Математические
структуры и моделирование
2000. Вып. 5, с.11–17.

УДК 519.63

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ В ПОЛОСЕ

А.И. Задорин

Elliptic equation with a power boundary layer in a strip is considered. The difference scheme with the property of the uniform in a small parameter convergence is constructed. Then the scheme is reduced to the finite number of nodes.

При математическом моделировании стационарного распространения примеси в направлении ветра, согласно [1], возникает краевая задача для двумерного эллиптического уравнения в бесконечной полосе. Решение такой задачи содержит степенной пограничный слой. В данной работе для такой задачи строится равномерно сходящаяся схема. По одному из направлений схема содержит бесконечное число узлов. Предлагается способ редукции этой схемы к схеме с конечным числом узлов.

Итак, рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\varepsilon_2 + y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + w(y)\frac{\partial u}{\partial y} - c(x,y)u = f(x,y), \tag{1}$$

$$u(x,1) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} u(x,y) = 0, \quad u(x,0) - \varepsilon_2\beta_2\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \tag{2}$$

для бесконечной полосы: $D = \{-\infty < x < \infty,\ 0 < y < 1\}$. Предполагаем, что

$$\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0,\ a(x,y) \ge \alpha > 0,\ w(y) > \beta > 0,\ \beta_2 > 0,\ c(x,y) \ge \sigma > 0,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} a(x,y) = a_{\pm\infty}(y), \ \lim_{x\to\pm\infty} c(x,y) = c_{\pm\infty}(y), \ \lim_{x\to\pm\infty} f(x,y) = 0. \tag{3}$$

Для оценки производных по x потребуется дополнительное ограничение:

$$c(x,y) + 4a'_x \ge \sigma > 0. \tag{4}$$

E-mail: zadorin@iitam.omsk.net.ru
Омский филиал Института математики СО РАН

Всюду под C и C_i будем понимать положительные постоянные, не зависящие от параметров ε_1 и ε_2. Под нормой функции непрерывного аргумента или сеточной функции будем понимать максимальное по модулю значение, предполагаем, что норма матрицы согласована с векторной нормой.

Нетрудно убедиться, что справедлива оценка:

$$||u(x,y)|| \le \beta^{-1}||f(x,y)||.$$

Лемма 1. *Для некоторой постоянной C_0 справедливы оценки:*

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right| \le C_0, \quad k=1,2,3,4, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{C_0}{\varepsilon_2+y}. \tag{5}$$

В случае $\beta > 1$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le C_0 + C_0\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2+y}\right)^{\beta-1}\frac{1}{\varepsilon_2+y}. \tag{6}$$

■

Доказать данную лемму можно с помощью принципа максимума, по аналогии с тем, как в случае обыкновенного уравнения это делалось в [2], [3].

1. Построение разностной схемы

Остановимся на вопросе построения разностной схемы для задачи (1)-(2). Согласно лемме 1 производные по x равномерно ограничены, а по переменной y имеет место степенной пограничный слой около границы $y=0$. Для построения разностной схемы используем метод прямых по x. Будем предполагать сетку равномерной по обоим координатным направлениям, с шагами h_1 и h_2. При применении метода прямых от функции двух аргументов $u(x,y)$ перейдем к бесконечной системе дифференциальных уравнений с решением $u_i(y) = u(x_i,y), \ -\infty < i < +\infty, \ y \in [0,1]$.

