}$. Из (2.7) следует, что матрица $Z(x)$ является решением задачи

$$\varepsilon Z' - (a(x)I + \varepsilon G)Z - \varepsilon Z G_{\min} = \beta I - C(x) + (a(x) - D)G_{\min} \le 0, \quad \lim_{x\to\infty} Z(x) \ge 0.$$

Учитывая симметричность $Z(x)$, используя теорему сравнения из [7], получим $Z(x) \ge 0$ при $x \ge 0$. □

Исследуем устойчивость решения задачи (2.7) к возмущению матрицы $C(x)$.

Лемма 7. *Пусть $\tilde{G}(x)$ – решение задачи (2.7) с возмущенной матрицей $\tilde{C}(x)$:*

$$\varepsilon\tilde{G}' - \varepsilon\tilde{G}^2 - a(x)\tilde{G} + \tilde{C}(x) = 0, \quad \tilde{G}(x) \to \tilde{G}_\infty, \quad x \to \infty, \tag{2.10}$$

где $\tilde{G}_\infty$ определено по аналогии с (2.9). Пусть матрицы $C(x)$, $\tilde{C}(x)$ симметричны, матрицы C_∞, $\tilde{C}_\infty$ перестановочны. Тогда

$$\max_x \|G(x) - \tilde{G}(x)\| \le \alpha^{-1} \max_x \|C(x) - \tilde{C}(x)\|.$$

Доказательство. Пусть $Z = G - \tilde{G}$. Тогда $Z(x)$ является решением задачи

$$L_7 Z = \varepsilon Z' - [\varepsilon G(x) + a(x)\, I]Z - \varepsilon Z\tilde{G}(x) = \tilde{C}(x) - C(x), \tag{2.11а}$$

$$Z(x) \to Z_\infty \text{ при } x \to \infty, \tag{2.11б}$$

$$Z_\infty = 2(C_\infty - \tilde{C}_\infty)\Big[(a_\infty^2 I + 4\varepsilon C_\infty)^{1/2} + (a_\infty^2 I + 4\varepsilon\tilde{C}_\infty)^{1/2}\Big]^{-1}. \tag{2.11в}$$

В соответствии с [7] для оператора L_7 матричного уравнения (2.11а) справедлив принцип максимума, в соответствии с которым в случае симметричной матрицы $Z(x)$ из условий:

$$L_7 Z(x) \le 0, \quad x < \infty, \quad \lim_{x\to\infty} Z(x) \ge 0 \tag{2.12}$$

следует $Z(x) \ge 0$, $x < \infty$. Определим матрицу

$$\Psi(x) = \alpha^{-1} \max_x \|C(x) - \tilde{C}(x)\|\; I \pm Z(x).$$

Нетрудно убедиться, что для матрицы $\Psi(x)$ выполнены условия (2.12). В силу принципа максимума $\Psi(x) \ge 0$ при $x < \infty$. □

Используя соотношение (2.6), сведем задачу (2.1), (2.2) к задаче для конечного интервала $[0, L]$:

$$\varepsilon\boldsymbol{u}'' - a(x)\boldsymbol{u}' - C(x)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(x), \qquad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{u}'(L) + G(L)\boldsymbol{u}(L) = \theta(L). \tag{2.13}$$

Покажем, что посредством (2.13) задача (2.1), (2.2) преобразуется к конечному интервалу точным образом. Для этого рассмотрим задачу Коши относительно выделенного многообразия

$$\boldsymbol{u}'(x) + G(x)\boldsymbol{u}(x) = \theta(x), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{A}. \tag{2.14}$$

Несложно заключить, что решение задачи (2.14) удовлетворяет задачам (2.1), (2.2) и (2.13). В силу единственности решения задач (2.1), (2.2) и (2.13) совпадают при $x \in [0, L]$.

