ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2010, том 50, № 2, с. 221–233

УДК 519.63

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ ФУНКЦИИ С ПОГРАНСЛОЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ[1)]

© 2010 г. А. И. Задорин*, Н. А. Задорин**

*(*644099 Омск, ул. Певцова, 13, Омский фил. Ин-та матем. СО РАН; **644077 Омск, пр-т Мра, 55-а, Омский гос. ун-т)*

e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru; nik-zadorin@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.06.2009 г.

Исследуются вопросы сплайн-интерполяции функций одной переменной с погранслойной составляющей. Такие функции могут соответствовать решению сингулярно-возмущенной краевой задачи на интервале. Строятся сплайн-интерполяционные формулы, точные на погранслойной составляющей, и оценивается их погрешность. На основе построенных интерполянтов получены формулы для вычисления производной. Приводятся результаты численных экспериментов. Библ. 13. Табл. 7.

Ключевые слова: интерполяция функции одной переменной с погранслойной составляющей, сплайн-интерполяция, большие градиенты, оценка погрешности интерполяции, сингулярно возмущенная краевая задача.

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы сплайн-интерполяции функций с ограниченными производными широко известны (см., например, [1]). Однако полиномиальная сплайн-интерполяция функций с большими градиентами может приводить к существенным погрешностям. В [2] показано, что формулы кусочно-линейной и кусочно-квадратической сплайн-интерполяций являются равномерно точными, если использовать сетку из [3], которая сгущается в пограничном слое. В данной работе равномерная по градиентам интерполируемой функции точность сплайн-интерполяции достигается подгонкой сплайн-интерполяционной формулы к погранслойной составляющей, сетка может быть равномерной. Предлагаемая работа продолжает результаты из [4], [5]. В [4] предложена сплайн-интерполяция, точная на экспоненциальной погранслойной составляющей. В [5] осуществлена подгонка сплайн-интерполяции к погранслойной составляющей общего вида, построенная формула обладает первым порядком точности по шагу сетки, независимо от градиентов функции в пограничном слое.

Всюду в работе под C и C_j, $j \ge 0$, будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от градиентов погранслойной составляющей и шагов разностной сетки, причем различные постоянные будем обозначать одной буквой, если это не вызывает недоразумений.

Итак, пусть функция $u(x)$ является достаточно гладкой и представима в виде

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [0, 1], \tag{1.1}$$

где составляющая $\Phi(x)$ известна и имеет области больших градиентов, регулярная составляющая $p(x)$ ограничена вместе с некоторыми производными, постоянная γ явно не задана. Представление (1.1) справедливо для решений сингулярно возмущенных задач (см. [6]), о чем подробнее будет сказано ниже.

Пусть функция $u(x)$ задана в узлах равномерной сетки Ω:

$$\Omega = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h, x_0 = 0, x_N = 1, n = 1, 2, \ldots, N\},$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00729) и Национального фонда Болгарии, проект HS-MI-106/2005.

$u_n = u(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. Заметим, что равномерность сетки в дальнейших рассуждениях несущественна, важно, что мы не сгущаем сетку определенным образом.

Сначала покажем, что полиномиальная сплайн-интерполяция

$$u_2(x) = (u_n - u_{n-1})\frac{x - x_n}{h} + u_n, \quad x \in \Delta_n = [x_{n-1}, x_n], \tag{1.2}$$

может привести к существенной погрешности в случае функции вида (1.1). Для интерполяции (1.2) справедлива оценка погрешности (см. [1])

$$|u_2(x) - u(x)| \le \frac{h^2}{8}\max_{s \in \Delta_n}|u''(s)|, \quad x \in \Delta_n. \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует, что если производная $|u''(x)|$ ограничена на $[0, 1]$, то погрешность интерполяции будет порядка $O(h^2)$, если эта производная равномерно не ограничена, то погрешность может быть существенной. В этом можно убедиться, рассмотрев функцию $u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$ при $\varepsilon = h$, тогда $u_2(h/2) - u(h/2) \approx 0.0774$ независимо от значения h.

2. ПРИМЕРЫ ФУНКЦИЙ С ПОГРАНСЛОЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{2.1}$$

где

$$a(x) \ge \alpha > 0, \quad b(x) \ge 0, \quad \varepsilon > 0,$$

функции a, b, f достаточно гладкие. Согласно, например, [7], решение задачи (2.1) имеет экспоненциальный пограничный слой у левого конца интервала $x = 0$ и для решения $u(x)$ справедливо представление (1.1) при

$$\Phi(x) = \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x), \tag{2.2}$$

$$|p^{(j)}(x)| \le C_0[\varepsilon^{1-j}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x) + 1], \quad 0 \le j \le 4, \tag{2.3}$$

$a_0 = a(0)$, $\gamma = -\varepsilon u'(0)/a_0$, $|\gamma| \le C_1$.

Заметим, что

$$\Phi'(x) < 0, \quad \Phi''(x) > 0, \quad x \in [0, 1]. \tag{2.4}$$

Остановимся на примере задачи со степенным пограничным слоем. Такие задачи исследовались, например, в [8]–[10]. Рассмотрим задачу из [9]:

$$\begin{aligned} -(\varepsilon + x)^2u'' + c(x)u &= f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = A, \quad u(1) &= B, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$c, f \in C^1[0, 1], \quad c(x) \ge 0, \quad c(0) > 0.$$

Согласно [9], существует единственное решение задачи (2.5) и для $u(x)$ справедливо представление (1.1) с функцией

$$\Phi(x) = (1 + x/\varepsilon)^{-r}, \quad r = (\sqrt{1 + 4c(0)} - 1)/2, \tag{2.6}$$

и справедливы оценки производных

$$|p^{(j)}(x)| \le C(\varepsilon + x)^{1-j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad x \in [0, 1]. \tag{2.7}$$

Согласно (2.6), (2.7), решение задачи (2.5) содержит погранслойную составляющую вида степенной функции. Для функции $\Phi(x)$ из (2.6) выполнены условия (2.4). Рассмотрим частное решение задачи (2.5):

$$u(x) = \left(1 + \frac{x}{\varepsilon}\right)^{-1}.$$

Тогда при $\varepsilon = h$

$$u_2\left(\frac{h}{2}\right) - u\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{12}.$$

Таким образом, погрешность метода кусочно-линейной интерполяции не уменьшается при $h \longrightarrow 0$ и необходима специальная сплайн-интерполяционная формула и для функции со степенной погранслойной составляющей.