Итак, перейдем от (1)-(2) к системе уравнений:

$$(\varepsilon_2+y)\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}(y) + w(y)\frac{\partial u_i}{\partial y}(y) = F(x_i,y,u),$$

$$u_i(0) - \varepsilon_2\beta_2\frac{\partial u_i}{\partial y}(0) = 0, \ \ u_i(1)=0, \ \ |i|<\infty, \ \ u_i(y)\to 0, \ |i|\to\infty, \tag{7}$$

где

$$F(x,y,u) = -\varepsilon_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,y)u + f(x,y), \ \ u(x,y)\to 0, \ x\to\pm\infty.$$

Пусть $\Delta_j = (y_{j-1}, y_j], \ \ j=1,2,...,N_2, \ y_0=0, \ y_{N_2}=1.$ Перейдем от (7) к системе уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$(\varepsilon_2+y)\frac{\partial^2 \tilde u_i}{\partial y^2}(y) + \tilde w(y)\frac{\partial \tilde u_i}{\partial y}(y) = \tilde F(x_i,y,\tilde u),$$

$$\tilde{u}_i(0) - \varepsilon_2\beta_2\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y}(0) = 0, \quad \tilde{u}_i(1) = 0, \;\; \tilde{u}_i(y) \to 0, \quad |i| \to \infty, \tag{8}$$

где при $y \in \Delta_j \quad \tilde{w}(y) = w(y_j), \;\; \tilde{u}_{i,j} = \tilde{u}(x_i, y_j)$.

$$\tilde{F}(x_i, y, \tilde{u}) = -\varepsilon_1\frac{\tilde{u}_{i+1,j} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i-1,j}}{h_1^2} + a(x_i, y_j)\frac{\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i-1,j}}{h_1} + c(x_i, y_j)\tilde{u}_{i,j} + f(x_i, y_j).$$

Для задачи (8), с кусочно-постоянными коэффициентами, построим точную разностную схему. Для этого для каждого i и каждого сеточного интервала Δ_j для уравнений (8) выпишем точное решение. Условие непрерывности производной по y на границе двух соседних интервалов Δ_j и Δ_{j+1} приведет к конечно-разностным соотношениям. Разностную аппроксимацию краевого условия получаем в результате подстановки решения задачи (8) на первом сеточном интервале в левое краевое условие. Построенная разностная схема имеет вид:

$$\frac{u^h_{i,j} - u^h_{i,j-1} - F_{i,j}w_j^{-1}h_2}{(1 + y_j\varepsilon^{-1})^{w_j}\left[(1 + y_j\varepsilon^{-1})^{1-w_j} - (1 + y_{j-1}\varepsilon^{-1})^{1-w_j}\right]} -$$

$$-\frac{u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j} - F_{i,j+1}w_{j+1}^{-1}h_2}{(1 + y_j\varepsilon^{-1})^{w_{j+1}}\left[(1 + y_{j+1}\varepsilon^{-1})^{1-w_j} - (1 + y_j\varepsilon^{-1})^{1-w_j}\right]} = \left(\frac{F_{i,j+1}}{w_{j+1}} - \frac{F_{i,j}}{w_j}\right)\varepsilon,$$

$$u^h_{i,0} - \varepsilon_2\beta_2\frac{F_{i,1}}{w_1} - \beta_2(1 - w_1)\frac{u^h_{i,1} - u^h_{i,0} - F_{i,1}w_1^{-1}h_2}{(1 + h_2\varepsilon_2^{-1})^{1-w_1} - 1} = 0, \quad u^h_{i,N_2} = 0,$$

$$j = 1, ..., N_2 - 1, \quad -\infty < i < +\infty, \quad u^h_{i,j} \to 0, \;\; i \to \pm\infty, \tag{9}$$

где

$$F_{i,j} = -\varepsilon_1\frac{u^h_{i+1,j} - 2u^h_{i,j} + u^h_{i-1,j}}{h_1^2} + a(x_i, y_j)\frac{u^h_{i,j} - u^h_{i-1,j}}{h_1} + c(x_i, y_j)u^h_{i,j} + f(x_i, y_j).$$

Теорема 1. *Для схемы (9) справедлива оценка точности:*

$$|u^h_{i,j} - u(x_i, y_j)| \le Ch_1 + C|\ln(\varepsilon_2 + y_j)|h_2, \quad -\infty < i < +\infty, \quad 0 \le j \le N_2. \tag{10}$$

В случае $\beta > 1$

$$|u^h_{i,j} - u(x_i, y_j)| \le C(h_1 + h_2), \quad -\infty < i < +\infty, \quad 0 \le j \le N_2. \tag{11}$$

Доказательство. По построению схема (9) является точной на решении задачи (8), поэтому достаточно оценить близость решений задач (7) и (8).