Коэффициенты $G(L)$, $\theta(L)$ в краевом условии (2.13) из сингулярных задач Коши (2.7) и (2.8) могут быть найдены только приближенно. В связи с этим необходимо оценить устойчивость решения задачи (2.13) к возмущению этих коэффициентов.

Теорема 2. *Пусть $\tilde{\boldsymbol{u}}(x)$ – решение задачи (2.13) с коэффициентами $\tilde{G}(L)$, $\tilde{\theta}(L)$. Пусть*

$$\|\theta(L) - \tilde{\theta}(L)\| \le \Delta, \quad \|G - \tilde{G}\| \le \Delta, \quad \tilde{G} \ge \tilde{\delta} I, \quad \tilde{\delta} > 0.$$

Тогда для некоторой постоянной C

$$\|\boldsymbol{u}(x) - \tilde{\boldsymbol{u}}(x)\| \le C\Delta\sqrt{\varepsilon}\exp(\alpha\varepsilon^{-1}(x-L)/2). \tag{2.15}$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{Z}(x) = \boldsymbol{u}(x) - \tilde{\boldsymbol{u}}(x)$. Тогда

$$T_\varepsilon \boldsymbol{Z}(x) = 0, \quad \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{Z}'(L) + \tilde{G}\boldsymbol{Z}(L) = \theta(L) - \tilde{\theta}(L) + (\tilde{G} - G)\boldsymbol{u}(L). \tag{2.16}$$

Умножим (2.16) на $\boldsymbol{Z}(x)$, введем $w(x) = \|\boldsymbol{Z}(x)\|^2$ и получим

$$w(0) = 0, \quad L_8 w = \varepsilon w'' - a w' - \beta w \ge 0, \quad R w = w'(L) + \tilde{\delta} w(L) \le C_0 \Delta^2.$$

Пусть

$$\Psi(x) = C\varepsilon\Delta^2 \exp(\alpha\varepsilon^{-1}(x-L)) - w(x).$$

Для некоторой постоянной C

$$L_8\Psi(x) \le 0, \quad 0 < x < L, \quad \Psi(0) \ge 0, \quad R\Psi(x) \ge 0.$$

Из принципа максимума следует, что $\Psi(x) \ge 0$. □

Решение уравнения Риккати (2.7) может быть найдено на основе разложения

$$G^m(x) = \sum_{k=0}^{m} G_k \varepsilon^k. \tag{2.17}$$

Подставляя это разложение в (2.7), получим рекуррентную формулу

$$G_{k+1} = \frac{1}{a(x)}\left[G_k' - \sum_{i=0}^{k} G_i G_{k-i}\right], \quad G_0 = \frac{1}{a(x)} C(x).$$

По аналогии со случаем приближенного решения задачи (1.4) можно показать, что выполнены условия леммы 7, и поэтому

$$\|G(x) - G^m(x)\| \le C\varepsilon^{m+1}. \tag{2.18}$$

Заметим, что на каждом шаге по k G_{k+1} находится в явном виде и, в отличие от случая уравнения типа диффузия–реакция, не приходится решать уравнение Сильвестра. Оценка точности (2.18) зависит от значения параметра ε.

Покажем, как можно осуществить разложение решения задачи (2.7) в ряд, чтобы получить оценку точности, равномерную по ε. Предполагаем, что при $x \ge L$ для некоторого m справедливы разложения

$$a(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{x^k} + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right), \quad C(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{C_k}{x^k} + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right). \tag{2.19}$$

Пусть

$$G^m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{G_k}{x^k}. \tag{2.20}$$

Учитывая разложения (2.19) и (2.20) в (2.7), получим на каждом шаге по k уравнение Сильвестра относительно G_k:

$$\varepsilon G_k G_0 + (\varepsilon G_0 + a_0 I)G_k = -(k-1)\varepsilon G_{k-1} - \varepsilon \sum_{i=1}^{k-1} G_i G_{k-i} - \sum_{i=1}^{k} a_i G_{k-i}, \quad G_0 = G_\infty, \tag{2.21}$$

