ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2008, том 48, № 9, с. 1673–1684

УДК 519.63

МЕТОД ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА СГУЩАЮЩЕЙСЯ СЕТКЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ С ПОГРАНСЛОЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ[1)]

© 2008 г. А. И. Задорин

(644099 Омск, ул. Певцова, 13, Омский фил. Ин-та матем. СО РАН)

e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

Поступила в редакцию 27.11.2007 г.
Переработанный вариант 26.02.2008 г.

Исследуются методы линейной и квадратической сплайн-интерполяции для функции одной переменной с погранслойной составляющей. Показано, что при использовании равномерной сетки метод интерполяции для такой функции приводит к существенным погрешностям. Оценена погрешность линейной и квадратической сплайн-интерполяций на сгущающихся в пограничном слое сетках. Приведены результаты численных экспериментов. Библ. 9. Табл. 4.

Ключевые слова: методы интерполяции на сгущающейся сетке, функция с погранслойной составляющей, сплайн-интерполяция функции от одной переменной.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется метод интерполяции функции одной переменной, имеющей экспоненциальный погранслойный рост у границы интервала. Такая функция соответствует решению сингулярно возмущенной краевой задачи. Как известно, решение такой краевой задачи в узлах сетки может быть найдено на основе применения разностных схем, обладающих свойством равномерной по малому параметру сходимости. Равномерная сходимость ряда классических разностных схем обеспечивается сгущением разностной сетки в области пограничного слоя (см., например, [1]–[4]).

Актуален вопрос построения равномерно точной интерполяционной формулы для функции с погранслойной составляющей, так как полиномиальная интерполяция в случае равномерной сетки может привести к существенным погрешностям. По методам сплайн-интерполяции имеется достаточно много публикаций (см., например, [5], [6]). Точность интерполяции оценивается через максимум некоторой производной интерполируемой функции на интервале интерполяции. В случае когда интерполируемая функция содержит погранслойную составляющую (как правило, не выделенную в явном виде), производные не ограничены равномерно по малому параметру в узкой погранслойной области, что приводит к росту погрешности методов полиномиальной интерполяции и необходимости построения интерполяционных формул с равномерно малой по параметру погрешностью. В [5], [6] исследовано, как осуществить выбор шага для интерполяции функции с заданной точностью, при этом узлы интерполяции добавляются исходя из требования точности.

Цель работы – исследовать точность полиномиальной интерполяции функции с погранслойной составляющей на априорно сгущающихся в пограничном слое сетках (см. [2], [4]), обеспечивающих равномерную сходимость классических разностных схем. Предлагаемая работа продолжает статью [7], где в случае равномерной сетки обоснован метод экспоненциальной интерполяции и в случае неравномерной сетки из [2] обосновано использование линейной интерполяции. В сравнении с [7], на основе небольшого изменения сетки повышена точность линейной интерполяции и исследована возможность применения кусочно-квадратической интерполяции.

Всюду в работе по C и C_j, $j \geq 0$, будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от параметра ε (который может быть малым) и шагов разностной сетки, причем различные постоянные будем обозначать одной буквой, если это не вызывает недоразумений.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00729) и национального фонда Болгарии, проект HS-MI-106/2005.

Итак, пусть $u(x)$ – достаточно гладкая функция, для производных которой справедливы оценки

$$|u^j(x)| \le \frac{C_0}{\varepsilon^j}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x) + C_0, \quad 0 \le j \le 3, \tag{1.1}$$

где $1 \ge \varepsilon > 0$, $\alpha > 0$, $x \in [0, 1]$.

Пусть Ω – некоторая сетка интервала $[0, 1]$:

$$\Omega = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h_n, x_0 = 0, x_N = 1, n = 1, 2, \ldots, N\},$$

в узлах которой задана функция $u(x)$, $u_n = u(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Функция $u(x)$ с оценками производных (1.1) соответствует решению краевой задачи с пограничным слоем (см. [8])

$$\begin{gathered} \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = A, \quad u(1) = B, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где

$$a(x) \ge \alpha > 0, \quad b(x) \ge 0, \quad \varepsilon > 0,$$

и коэффициенты a, b, f – достаточно гладкие функции.