Пусть $z_i = u_i - \tilde{u}_i, \quad -\infty < i < +\infty$. Нетрудно убедиться, что вектор - функция $z(y)$ является решением краевой задачи:

$$Lz = (\varepsilon_2 + y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \tilde{w}(y)\frac{\partial z}{\partial y} - Mz = F(x, y, u) - \tilde{F}(x, y, u) + (\tilde{w}(y) - w(y))\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$z_i(0) - \varepsilon_2\beta_2\frac{\partial z_i}{\partial y}(0) = 0, \quad z_i(1) = 0, \ |i| < \infty, \ z_i(y) \to 0, \ i \to \pm\infty,$$

где M – трехдиагональная матрица бесконечного порядка, ненулевые элементы произвольной i-й строки которой имеют вид:

$$M_{i,i-1} = -\left(\frac{\varepsilon_1}{h_1^2} + \frac{a(x_i,y)}{h_1}\right), \quad M_{i,i} = \frac{2\varepsilon_1}{h_1^2} + \frac{a(x_i,y)}{h_1} + c(x_i,y), \quad M_{i,i+1} = -\frac{\varepsilon_1}{h_1^2}.$$

Учитывая оценки производных согласно лемме 1, получим:

$$\max_i |L_i z(y)| \le C_0 h_1 + \frac{C_0 h_2}{\varepsilon_2 + y}. \tag{12}$$

Можно показать, что для оператора L справедлив принцип максимума и если для какой-либо дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\Psi(y)$ выполнены условия:

$$\Psi(0) - \varepsilon_2\beta_2\Psi'(0) \ge 0, \quad \Psi(1) \ge 0, \ L\Psi(y) \le 0, \quad \lim_{i\to\pm\infty} \Psi_i(y) > 0, \tag{13}$$

то $\Psi(y) \ge 0$ при всех $y \in [0,1]$.

Определим вектор-функцию $\Psi(y)$ с компонентами

$$\Psi_i(y) = Ch_1(1-y) - C\ln(\varepsilon_2 + y)h_2 \pm z_i(y).$$

Учитывая оценку (12), заключаем, что для некоторой постоянной C для заданной функции $\Psi(y)$ выполнятся условия (13). В силу принципа максимума $\Psi(y) \ge 0$. Следовательно, при всех i

$$|z_i(y)| \le Ch_1 - C\ln(\varepsilon_2 + y)h_2.$$

Это доказывает оценку (10).

Остановимся на случае $\beta > 1$. Учтем оценку производной (6) и получим:

$$\max_i |L_i z(y)| \le C_0 h_1 + C_0 h_2 + C_0 h_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + y}\right)^{\beta-1} \frac{1}{\varepsilon_2 + y}. \tag{14}$$

Определим вектор-функцию $\Psi(y)$ с компонентами:

$$\Psi_i(y) = Ch_1(1-y) + Ch_2\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + y}\right)^{\beta-1} + Ch_2 \pm z_i(y).$$

Учитывая оценку (14), получим, что для некоторой постоянной C для $\Psi_i(y)$ будут выполнены условия (13). Тогда в силу принципа максимума $\Psi_i(y) \ge 0$, $y \in [0,1]$. Это доказывает оценку (11). Теорема доказана. ∎

2. Редукция схемы к конечному числу узлов

Итак, доказали, что схема (9) обладает свойством сходимости, равномерной по малым параметрам. Эта схема может быть записана в виде трехточечной векторной разностной схемы с бесконечным числом узлов по координате x. Для того, чтобы построенную схему можно было использовать для компьютерных вычислений, необходимо решить вопрос редукции этой схемы к конечному числу узлов. Асимптотическое поведение решения скалярных разностных уравнений первого и второго порядка исследуется в [4].