где G_∞ определено в (2.9). Так как матрица $G^m(x)$ построена на основе разложений (2.19) и (2.20), то $G^m(x)$ является решением задачи (2.7) с возмущенной матрицей $C(x)$:

$$\varepsilon \tilde{G}' - \varepsilon \tilde{G}^2 - a(x)\tilde{G} + \tilde{C}(x) = 0, \qquad \tilde{G}(x) \to G_\infty,\ x \to \infty, \tag{2.22}$$

где $\|C(x) - \tilde{C}(x)\| \le Cx^{-(m+1)}$.

Пусть матрица $C(x)$ симметрична. Покажем, что тогда выполнены условия леммы 7. В силу симметричности $C(x)$ и уравнения (2.7) матрица $G(x)$ симметрична. Из рекуррентной формулы (2.21) следует, что все матрицы $G_k(x)$ симметричны, поэтому симметрична матрица $\tilde{G}(x) = G^m(x)$. Из уравнения (2.22) следует, что матрица $\tilde{C}(x)$ симметрична. Учитывая условие $\tilde{G}(x) \to G_\infty$, можно показать, что $C_\infty = \tilde{C}_\infty$. Итак, условия леммы 7 выполнены. Пусть $x \ge L$. Тогда в силу леммы 7 при $x \ge L$

$$\|G(x) - \tilde{G}(x)\| \le CL^{-(m+1)}. \tag{2.23}$$

По аналогии с вышеизложенным функция $\theta(x)$ из (2.8) может быть найдена на основе разложения в ряд по параметру ε или x^{-1}. □

3. Численные эксперименты

Остановимся на результатах численных экспериментов, проведенных для задачи (1.1). Задача (1.1) точным образом сведена к задаче на конечном интервале (1.6). Решение задачи (1.6) имеет пограничный слой у границы $x = 0$. Для численного решения такой задачи используем схему центральных разностей на неравномерной сетке Шишкина [3], которая имеет порядок точности $O(N^{-2}\ln^2 N)$. Итак, определим неравномерную сетку Ω:

$$\Omega = \left\{x_i:\ x_i = \frac{2qi}{N},\ 0 \le i \le \frac{N}{2}, \quad x_i = q + \frac{2(1-q)}{N}\left(i - \frac{N}{2}\right),\ \frac{N}{2} < i \le N\right\},$$

где $q = \min\{1/2, a_0\varepsilon \ln N\}$. Выпишем разностную схему для задачи (1.6):

$$\begin{gathered} 2\varepsilon^2 \frac{h_i(\boldsymbol{u}_{i+1}^h - \boldsymbol{u}_i^h) - h_{i+1}(\boldsymbol{u}_i^h - \boldsymbol{u}_{i-1}^h)}{h_i h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} - C_i \boldsymbol{u}_i^h = \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \boldsymbol{u}_0^h = \boldsymbol{A}, \quad \varepsilon \frac{\boldsymbol{u}_N^h - \boldsymbol{u}_{N-1}^h}{h_N} + G(L)\boldsymbol{u}_N^h = \beta(L), \quad C_i = C(x_i), \quad \boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}(x_i). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Задачу (3.1) решим методом скалярной прогонки с использованием итераций:

$$\begin{gathered} 2\varepsilon^2 \frac{h_i(\boldsymbol{u}_{i+1}^k - \boldsymbol{u}_i^k) - h_{i+1}(\boldsymbol{u}_i^k - \boldsymbol{u}_{i-1}^k)}{h_i h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} - D_i \boldsymbol{u}_i^k = \boldsymbol{f}_i + (C_i - D_i)\boldsymbol{u}_i^{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \boldsymbol{u}_0^k = \boldsymbol{A}, \quad \varepsilon \frac{\boldsymbol{u}_N^k - \boldsymbol{u}_{N-1}^k}{h_N} + D_L \boldsymbol{u}_N^k = \beta(L) - (G(L) - D_L)\boldsymbol{u}_N^{k-1}, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где D_i – диагональная матрица, диагональ соответствует диагонали матрицы C_i, аналогично D_L – диагональная матрица с диагональными элементами матрицы $G(L)$.