2. ЛИНЕЙНЫЙ СПЛАЙН

Пусть для произвольного интервала $\Delta_n = [x_{n-1}, x_n]$ имеем

$$u_L(x) = (u_n - u_{n-1})\frac{x - x_n}{h_n} + u_n, \quad u_n = u(x_n). \tag{2.1}$$

Покажем, что формула линейной интерполяции (2.1) может привести к существенным погрешностям, если не делать ограничения на шаги сетки. Для этого на сеточном интервале $[0, h_1]$ рассмотрим функцию $u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$, тогда при $\varepsilon = h_1$ получим

$$u_L\left(\frac{h_1}{2}\right) - u\left(\frac{h_1}{2}\right) = \frac{u(0) + u(h_1)}{2} - u\left(\frac{h_1}{2}\right) = \frac{1 + e^{-1}}{2} - e^{-0.5} \approx 0.0774.$$

Следовательно, в этом случае точность интерполяции не возрастает при уменьшении длины интерполяционного интервала h_1. Покажем, что сгущение сетки в пограничном слое приведет к равномерной точности формулы линейной интерполяции.

Зададим кусочно-равномерную сетку, предложенную в [2]:

$$\begin{gathered} \Omega = \left\{x_n : x_n = nh, 0 \le n \le \frac{N}{2}, x_n = \sigma + \left(n - \frac{N}{2}\right)H, \frac{N}{2} \le n \le N\right\}, \\ h = \frac{2\sigma}{N}, \quad H = \frac{2(1-\sigma)}{N}, \quad N \ge 4, \quad 0 < \sigma < 1, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где N – четное число.

Лемма 1. *Пусть в* (2.2)

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln(N)\right\}. \tag{2.3}$$

Тогда для формулы линейной интерполяции (2.1) *на сетке* (2.2), (2.3) *справедлива оценка погрешности*

$$|u(x) - u_L(x)| \le C\frac{\ln^2(N)}{N^2} \quad \text{при} \quad x \le \sigma \tag{2.4}$$

и

$$|u(x) - u_L(x)| \le \frac{C}{N^2} \quad при \quad x > \sigma. \tag{2.5}$$

Доказательство. Учитывая выражение (2.3), необходимо рассмотреть два случая для задания σ. Пусть

$$\frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln(N) < \frac{1}{2}.$$

Пусть $x > \sigma$, при этом $x \in \Delta_n$ и $x_{n-1} \ge \sigma$. Нетрудно убедиться в справедливости представления

$$u_L(x) - u(x) = \frac{1}{h_n}\int_x^{x_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\int_t^s u''(r)drdtds. \tag{2.6}$$

Учитывая оценку производных (1.1) в (2.6) и интегрируя, получаем

$$|u_L(x) - u(x)| \le \frac{1}{h_n}\int_x^{x_n}\left[\int_{x_{n-1}}^{s}\int_t^s|u''(r)|drdt + \int_s^{x_n}\int_s^t|u''(r)|drdt\right]ds \le$$

$$\le \frac{C_0}{h_n}\int_x^{x_n}\left[\int_{x_{n-1}}^{s}\int_t^s\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}r) + 1\right]drdt + \int_s^{x_n}\int_s^t\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}r) + 1\right]drdt\right]ds =$$

$$= \frac{C_0}{6h_n}[h_n^3 - (x - x_{n-1})^3 + (x_n - x)^3] +$$

$$+ \frac{C_0}{h_n}\int_x^{x_n}\left\{\frac{1}{\alpha^2}[\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1}) - 2\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}s) + \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_n)] + \frac{x_n - 2s + x_{n-1}}{\alpha\varepsilon}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}s)\right\}ds =$$

$$= \frac{C_0}{6h_n}[h_n^3 - (x - x_{n-1})^3 + (x_n - x)^3] + \frac{C_0}{\alpha^2 h_n}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1})G(x),$$

где

$$G(x) = (x_n - x) + \frac{4\varepsilon}{\alpha}\{\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}h_n) - \exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(x - x_{n-1})]\} +$$

$$+ (2x_n - x - x_{n-1})\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}h_n) + (x_n - 2x + x_{n-1})\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(x - x_{n-1})].$$