Рассмотрим в векторном виде трехточечную разностную схему:

$$\mathbf{L_i U} = \mathbf{C}_i \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad -\infty < i < +\infty, \tag{15}$$

$$\mathbf{U}_i \to \mathbf{0}, \ i \to \pm\infty, \tag{16}$$

где относительно входящих в (15) матриц предполагаем выполненными ограничения:

$\mathbf{C}_i$, $\mathbf{D}_i$ - ненулевые неотрицательные диагональные матрицы порядка N; матрицы $\mathbf{G}_i$ являются M-матрицами,

$$\mathbf{C}_i \to \mathbf{C}_{\pm\infty}, \ \mathbf{G}_i \to \mathbf{G}_{\pm\infty}, \ \mathbf{D}_i \to \mathbf{D}_{\pm\infty}, \ \mathbf{F}_i \to \mathbf{0}, \ i \to \pm\infty,$$

$$||\mathbf{G}_i^{-1}\mathbf{C}_i|| + ||\mathbf{G}_i^{-1}\mathbf{D}_i|| \le \sigma < 1,$$

$$\mathbf{C}_i \ge \mathbf{D}_i \ge 0, \ \mathbf{Q}_i = \mathbf{G}_i - \mathbf{C}_i - \mathbf{D}_i,$$

$$Q_i^{j,j} \ge \sum_{k \ne j} |Q_i^{j,k}| + \Delta, \ \Delta > 0, \quad i > 0, \quad 1 \le j \le N. \tag{17}$$

Рассмотрим отдельно перенос краевого условия из $(+\infty)$ и из $(-\infty)$. Перенос краевого условия из $(+\infty)$ осуществляем на основе соотношения левой матричной прогонки, а перенос краевого условия из $(-\infty)$ – на основе соотношения правой матричной прогонки. Для переноса условия из $(-\infty)$ определим соотношение:

$$\mathbf{U}_{i-1} = \mathbf{A}_i^{(1)} \mathbf{U}_i + \mathbf{B}_i^{(1)}, \tag{18}$$

где коэффициенты $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и $\mathbf{B}_i^{(1)}$ являются решениями задач с предельным условием на $(-\infty)$:

$$\mathbf{A}_{i+1} = (\mathbf{G}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{D}_i \quad \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_{-\infty}, \ i \to -\infty, \tag{19}$$

$$\mathbf{C}_i(\mathbf{B}_{i+1} - \mathbf{B}_i) + [\mathbf{G}_i - \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i]\mathbf{B}_{i+1} = -\mathbf{F}_i, \quad \mathbf{B}_i \to 0, \ i \to -\infty, \tag{20}$$

матрица $\mathbf{A}_{-\infty}$ является решением уравнения

$$\mathbf{C}_{-\infty}\mathbf{A}^2 - \mathbf{G}_{-\infty}\mathbf{A} + \mathbf{D}_{-\infty} = 0$$

с нормой, меньшей единицы. Можно показать, что при выполнении условий (17) такое решение существует. Тогда при всех i $||\mathbf{A}_i^{(1)}|| \le \sigma < 1$. Из этого следует, что соотношение (18) выделяет многообразие решений разностного уравнения (15), удовлетворяющих предельному условию на $(-\infty)$.

Решения задач (19) и (20) могут быть найдены на основе разложения коэффициентов разностного уравнения (15) в ряд по отрицательным степеням i. Можно доказать, что при этом точность вычисления $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и $\mathbf{B}_i^{(1)}$ увеличивается с увеличением $|i|$. Если разностное уравнение (15) вырождается при стремлении некоторого параметра к нулю (что случается при разностной аппроксимации уравнений с малым параметром при старших производных), для нахождения $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и $\mathbf{B}_i^{(1)}$ можно использовать асимптотические разложения по малому параметру. При этом точность вычисления этих коэффициентов не зависит от i.