3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ФОРМУЛ НЕПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Погрешность формул полиномиальной сплайн-интерполяции оценивалась, например, в [1], [11]. Получим оценки точности формул неполиномиальной сплайн-интерполяции, которые ниже применительно к функции с погранслойной составляющей будут иметь конкретный вид. Рассмотрим различные условия сплайн-интерполяции. Пусть $g(x)$ – сплайн-интерполянт для функции $u(x)$.

Для произвольного интервала Δ_n зададим условия интерполяции

$$g(x_{n-1}) = u_{n-1}, \quad g(x_n) = u_n. \tag{3.1}$$

Лемма 1. *Пусть* $u(x), g(x) \in C^2[x_{n-1}, x_n]$, $n = 1, 2, \ldots, N$, *и выполнены условия интерполяции* (3.1). *Тогда справедлива оценка*

$$|u(x) - g(x)| \le \frac{h^2}{8}\left[\max_{s \in \Delta_n}|u''(s)| + \max_{s \in \Delta_n}|g''(s)|\right], \quad x \in \Delta_n. \tag{3.2}$$

Доказательство. Применяем те же рассуждения, которые использовались в [11] для оценки погрешности полиномиальной интерполяции. Пусть $u_2(x)$ определена формулой (1.2). Определим

$$R(t) = u(t) - u_2(t) - M(t - x_{n-1})(t - x_n).$$

Пусть $x \in (x_{n-1}, x_n)$. Предположим, что постоянная M выбрана таким образом, что $R(x) = 0$. Тогда имеем

$$R(x_{n-1}) = 0, \quad R(x) = 0, \quad R(x_n) = 0.$$

Применяем дважды теорему Лагранжа и получаем, что для некоторой точки $s_1 \in (x_{n-1}, x_n)$ выполнится условие $R''(s_1) = 0$. Из этого условия находим $M = u''(s_1)/2$, поэтому

$$u(x) - u_2(x) = \frac{1}{2}u''(s_1)(x - x_{n-1})(x - x_n). \tag{3.3}$$

Аналогичным образом найдется точка $s_2 \in (x_{n-1}, x_n)$ такая, что

$$g(x) - u_2(x) = \frac{1}{2}g''(s_2)(x - x_{n-1})(x - x_n). \tag{3.4}$$

Из (3.3), (3.4) следует, что

$$u(x) - g(x) = \frac{1}{2}[u''(s_1) - g''(s_2)](x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Из этого соотношения следует (3.2). Лемма доказана.

Рассмотрим следующие условия интерполяции:

$$g(x_{n-1}) = u_{n-1}, \quad g'(x_{n-1}) = u'(x_{n-1}), \quad g(x_n) = u_n. \tag{3.5}$$

Лемма 2. *Пусть* $u(x)$, $g(x) \in C^3[x_{n-1}, x_n]$ *и условия интерполяции* (3.5) *имеют место. Тогда справедлива оценка*

$$|u(x) - g(x)| \le \frac{2}{81}h^3[\max_{s \in \Delta_n}|u'''(s)| + \max_{s \in \Delta_n}|g'''(s)|], \quad x \in \Delta_n. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $u_3(x)$ – квадратический сплайн с условиями интерполяции (3.5) на каждом интервале Δ_n. Определим функцию

$$R(t) = u(t) - u_3(t) - M(t - x_{n-1})^2(t - x_n).$$

По аналогии с леммой 1 получаем, что для некоторой точки $s_1 \in (x_{n-1}, x_n)$ будет

$$u(x) - u_3(x) = \frac{1}{6}u'''(s_1)(x - x_{n-1})^2(x - x_n). \tag{3.7}$$

Аналогично, что для некоторого $s_2 \in (x_{n-1}, x_n)$ имеем

$$g(x) - u_3(x) = \frac{1}{6}g'''(s_2)(x - x_{n-1})^2(x - x_n). \tag{3.8}$$

Используя (3.7), (3.8), получаем утверждение леммы.

4. ДВУХТОЧЕЧНАЯ НЕПОЛИНОМИАЛЬНАЯ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

На интервале Δ_n строим интерполянт $u_{\Phi,2}(x)$ в виде

$$u_{\Phi,2}(x) = M_1\Phi(x) + M_2,$$

удовлетворяем условиям интерполяции (3.1) и получаем

$$u_{\Phi,2}(x) = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Phi_n - \Phi_{n-1}}[\Phi(x) - \Phi_n] + u_n, \quad x \in \Delta_n, \tag{4.1}$$

где $\Phi_n = \Phi(x_n)$. Предполагаем, что составляющая $\Phi(x)$ строго монотонна на каждом интервале Δ_n, при этом соотношение (4.1) определено корректно. Оценим точность нелинейной сплайн-интерполяции (4.1). Зададим погрешность интерполяции

$$R_\Phi(u, x) = u_{\Phi,2}(x) - u(x).$$

Учитывая представление (1.1), получаем $R_\Phi(u, x) = R_\Phi(p, x)$. Используя лемму 1, получаем оценку

$$|u_\Phi(x) - u(x)| \le \frac{h^2}{8}[\max_{s \in \Delta_n}|p''(s)| + \max_{s \in \Delta_n}|p''_{\Phi,2}(s)|], \quad x \in \Delta_n, \tag{4.2}$$

где $p_{\Phi,2}(x)$ соответствует интерполяции (4.1) для $p(x)$. В соответствии с (4.2), сплайн-интерполяция (4.1) имеет точность $O(h^2)$, если $u''(x)$ ограничена.