Оценим второе слагаемое в $G(x)$:

$$\frac{4\varepsilon}{\alpha}\left|\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}h_n) - \exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(x - x_{n-1})]\right| =$$

$$= \frac{4\varepsilon}{\alpha}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(x - x_{n-1})][1 - \exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(x_n - x)]] \le 4h_n\frac{\varepsilon}{\alpha h_n}[1 - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}h_n)] \le 4h_n.$$

Следовательно, $|G(x)| \le 8h_n$. Учитывая (2.3), получаем

$$|u_L(x) - u(x)| \le \frac{C_0}{3}h_n^2 + \frac{8C_0}{\alpha^2}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1}) \le \frac{C_0}{3}h_n^2 + \frac{8C_0}{\alpha^2}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}\sigma) \le \frac{C}{N^2},$$

где

$$C = \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{\alpha^2}\right)C_0.$$

Оценка (2.5) доказана.

Пусть теперь $x \le \sigma$. Тогда $x \in \Delta_n$ при $x_n \le \sigma$. В этом случае воспользуемся оценкой

$$|u_L(x) - u(x)| \le \frac{h_n^2}{8}\max_{s \in \Delta_n}|u''(s)|. \tag{2.7}$$

В соответствии с (1.1) имеем $|u''(s)| \le 2C_0/\varepsilon^2$. Учитывая значения σ из (2.3) и h_n из (2.2) и используя (2.7), получаем

$$|u_L(x) - u(x)| \le \frac{4C_0\ln^2 N}{\alpha^2 N^2} = C\frac{\ln^2 N}{N^2}, \quad C = \frac{4C_0}{\alpha^2},$$

что доказывает (2.4).

Остается рассмотреть случай

$$\frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln(N) \ge \frac{1}{2}.$$

В этом случае сетка Ω равномерна. Пусть $x < \sigma$. Используя оценки (2.7) и (1.1), получаем

$$|u_L(x) - u(x)| \le \frac{C_0}{4N^2\varepsilon^2} \le \frac{C_0\ln^2(N)}{\alpha^2 N^2} \le C\frac{\ln^2(N)}{N^2}.$$

Несложно показать, что в случае $x \ge \sigma$ справедлива оценка (2.5). Лемма доказана.

2.1. Интерполяция на модифицированной сетке

Рассмотрим модификацию сетки из [2], которая заключается в разбиении исходного интервала не на два, а на несколько подинтервалов, на каждом из которых шаги постоянны. В [4] предложена такого вида сетка для уменьшения логарифмического множителя от числа узлов в оценке погрешности разностной схемы. Применим такой подход при задании сетки для задачи интерполяции, для определенности рассмотрим случай трех подынтервалов. Зададим сетку Ω:

$$x_n = \begin{cases} n\tau_1, & 0 \le n \le N/3, \\ \sigma_1 + \left(n - \frac{N}{3}\right)\tau_2, & \frac{N}{3} \le n \le \frac{2N}{3}, \\ \sigma_2 + \left(n - \frac{2N}{3}\right)\tau_3, & \frac{2N}{3} \le n \le N, \end{cases} \tag{2.8}$$

где N кратно трем,

$$[0, 1] = [0, \sigma_1] \cup [\sigma_1, \sigma_2] \cup [\sigma_2, 1],$$
$$\sigma_1 = \min\left\{\frac{\sigma_2}{2}, \frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln(\ln N)\right\}, \quad \sigma_2 = \min\left\{\frac{2}{3}, \frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\}, \tag{2.9}$$

где τ_j – равномерный шаг j-го подынтервала. Оценим точность формулы линейной интерполяции (2.1) на сетке (2.8), (2.9).

Рассмотрим случай

$$\sigma_2 = \frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln N, \quad \sigma_1 = \frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln(\ln N). \tag{2.10}$$

Пусть $x \in [0, 1]$. Для некоторого n пусть $x \in \Delta_n$, и рассмотрим три случая для x_n.