Перейдем точным образом от (15)-(16) к разностной схеме с конечным числом узлов:

$$\mathbf{C}_i\mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{G}_i\mathbf{U}_i + \mathbf{D}_i\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad M < i < N,$$
$$\mathbf{U}_M = \mathbf{A}_{M+1}^{(1)}\mathbf{U}_{M+1} + \mathbf{B}_{M+1}^{(1)}, \quad \mathbf{U}_N = \mathbf{A}_N^{(2)}\mathbf{U}_{N-1} + \mathbf{B}_N^{(2)}. \tag{21}$$

Коэффициенты в краевых условиях схемы (21) из соответствующих задач могут быть вычислены приближенно. На основании принципа максимума можно показать, что решение схемы (21) устойчиво к возмущению этих коэффициентов. Точнее это можно сформулировать следующим образом.

Лемма 2. *Пусть* $\tilde{\mathbf{U}}$ *– решение схемы (21) в случае возмущенных*

$$\tilde{\mathbf{A}}_{M+1}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{M+1}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_N^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_N^{(2)}.$$

Пусть

$$||\tilde{\mathbf{A}}_{M+1}^{(1)} - \mathbf{A}_{M+1}^{(1)}||, \quad ||\tilde{\mathbf{B}}_{M+1}^{(1)} - \mathbf{B}_{M+1}^{(1)}||, \quad ||\tilde{\mathbf{A}}_N^{(2)} - \mathbf{A}_N^{(2)}||, \quad ||\tilde{\mathbf{B}}_N^{(2)} - \mathbf{B}_N^{(2)}|| \le \Delta,$$

$$||\tilde{\mathbf{A}}_{M+1}^{(1)}||, \quad ||\tilde{\mathbf{A}}_N^{(2)}|| \le \sigma < 1.$$

Тогда при всех $i = M, M+1, ..., N$

$$\max_i ||\tilde{\mathbf{U}}_i - \mathbf{U}_i|| \le \frac{\Delta}{1-\sigma}(1 + \max_i ||\mathbf{U}_i||).$$

■

Пусть $||D_i|| \le \varepsilon$. Тогда от (15)-(16) можно перейти к схеме с конечным числом узлов:

$$\mathbf{C}_i\mathbf{V}_{i-1} - \mathbf{G}_i\mathbf{V}_i + \mathbf{D}_i\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad M < i < N,$$

$$\mathbf{C}_{M+1}\mathbf{V}_M - \mathbf{G}_{M+1}\mathbf{V}_{M+1} = F_{M+1}, \quad \mathbf{C}_N\mathbf{V}_{N-1} - \mathbf{G}_N\mathbf{V}_N = \mathbf{F}_N. \tag{22}$$

С помощью принципа максимума можно доказать, что справедлива оценка:

$$\max_i ||\mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i|| \le \frac{\varepsilon}{1-\sigma}\{||\mathbf{G}_{M+1}^{-1}|| \times ||\mathbf{U}_{M+2}|| + ||\mathbf{G}_N^{-1}|| \times ||\mathbf{U}_{N+1}||\}.$$

Литература

1. Берлянд М.Е. *Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы.* Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

2. Багаев Б.М., Солусенко Н.П. *Численное решение для задач со степенным пограничным слоем* // Моделирование в механике. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР. 1989. Т.3. N 1.С.54–59.

3. Лисейкин В.Д. *О численном решении уравнений со степенным погранслоем* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1986. Т.26. N 12. С.1813–1820.

4. Balla K. *On asymptotic behavior of solutions to some difference equations* // Advances in difference equatoins. Proseedings of the second int. conf. on difference equations. Veszprem, Hungary. 1995. P.67–80. Gordon and Breach science publ. 1997.