Получим оценку погрешности, равномерную по составляющей $\Phi(x)$. Интерполяция (4.1) точна на $\Phi(x)$, поэтому имеем

$$u_{\Phi,2}(x) - u(x) = -\frac{\Phi_n - \Phi(x)}{\Phi_n - \Phi_{n-1}}(p_n - p_{n-1}) + p_n - p(x), \quad x \in \Delta_n.$$

Учитывая строгую монотонность, $\Phi(x)$ на Δ_n, получаем

$$|u_{\Phi,2}(x) - u(x)| \le 2\max_{s \in \Delta_n}|p'(s)|h, \quad x \in \Delta_n. \tag{4.3}$$

Итак, если функция $u(x)$ не имеет больших градиентов на интервале Δ_n, то, согласно (4.2), интерполяционная формула (4.1) имеет второй порядок точности по h. Если функция $u(x)$ имеет погранслойную составляющую $\Phi(x)$, а производная $p'(x)$ равномерно ограничена, то формула (4.1) имеет первый порядок точности независимо от градиентов $\Phi(x)$. С учетом оценок (2.3), (2.7) получаем, что формула (4.1) имеет первый порядок точности равномерно по ε в случаях составляющей, соответствующей экспоненциальному или степенному пограничному слою.

Заметим, что формула (4.1) устойчива к возмущению $\{u(x_n), n = 0, 1, \ldots, N\}$, поэтому ее можно применять для интерполяции сеточного решения, полученного на основе применения разностной схемы к краевой задаче с пограничным слоем.

5. НЕПОЛИНОМИАЛЬНАЯ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С УЧЕТОМ ПРОИЗВОДНОЙ В УЗЛАХ СЕТКИ

Зададим интерполянт $u_{\Phi,3}(x)$ в виде

$$u_{\Phi,3}(x) = M_1\Phi(x) + M_2 + M_3(x - x_{n-1}), \quad x \in \Delta_n. \tag{5.1}$$

Потребуем выполнения условий интерполяции (3.5) и получим

$$u_{\Phi,3}(x) = (u_n - u_{n-1} - hu'_{n-1})\frac{\Phi(x) - \Phi_{n-1} - \Phi'_{n-1}(x - x_{n-1})}{\Phi_n - \Phi_{n-1} - h\Phi'_{n-1}} + u_{n-1} + (x - x_{n-1})u'_{n-1}, \quad x \in \Delta_n. \tag{5.2}$$

Лемма 3. *Пусть* $\Phi''(x) > 0$ $(\Phi''(x) < 0)$ *внутри интервала* Δ_n. *Тогда*

$$|u_{\Phi,3}(x) - u(x)| \le \max_{s \in \Delta_n}|p''(s)|h^2, \quad x \in \Delta_n. \tag{5.3}$$

Доказательство. Пусть $R_\Phi(u, x) = u_{\Phi,3}(x) - u(x)$. Интерполяция $u_{\Phi,3}(x)$ точна на функции $\Phi(x)$, поэтому $R_\Phi(u, x) = R_\Phi(p, x)$,

$$R_\Phi(u, x) = (p_n - p_{n-1} - hp'_{n-1})G_n(x) + p_{n-1} + (x - x_{n-1})p'_{n-1} - p(x), \tag{5.4}$$

где

$$G_n(x) = \frac{\Phi(x) - \Phi_{n-1} - \Phi'_{n-1}(x - x_{n-1})}{\Phi_n - \Phi_{n-1} - h\Phi'_{n-1}}. \tag{5.5}$$

Рассмотрим случай $\Phi''(x) > 0$. Функция

$$\Psi(x) = \Phi(x) - \Phi_{n-1} - \Phi'_{n-1}(x - x_{n-1})$$

неотрицательная и возрастающая, поэтому

$$0 \le G_n(x) \le 1, \quad x \in \Delta_n. \tag{5.6}$$

В случае $\Phi''(x) < 0$ функция $\Psi(x)$ неположительная и убывающая, и в этом случае оценки (5.6) справедливы. Учитывая (5.6), получаем оценку (5.3) из (5.4). Лемма доказана.

Согласно лемме 3, если производная $p''(x)$ по модулю ограничена на интервале Δ_n, то интерполяция (5.2) имеет второй порядок точности независимо от градиентов $\Phi(x)$.

Рассмотрим случай, когда производная $p''(x)$ не является равномерно ограниченной. Используя (5.4), получаем

$$|u_{\Phi,3}(x) - u(x)| \le 2\int_{x_{n-1}}^{x_n}\int_{x_{n-1}}^{s}|p''(r)|drds, \quad x \in \Delta_n. \tag{5.7}$$

Пусть $u(x)$ является решением задачи (2.1). Учитывая оценку (2.3) на $|p''(x)|$ и неравенство $1 - \exp(-x) \le 2x/(x+1)$ для $x > 0$, из (5.7) получаем

$$|u_{\Phi,3}(x) - u(x)| \le C_0h^2 + \frac{4C_0h^2}{\varepsilon + \alpha h}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1}), \quad x \in \Delta_n. \tag{5.8}$$

Заметим, что в случае, когда $u(x)$ является решением задачи (2.1), точность сплайн-интерполяции может быть повышена, так как, согласно [6], для $u(x)$ существует декомпозиция вида (1.1) с более сложным заданием $\Phi(x)$, когда производная $p''(x)$ равномерно ограничена.