Используя принцип максимума, можно показать, что если матрицы C_i и $G(L)$ – со строгим диагональным преобладанием

$$C_i^{jj}R \geq \sum_{m\neq j} |C_i^{jm}|, \quad G^{jj}(L)R \geq \sum_{m\neq j} |G^{jm}(L)| \quad \forall i,j, \quad R<1,$$

то итерационный метод сходится и

$$\max_i \|\boldsymbol{u}_i^{k+1}-\boldsymbol{u}_i^h\|_\infty \leq R\max_i \|\boldsymbol{u}_i^k-\boldsymbol{u}_i^h\|_\infty.$$

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^2\boldsymbol{u}''(x)-C(x)\boldsymbol{u}(x)=\boldsymbol{f}(x), \quad \boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{A}, \quad \lim_{x\to\infty}\boldsymbol{u}(x)=0, \tag{3.3}$$

где матрица $C(x)$ симметрична:

$$C(x)=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}e^{-x}\\e^{-2x}\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\0.5\end{pmatrix}.$$

При построении сетки принималось $a_0=1.4$. В краевом условии разностной схемы (3.1) $G(L)=\sqrt{C(L)}$, $\beta(L)\approx -G^{-1}(L)f(L)$, что соответствует (1.7) при $m=0$. Итерации (3.2) заканчивались, если $\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1}\|\leq 10^{-8}$.

В табл. 1 приведена норма погрешности $\delta=\|\boldsymbol{u}^h-[\boldsymbol{u}]_\Omega\|_\infty$ схемы (3.1) при $L=1$. Приведенная в табл. 1 норма погрешности δ зависит от приближенного задания $\beta(L)$ и от погрешности разностной схемы. Из табл. 1 следует, что при малых значениях параметра ε, когда погрешность переноса предельного краевого условия из бесконечности мала, $\delta\leq CN^{-2}\ln^2(N)$, что соответствует [3].

Сравнивались предложенный способ переноса предельного краевого условия из бесконечности на границу интервала $[0,L]$, $L=1$, с переносом на основе условий Дирихле $\boldsymbol{u}(L)=\boldsymbol{0}$ и Неймана $\boldsymbol{u}'(L)=\boldsymbol{0}$. Вычисления показали, что в случае условия $\boldsymbol{u}(L)=\boldsymbol{0}$ при всех испытываемых ε и N $\delta\approx 0.19$. В табл. 2 приведена норма погрешности δ при переносе краевого условия из бесконечности на основе условия $\boldsymbol{u}'(L)=\boldsymbol{0}$. Результаты вычислений подтверждают преимущество в точности предложенного подхода.

Таблица 1

ε \ N	10	20	40	80	160	320
10^{-1}	$0.19\cdot10^{-1}$	$0.87\cdot10^{-2}$	$0.64\cdot10^{-2}$	$0.61\cdot10^{-2}$	$0.60\cdot10^{-2}$	$0.59\cdot10^{-2}$
10^{-2}	$0.19\cdot10^{-1}$	$0.86\cdot10^{-2}$	$0.35\cdot10^{-2}$	$0.12\cdot10^{-2}$	$0.82\cdot10^{-3}$	$0.72\cdot10^{-3}$
10^{-3}	$0.19\cdot10^{-1}$	$0.86\cdot10^{-2}$	$0.35\cdot10^{-2}$	$0.12\cdot10^{-2}$	$0.42\cdot10^{-3}$	$0.14\cdot10^{-3}$
10^{-4}	$0.19\cdot10^{-1}$	$0.86\cdot10^{-2}$	$0.35\cdot10^{-2}$	$0.12\cdot10^{-2}$	$0.42\cdot10^{-3}$	$0.14\cdot10^{-3}$
10^{-5}	$0.19\cdot10^{-1}$	$0.86\cdot10^{-2}$	$0.35\cdot10^{-2}$	$0.12\cdot10^{-2}$	$0.42\cdot10^{-3}$	$0.14\cdot10^{-3}$