Пусть $u(x) \in C^3[0, 1]$. Учитывая, что интерполяция (5.2) точна на $\Phi(x)$, из (3.6) получаем

$$|u_{\Phi,3}(x) - u(x)| \le \frac{2}{81}[\max_{s \in \Delta_n}|p'''(s)| + \max_{s \in \Delta_n}|p'''_{\Phi,3}(s)|]h^3, \tag{5.9}$$

где $p_{\Phi,3}(x)$ – интерполянт (5.2) для $p(x)$. Итак, интерполяция (5.2) обладает третьим порядком точности по шагу h, если функция $u(x)$ не имеет больших градиентов на интервале Δ_n.

6. ТРЕХТОЧЕЧНАЯ НЕПОЛИНОМИАЛЬНАЯ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Сплайн-интерполяционная формула (5.2) использует значения $u'(x)$ в узлах сетки. Построим сплайн-интерполяционную формулу такого же порядка точности, но использующую только значения функции в узлах сетки. Для этого строим интерполянт $w_{\Phi,3}(x)$ в виде (5.1) на интервале $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ с условиями интерполяции

$$w_{\Phi,3}(x_{n-1}) = u_{n-1}, \quad w_{\Phi,3}(x_n) = u_n, \quad w_{\Phi,3}(x_{n+1}) = u_{n+1}. \tag{6.1}$$

Тогда

$$w_{\Phi,3}(x) = u_n + \frac{u_n - u_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}}\left[\Phi(x) - \Phi_n - \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{h}(x - x_n)\right], \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}]. \tag{6.2}$$

Получим оценки точности интерполяционной формулы (6.2).

Лемма 4. *Пусть для функции $u(x)$ имеет место представление* (1.1). *Тогда при всех $x \in [x_{n-1}, x_{n+1}]$ справедлива оценка*

$$|w_{\Phi,3}(x) - u(x)| \le \frac{1}{9\sqrt{3}}[\max_s|p'''_{\Phi,3}(s)| + \max_s|p'''(s)|]h^3, \quad s \in [x_{n-1}, x_{n+1}], \tag{6.3}$$

где $p_{\Phi,3}(x)$ соответствует интерполяции (6.2) *для функции $p(x)$.*

Доказательство. Построим квадратическую сплайн-интерполяцию с условиями (6.1):

$$w_3(x) = u_n + \frac{u_n - u_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{2h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}). \tag{6.4}$$

Применяем подход, используемый в леммах 1, 2, и получаем оценку погрешности в виде

$$|u(x) - w_3(x)| \le \frac{1}{9\sqrt{3}}\max_s|u'''(s)|h^3, \quad x, s \in [x_{n-1}, x_{n+1}]. \tag{6.5}$$

Итак, квадратическая интерполяция (6.4) имеет погрешность интерполяции порядка $O(h^3)$. Но эта погрешность может быть существенной, если производная $u'''(x)$ значительна, что имеет место для функций с погранслойной составляющей. Рассуждая по аналогии с леммами 1, 2, получаем

$$|w_{\Phi,3}(x) - u(x)| \le \frac{1}{9\sqrt{3}}[\max_s|w'''_{\Phi,3}(s)| + \max_s|u'''(s)|]h^3, \quad x, s \in [x_{n-1}, x_{n+1}]. \tag{6.6}$$

Сплайн-интерполяция (6.2) точна на составляющей $\Phi(x)$, поэтому из (6.6) следует неравенство (6.3). Лемма доказана.

Получим оценку погрешности интерполяции, равномерную по градиентам составляющей $\Phi(x)$. Предположим, что на каждом сеточном интервале Δ_n функция $\Phi(x)$ выпукла либо вогнута и строго монотонна. Покажем, что тогда для некоторой постоянной C, не зависящей от $\Phi(x)$, будет

$$|w_{\Phi,3}(x) - u(x)| \le C\max|p''(s)|h^2, \quad x, s \in [x_{n-1}, x_{n+1}]. \tag{6.7}$$

Учитывая, что интерполяция (6.2) точна на $\Phi(x)$, получаем

$$w_{\Phi,3}(x) - u(x) = p_{\Phi,3}(x) - p(x) = [p_{\Phi,3}(x) - p_3(x)] + [p_3(x) - p(x)], \tag{6.8}$$

где $p_3(x)$ – квадратическая интерполяция (6.4) для функции $p(x)$. Оценим выражения в каждой скобке (6.8).

Для первой скобки получим

$$p_{\Phi,3}(x) - p_3(x) = \frac{p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}}{2h^2}[2h^2G(x) - (x - x_{n-1})(x - x_n)],\quad x_{n-1} \le x \le x_{n+1}, \tag{6.9}$$

где

$$G(x) = \frac{\Phi(x) - \Phi_n - (\Phi_n - \Phi_{n-1})(x - x_n)/h}{\Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}}. \tag{6.10}$$

Очевидно, что

$$G(x_{n-1}) = 0, \quad G(x_n) = 0, \quad G(x_{n+1}) = 1.$$

Рассмотрим случай $\Phi''(x) > 0$, $\Phi'(x) < 0$ при $x \in (x_{n-1}, x_n)$ $\forall n$, другие случаи рассматриваются аналогично. Сначала докажем, что

$$|G(x)| \le 1, \quad x \in [x_n, x_{n+1}]. \tag{6.11}$$

Функция $G(x)$ возрастает на интервале $[x_n, x_{n+1}]$, поэтому $0 \le G(x) \le 1$, что доказывает (6.11).

Пусть $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Заметим, что выражение (6.10) имеет следующую геометрическую интерпретацию: модуль числителя соответствует расстоянию между функцией $\Phi(x)$ и ее линейным интерполянтом (стягивающей хордой) в произвольной точке x интервала $[x_{n-1}, x_n]$; знаменатель соответствует расстоянию между функцией $\Phi(x)$ и той же хордой в точке x_{n+1} (экстраполяционная погрешность линейной интерполяции). Можно рассмотреть G как функцию двух аргументов: $G = G(x, h)$. Используя разложение в ряд Тейлора, можно показать, что

$$\lim_{h \to 0} G(x, h) = \frac{1}{2}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n]. \tag{6.12}$$

Следовательно, если $\Phi(x)$ не имеет больших градиентов на заданном интервале, то при достаточно малых h имеем $|G(x, h)| \le 1$. Остановимся на случае больших градиентов $\Phi(x)$. С учетом того, что, по предположению, $\Phi(x)$ убывает, а $G(x) < 0$ на интервале $[x_{n-1}, x_n]$, из (6.10) получим

$$|G(x)| \le \frac{\Phi_{n-1} - \Phi_n}{\Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}}. \tag{6.13}$$

Заметим, что переход от (6.10) к (6.13) не является грубым, если учесть случай, когда в достаточно малой окрестности точки x_{n-1} функция $\Phi(x)$ резко убывает от значения Φ_{n-1} до Φ_n. Для получения оценки на $|G(x)|$ из (6.13), сделаем ограничение на скорость убывания $\Phi(x)$. Предположим, что для некоторого $\eta \in (0, 1)$, отделенного от единицы, имеем

$$\Phi_n - \Phi_{n+1} \le \eta(\Phi_{n-1} - \Phi_n). \tag{6.14}$$

Тогда из (6.13) следует, что

$$|G(x)| \le 1/(1 - \eta). \tag{6.15}$$

Используя (6.11), (6.12), (6.15), заключаем, что для некоторой постоянной C будет $|G(x)| \le C$.

Рассмотрим этот вопрос на примере экспоненциальной погранслойной составляющей $\Phi(x) = \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x)$, соответствующей (2.2). Чтобы получить оценку $|G(x)| \le C$, где C не зависит от ε, рассмотрим два случая.

Пусть $a_0\varepsilon^{-1}h < 1$. Используя разложение в ряд Тейлора для $\Phi(x)$ и $\Phi(x_{n\pm1})$ в точке x_n, получаем $|G(x)| \le 1$. Пусть $a_0\varepsilon^{-1}h \ge 1$. Тогда при $\eta = \exp(-a_0\varepsilon^{-1}h)$, $\eta \le e^{-1}$, соотношение (6.14) становится равенством и, в соответствии с (6.15), имеем

$$|G(x)| \le \frac{1}{1 - e^{-1}}.$$

Итак, $|G(x)|$ ограничено постоянной, не зависящей от параметра ε.

Используя тот факт, что $|G(x)| \le C$, из (6.9) получаем

$$|p_{\Phi,3}(x) - p_3(x)| \le C_1 \max_s |p''(s)| h^2, \quad x, s \in [x_{n-1}, x_{n+1}]. \tag{6.16}$$

Оценим выражение во второй скобке (6.8). Учитывая (6.4), получаем

$$p_3(x) - p(x) = \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\int_{s}^{r} p''(\tau)d\tau dr ds +$$

$$+\frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{2h^2}\left[\int_{x_{n-1}}^{x_n}(s-x_{n-1})p''(s)ds + \int_{x_n}^{x_{n+1}}(x_{n+1}-s)p''(s)ds\right].$$

Оценивая каждое слагаемое, получаем

$$|p_3(x) - p(x)| \le \max_s |p''(s)|\frac{h^2}{3} + \max_s |p''(s)|\frac{h^2}{8} \le \frac{11}{24}\max_s |p''(s)| h^2. \tag{6.17}$$

Теперь получаем требуемую оценку (6.7) из (6.8), (6.16) и (6.17).

7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Сначала покажем, что применение конечно-разностных формул для вычисления производных, основанных на полиномиальной сплайн-интерполяции, может привести к существенной погрешности в случае функций с большими градиентами. Рассмотрим формулу

$$u'(x) \approx u_2'(x) = \frac{u_n - u_{n-1}}{h}, \quad x \in \Delta_n. \tag{7.1}$$

Пусть $u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$. При $\varepsilon = h$ получим

$$\varepsilon|u_2'(0) - u'(0)| = e^{-1}.$$

Относительная погрешность формулы не убывает при $h \longrightarrow 0$ и $\varepsilon = h$.

Если мы дифференцируем построенный интерполянт (4.1), то получим приближенную формулу для производной

$$u_{\Phi,2}'(x) = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Phi_n - \Phi_{n-1}}\Phi'(x), \quad x \in \Delta_n. \tag{7.2}$$

Формула (7.2) точна на функции $\Phi(x)$, оценим ее погрешность. Учитывая представление (1.1), получаем

$$u_{\Phi,2}'(x) - u'(x) = \frac{p_n - p_{n-1}}{\Phi_n - \Phi_{n-1}}\Phi'(x) - p'(x).$$

Интегрированием можно убедиться, что

$$u_{\Phi,2}'(x) - u'(x) = \frac{1}{h}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\int_{x}^{s}\left[-\frac{p_n - p_{n-1}}{\Phi_n - \Phi_{n-1}}\Phi''(r) + p''(r)\right]drds. \tag{7.3}$$

Для классической формулы (7.1) имеем

$$u_2'(x) - u'(x) = \frac{1}{h}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\int_{x}^{s}[\gamma\Phi''(r) + p''(r)]drds. \tag{7.4}$$

Сравним погрешности (7.3) и (7.4). Учитывая, что основной вклад в погрешность дает функция $\Phi''(r)$, заключаем, что формула (7.2) более точна, чем (7.1), если $|\Phi_n - \Phi_{n-1}| \gg |p_n - p_{n-1}|$.