Таблица 2

ε \ N	10	20	40	80	160	320
10^{-1}	$0.29\cdot10^{-1}$	$0.18\cdot10^{-1}$	$0.14\cdot10^{-1}$	$0.13\cdot10^{-1}$	$0.13\cdot10^{-1}$	$0.12\cdot10^{-1}$
10^{-2}	$0.34\cdot10^{-1}$	$0.17\cdot10^{-1}$	$0.82\cdot10^{-2}$	$0.43\cdot10^{-2}$	$0.25\cdot10^{-2}$	$0.18\cdot10^{-2}$
10^{-3}	$0.35\cdot10^{-1}$	$0.17\cdot10^{-1}$	$0.84\cdot10^{-2}$	$0.42\cdot10^{-2}$	$0.21\cdot10^{-2}$	$0.10\cdot10^{-2}$
10^{-4}	$0.35\cdot10^{-1}$	$0.17\cdot10^{-1}$	$0.85\cdot10^{-2}$	$0.42\cdot10^{-2}$	$0.21\cdot10^{-2}$	$0.10\cdot10^{-2}$
10^{-5}	$0.36\cdot10^{-1}$	$0.17\cdot10^{-1}$	$0.85\cdot10^{-2}$	$0.42\cdot10^{-2}$	$0.21\cdot10^{-2}$	$0.10\cdot10^{-2}$

Литература

[1] **Абрамов А.А.** О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. — 1961. — Т. 1, № 4. — С. 733–737.

[2] **Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б.** Перенос граничных условий из особых точек для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Сообщ. по вычисл. матем. — М.: ВЦ АН СССР, 1981.

[3] **Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.** Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. — Singapore: World Scientific, 1996.

[4] **Harina O.V., Zadorin A.I.** Numerical solution of a boundary value problem for a linear system of equations with a small parameter on a half-infinite interval // Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics. Part 2. — Novosibirsk, 2002. — P. 449–453.

[5] **Bellman R.** Some Inequalities for the Square Root of a Positive Definite Matrix // Linear Algebra and its Applications. — 1968. — Vol. 1, № 3. — P. 321–324.

[6] **Freiling G., Jank G., Abou-Kandil H.** Generalized Riccati Difference and Differential Equations // Linear Algebra and Its Applications. — 1996. — Vol. 241–243. — P. 291–303.

[7] **Royden H.L.** Comparison theorems for the matrix Riccati equation // Communs Pure and Appl. Math. — 1988. - Vol. 41. — P. 739–746.

[8] **Pulay P.** An Iterative Method for the Determination of the Square Root of a Positive Definite Matrix // Zamm. — 1966. — № 46. — P. 151–152.

[9] **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений. — М.: Наука, 1984.

[10] **Задорин А.И.** Редукция нелинейной краевой задачи для системы уравнений второго порядка с малым параметром с полубесконечного интервала к конечному // Сибирский матем. журн. — 2001. — Т. 42, № 5. — С. 1057–1066.

[11] **Абрамов А.А., Балла К.** О приближенных решениях, основанных на теоремах сравнения, скалярных и матричных уравнений Риккати на бесконечном интервале // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. — 1993. — Т. 33, № 1. — С. 35–51.

Омский филиал ИМ СО РАН,
ул. Певцова, 13,
Омск, 644099
E-mail: zadorin@iitam.omsk.net.ru

Статья поступила
10 декабря 2002 г.
Переработанный вариант
14 апреля 2003 г.