Рассмотрим случай, когда функция $u(x)$ является решением сингулярно возмущенной задачи (2.1) с экспоненциальным пограничным слоем. В [4] исследовался вопрос интерполяции такой функции, когда $\Phi(x) = \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x)$, и доказано, что для некоторой постоянной C, не зависящей от ε, справедливо неравенство

$$\varepsilon|u'_{\Phi,2}(x) - u'(x)| \le Ch, \quad x \in \Delta_n. \tag{7.5}$$

Выше показано, что для классической формулы (7.1) аналогичная погрешность может не уменьшаться при $h \longrightarrow 0$.

Перейдем к построению более точной формулы для вычисления производной, для чего дифференцируем интерполянт (6.2), тогда получим

$$w'_{\Phi,3}(x) = \frac{u_n - u_{n-1}}{h} + \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{\Phi_{n-1} - 2\Phi_n + \Phi_{n+1}}\left(\Phi'(x) - \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{h}\right), \tag{7.6}$$

где $x \in [x_{n-1}, x_{n+1}]$. Формула численного дифференцирования (7.6) точна на функции $\Phi(x)$. Оценим погрешность этой формулы, используя разложения в ряд Тейлора:

$$|w'_{\Phi,3}(x) - u'(x)| \le \frac{h^2}{2}\max_s\left|\frac{\Phi''(s)u'''(s) - u''(s)\Phi'''(s)}{\Phi''(s)}\right|, \quad s, x \in [x_{n-1}, x_{n+1}]. \tag{7.7}$$

Согласно (7.7), формула (7.6) имеет второй порядок точности, если функция $u(x)$ не имеет больших градиентов. Получим оценку погрешности, равномерную по градиентам составляющей $\Phi(x)$. Формула (7.6) точна на $\Phi(x)$, поэтому получаем

$$w'_{\Phi,3}(x) - u'(x) = p'_{\Phi,3}(x) - p'(x) = [p'_{\Phi,3}(x) - p'_3(x)] + [p'_3(x) - p'(x)], \tag{7.8}$$

где $p'_{\Phi,3}(x)$ соответствует формуле (7.6) для вычисления $p'(x)$; $p'_3(x)$ – производная квадратического интерполянта $p_3(x)$ для функции $p(x)$, задаваемого в соответствии с формулой (6.4). Дифференцируя $p_3(x)$, получаем

$$p'_3(x) = \frac{p_n - p_{n-1}}{h} + \frac{p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}}{2h^2}(2x - x_n - x_{n-1}). \tag{7.9}$$

Используя формулу (7.6) в случае функции $p(x)$ и (7.9), получаем

$$p'_{\Phi,3}(x) - p'_3(x) = \frac{p_{n-1} - 2p_n + p_{n+1}}{h}\left(\frac{h\Phi'(x) - \Phi_n + \Phi_{n-1}}{\Phi_{n-1} - 2\Phi_n + \Phi_{n+1}} + \frac{x_n + x_{n-1} - 2x}{2h}\right). \tag{7.10}$$

Предположим, что $\Phi''(x) > 0$ при $x \in (x_{n-1}, x_{n+1})$, и ограничимся оценкой погрешности (7.8) в узле x_n. Заметим, что

$$0 < \frac{h\Phi'(x_n) - \Phi_n + \Phi_{n-1}}{\Phi_{n-1} - 2\Phi_n + \Phi_{n+1}} < 1,$$

и получим из (7.10) неравенство

$$|p'_{\Phi,3}(x_n) - p'_3(x_n)| \le \left|\frac{p_{n-1} - 2p_n + p_{n+1}}{2h}\right| \le \frac{1}{2}\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}|p''(s)|ds.$$

Для второго слагаемого в (7.8) имеем

$$p'_3(x_n) - p'(x_n) = \frac{1}{2h}\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}\int_{x_n}^{s}p''(r)drds.$$

Итак, мы доказали, что

$$|w'_{\Phi,3}(x_n) - u'(x_n)| \le \frac{1}{2}\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}|p''(s)|ds + \frac{1}{2h}\left[\int_{x_{n-1}}^{x_n}\int_{s}^{x_n}|p''(r)|drds + \int_{x_n}^{x_{n+1}}\int_{x_n}^{s}|p''(r)|drds\right]. \tag{7.11}$$

Таблица 1. Максимальная погрешность интерполяции для функции (8.1)

h	Метод сплайн-интерполяции				
	линейная (1.2)	квадратическая (6.4)	экспоненциальная двухточечная (4.1)	экспоненциальная с производной (5.2)	экспоненциальная трехточечная (6.2)
2^{-4}	0.5	31	2.85e–2	8.77e–4	2.38e–3
2^{-5}	0.5	15	1.49e–2	2.26e–4	6.58e–4
2^{-6}	0.5	7.2	7.63e–3	5.58e–5	1.73e–4
2^{-7}	0.5	3.2	3.86e–3	1.31e–5	4.45e–5
2^{-8}	0.482	1.3	1.87e–3	2.75e–6	1.08e–5
2^{-9}	0.374	0.4	7.41e–4	4.79e–7	1.99e–6

В случае ограниченной производной $p''(x)$ из (7.11) получим

$$\left|w'_{\Phi,3}(x_n) - u'(x_n)\right| \le \frac{3}{2}\max_s|p''(s)|h, \quad s \in [x_{n-1}, x_{n+1}]. \tag{7.12}$$

Таким образом, абсолютная погрешность при вычислении производной имеет порядок $O(h)$, хотя сама производная $u'(x_n)$ может не быть равномерно ограниченной в случае погранслойного роста $\Phi(x)$.

Рассмотрим случай, когда $u(x)$ является решением задачи (2.1) и производная $p''(x)$ не является равномерно ограниченной. Используем оценку (2.3) для второй производной в (7.11) и получим, что для некоторой постоянной C, не зависящей от ε, справедливо неравенство

$$\left|w'_{\Phi,3}(x_n) - u'(x_n)\right| \le C\left[h + \frac{h}{h+\varepsilon}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1})\right]. \tag{7.13}$$

Для относительной погрешности из (7.13) получим оценку

$$\varepsilon\left|w'_{\Phi,3}(x_n) - u'(x_n)\right| \le C[h\varepsilon + \min\{h, \varepsilon\}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1})].$$

8. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Зададим

$$u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x) + \frac{1}{x+1}, \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad x \in [0, 1]. \tag{8.1}$$

Для этого примера $\Phi(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$ и $|p''(x)| \le 2$.

В табл. 1 представлена погрешность интерполяции

$$\Delta_h = \max_{\varepsilon}\max_{\tilde{x}_n}|u(\tilde{x}_n) - u_{\text{int}}(\tilde{x}_n)|$$

для различных интерполяционных методов и значений h, где

$$\varepsilon \in \{1, 2^{-4}, 2^{-5}, \ldots, 2^{-11}\}, \quad \tilde{x}_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad Nh = 1.$$

Во всех таблицах $e \pm m$ обозначает $10^{\pm m}$. Определим скорость сходимости (CR) метода сплайн-интерполяции для заданного значения параметра ε:

$$\delta_h = \max_{\tilde{x}_n}|u(\tilde{x}_n) - u_{\text{int}}(\tilde{x}_n)|, \quad CR = \min_h \log_2\left(\frac{\delta_h}{\delta_{h/2}}\right).$$

В табл. 2 CR представлена для различных значений параметра ε и различных методов сплайн-интерполяции.

Из данных табл. 1, 2 следует, что применение формул полиномиальной сплайн-интерполяции приводит к значительным погрешностям при малых значениях параметра ε. Экспоненциально

Таблица 2. Скорость сходимости для функции (8.1)

ε	Метод сплайн-интерполяции				
	линейная	квадратическая	экспоненциальная двухточечная	экспоненциальная с производной	экспоненциальная трехточечная
1	1.95	2.94	1.91	2.92	2.84
2^{-4}	1.67	2.75	1.93	2.91	2.95
2^{-5}	1.37	2.53	1.86	2.85	2.93
2^{-6}	0.91	2.18	1.67	2.71	2.75
2^{-7}	0.37	1.74	1.28	2.46	2.30
2^{-8}	0.05	1.36	0.98	2.19	1.92
2^{-9}	0.00	1.15	0.93	2.04	1.85
2^{-10}	0.00	1.07	0.93	2.07	1.85

Таблица 3. Погрешность трехточечной неполиномиальной интерполяции и $(CR)_h$

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	4.85e–5	6.79e–6	8.99e–7	1.16e–7	1.47e–8	1.85e–9
	2.84	2.92	2.96	2.98	2.99	
2^{-4}	3.75e–4	4.86e–5	6.15e–6	7.72e–7	9.67e–8	1.21e–8
	2.95	2.98	2.99	3.00	3.00	
2^{-5}	8.55e–4	1.12e–4	1.40e–5	1.75e–6	2.17e–7	2.71e–8
	2.93	3.00	3.01	3.01	3.00	
2^{-6}	1.64e–3	2.43e–4	3.07e–5	3.76e–6	4.63e–7	5.74e–8
	2.76	2.99	3.03	3.02	3.01	
2^{-7}	2.26e–3	4.58e–4	6.49e–5	8.02e–6	9.74e–7	1.19e–7
	2.30	2.82	3.02	3.04	3.03	
2^{-8}	2.37e–3	6.26e–4	1.21e–4	1.68e–5	2.05e–6	2.48e–7
	1.92	2.37	2.85	3.03	3.05	
2^{-9}	2.38e–3	6.58e–4	1.65e–4	3.12e–5	4.27e–6	5.19e–7
	1.85	1.99	2.41	2.87	3.04	
2^{-10}	2.38e–3	6.58e–4	1.73e–4	4.24e–5	7.91e–6	1.08e–6
	1.85	1.93	2.03	2.42	2.88	

точные интерполяционные формулы обладают свойством равномерной по ε сходимости. Скорость сходимости этих методов убывает с уменьшением ε от 2 до 1 для двухточечной формулы подгонки (4.1) и от 3 до 2 для формул (5.2) и (6.2).

Исследуем, как погрешность сплайн-интерполяции зависит от соотношения между ε и h, на примере трехточечной экспоненциальной интерполяции (6.2). В табл. 3 приведены погрешность δ_h и $(CR)_h = \log_2(\delta_h/\delta_{h/2})$ для различных значений ε и h.

Рассмотрим пример

$$u(x) = \exp[-\varepsilon^{-1}(x + x^2/2)] + \cos(x), \quad x \in [0, 1]. \tag{8.2}$$

Функция $u(x)$ является решением сингулярно возмущенной задачи

$$\varepsilon u'(x) + (1 + x)u(x) = -\varepsilon\sin(x) + (1 + x)\cos(x), \quad u(0) = 2. \tag{8.3}$$

Таблица 4. Максимальная погрешность интерполяции для функции (8.2)

h	Метод сплайн-интерполяции				
	линейная	квадратическая	экспоненциальная двухточечная	экспоненциальная с производной	экспоненциальная трехточечная
2^{-4}	0.5	31	2.60e–2	3.11e–3	2.49e–3
2^{-5}	0.5	15	1.31e–2	1.62e–3	1.04e–3
2^{-6}	0.5	7.2	6.32e–3	8.26e–4	5.34e–4
2^{-7}	0.5	3.2	2.50e–3	4.17e–4	2.70e–4
2^{-8}	0.48	1.3	1.25e–3	2.09e–4	1.36e–4
2^{-9}	0.38	0.4	6.24e–4	1.05e–4	6.81e–5

Таблица 5

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	2.98e–1	1.49e–1	7.43e–2	3.71e–2	1.85e–2	9.27e–3
2^{-4}	1.11e–1	5.169e–2	2.48e–2	1.22e–2	6.02e–3	3.00e–3
2^{-5}	1.23e–1	5.47e–2	2.55e–2	1.23e–2	6.01e–3	2.97e–3
2^{-10}	1.84e–1	9.08e–2	4.39e–2	2.05e–2	9.01e–3	3.85e–3
2^{-11}	1.59e–1	8.13e–2	3.95e–2	1.90e–2	8.83e–3	3.87e–3

Таблица 6

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	1.85e–2	4.63e–3	1.16e–3	2.90e–4	7.24e–5	1.81e–5
2^{-4}	9.13e–2	2.36e–2	5.95e–3	1.49e–3	3.73e–4	9.31e–5
2^{-5}	1.62e–1	4.51e–2	1.16e–2	2.93e–3	7.34e–4	1.84e–4
2^{-10}	2.72e–1	1.39e–1	7.02e–2	3.50e–2	1.56e–2	5.18e–3
2^{-11}	2.72e–1	1.39e–1	7.02e–2	3.51e–2	1.75e–2	7.78e–3

Функция $u(x)$ имеет представление (1.1) с $\gamma = 1$. Погранслойная компонента $\Phi(x)$ соответствует (2.2) с $a_0 = 1$, производная $p''(x)$ не является равномерно ограниченной, $p''(0) = -1/\varepsilon$. В табл. 4 приведена погрешность интерполяции Δ_h в зависимости от h и метода для функции (8.2).

Исследуем точность полученных формул для вычисления производной на примере функции

$$u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x) + \cos(3x), \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad x \in [0, 1].$$

Эксперименты показали, что формулы для производных, основанные на полиномиальной интерполяции, при малых значениях параметра ε приводят к существенным абсолютной и относительной погрешностям.

В табл. 5 приведена относительная погрешность

$$\Delta = \max_{x_n}\left|u'_{\Phi,2}(x_n) - u'(x_n)\right|\varepsilon$$

формулы (7.2) при различных ε и h. В случае других функций результаты аналогичны, подтверждается оценка точности (7.5).

В табл. 6 приведена абсолютная погрешность

$$\Delta = \max_{x_n}\left|w'_{\Phi,3}(x_n) - u'(x_n)\right|$$

Таблица 7

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	1.71e–2	4.30e–3	1.07e–3	2.69e–4	6.72e–5	1.68e–5
2^{-4}	1.03	4.09e–1	1.30e–1	3.68e–2	9.79e–3	2.52e–3
2^{-5}	6.82	7.05	4.12	1.64	5.21e–1	1.47e–1
2^{-10}	8.00	1.60e+1	3.20e+1	6.37e+1	1.09e+2	1.13e+2
2^{-11}	8.00	1.60e+1	3.20e+1	6.40e+1	1.27e+2	2.18e+2

формулы (7.6). Результаты для других значений ε и других функций аналогичны. Подтверждаются оценки точности (7.7), (7.12).

В табл. 7 для сравнения приведена абсолютная погрешность центрально-разностной аппроксимации производной, вытекающей из (7.6) при $\Phi(x) = x^2$:

$$w_3'(x_n) = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{8.4}$$

Итак, согласно результатам экспериментов, формула (7.2) действительно имеет относительную погрешность порядка $O(h)$, что соответствует оценке (7.5). Абсолютная погрешность формулы (7.6), имеет порядок $O(h^2/(h + \varepsilon))$, что соответствует оценкам (7.7), (7.12). Классическая формула (8.4) имеет второй порядок точности только при $\varepsilon \approx 1$, точность теряется с уменьшением ε.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построены сплайн-интерполяционные формулы первого и второго порядка точности по шагу сетки, точные на погранслойной составляющей интерполируемой функции. На основе построенных сплайн-интерполяционных формул получены формулы численного дифференцирования и оценена их погрешность. Отметим, что сплайн-интерполяционная формула (4.1) использовалась в [13] при построении двухсеточного метода решения нелинейной задачи с экспоненциальным пограничным слоем. Такой подход позволяет часть вычислений осуществить на грубой сетке и получить выигрыш в числе арифметических действий. Построенная формула (4.1) позволяет осуществить интерполяцию сеточного решения с грубой сетки на мелкую с точностью, соответствующей точности разностной схемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. *Задорин А.И.* Метод интерполяции на сгущающейся сетке для функции с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9. С. 1673–1684.
3. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
4. *Задорин А.И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сибирский журнал вычисл. матем. 2007. Т. 10. № 3. С. 267–275.
5. *Zadorin A.I.* Interpolation method for a function with a sungular component // Lect. Notes in Comput. Sci. 2009. V. 5434. P. 612–619.
6. *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Singapure: World Scient., 1996.
7. *Kellogg R.B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points // Math. Comput. 1978. V. 32. P. 1025–1039.
8. *Лисейкин В.Д.* О численном решении уравнений со степенным погранслоем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 12. С. 1813–1820.
9. *Vulanovic R.* On a numerical solution of a power layer problem // Numer. Meth. and Approximation Theory 3. Univ. Nis, 1987. P. 423–431.
10. *Kandilarov J.D., Vulkov L.G., Zadorin A.I.* A method of lines approach to the numerical solution of singularly perturbed elliptic problems // Lect. Notes in Comput. Sci. 2001. V. 1988. P. 451–458.
11. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
12. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237–248.
13. *Vulkov L.G., Zadorin A.I.* Two-grid interpolation algorithms for difference schemes of exponential type for semilinear diffusion convection-dominated equations // Amer. Inst. Phys. Conf. Proc. 2008. V. 1067. P. 284–292.