1. Пусть $x_n \le \sigma_1$. Тогда с учетом оценки (1.1) при $j = 2$ из оценки (2.7) получим

$$|u_L(x) - u(x)| \le \frac{C_0\tau_1^2}{4\varepsilon^2} = \frac{9C_0\ln^2(\ln N)}{\alpha^2 N^2}.$$

2. Пусть $\sigma_1 < x_n \le \sigma_2$. В соответствии с (1.1), (2.7)–(2.10) имеем

$$|u_L(x) - u(x)| \le \frac{C_0\tau_2^2}{8} + \frac{C_0\tau_2^2}{8\varepsilon^2}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}\sigma_1) \le \frac{C_0}{2N^2} + \frac{9C_0(\sigma_2 - \sigma_1)^2}{8\varepsilon^2 N^2 \ln^2(N)} =$$

$$= \frac{C_0}{2N^2} + \frac{9C_0}{2\alpha^2 N^2}\left(1 - \frac{\ln(\ln(N))}{\ln(N)}\right)^2 \le \frac{C_0}{2N^2} + \frac{9C_0}{2\alpha^2 N^2}.$$

Итак, в данном случае получаем оценку

$$|u_L(x) - u(x)| \le \frac{C_0}{2N^2}\left(1 + \frac{9}{\alpha^2}\right).$$

3. Пусть $x_n \ge \sigma_2$. Заметим, что σ_2 соответствует соотношению (2.3), поэтому для погрешности формулы линейной интерполяции справедлива оценка (2.5).

Итак, оценена точность интерполяции в случае выполнения условий (2.10) на параметры σ_1 и σ_2.

Пусть

$$\sigma_2 = \frac{2}{3}, \quad \sigma_1 = \frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln(\ln N).$$

В случаях $x < \sigma_1$ и $x > \sigma_2$, повторяя рассуждения п. 1 и п. 3, получаем аналогичные оценки точности интерполяции. Пусть $x \in [\sigma_1, \sigma_2]$. Учитывая оценку (2.7) и ограничение $\varepsilon \ge \alpha/[3\ln(N)]$, получаем

$$|u_L(x) - u(x)| \le \frac{C_0\tau_2^2}{8} + \frac{C_0\tau_2^2}{8\varepsilon^2}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}\sigma_1) \le \frac{C_0\tau_2^2}{8} + \frac{9C_0}{8\alpha^2}\tau_2^2 \le \left(1 + \frac{9}{\alpha^2}\right)\frac{C_0}{2N^2}.$$

Случаи других значений σ_1 и σ_2 рассматриваются аналогично.

Таким образом, в случае модифицированной сетки (2.8), (2.9) имеем

$$|u_L(x) - u(x)| \le \begin{cases} C_3\ln^2(\ln N)/N^2, & x < \sigma_1, \\ C_3/N^2, & x \ge \sigma_1, \end{cases} \tag{2.11}$$

для некоторой постоянной C_3. Сравнив полученные оценки (2.11) с оценками (2.4), (2.5), можно заключить, что модификация сетки приводит к повышению точности интерполяции в пограничном слое.

3. КВАДРАТИЧЕСКИЙ СПЛАЙН

Рассмотрим вопрос повышения точности интерполяции за счет применения квадратического сплайна на сгущающейся в пограничном слое сетке. На каждом интервале Δ_n зададим многочлен второй степени:

$$w_n(x) = \frac{1}{h_n}\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h_n} - u'_{n-1}\right)(x - x_{n-1})^2 + u'_{n-1}(x - x_{n-1}) + u_{n-1}. \tag{3.1}$$

Определим квадратический сплайн $w(x) = \{w_n(x), x \in \Delta_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$.

Учитывая, что на каждом интервале Δ_n для $w(x)$ выполнены условия интерполяции

$$w(x_{n-1}) = u_{n-1}, \quad w'(x_{n-1}) = u'_{n-1}, \quad w(x_n) = u_n,$$

используя известный подход (см. [9, с. 42]), оцениваем погрешность кусочно-квадратической интерполяции

$$|w(x) - u(x)| \le \frac{1}{24}\max_{s \in \Delta_n}|u'''(s)|h_n^3, \quad x \in \Delta_n.$$

Учитывая в данной оценке ограничения на производные (1.1), получаем

$$|w(x)-u(x)| \le \frac{C_0 h_n^3}{24}\left(1+\frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1})\right), \quad x \in \Delta_n. \tag{3.2}$$

Для быстро растущей функции $u(x)$ может быть полезной оценка погрешности интерполяции в интегральной форме.

Лемма 2. *При всех $x \in \Delta_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$, справедлива оценка точности*

$$|w_n(x)-u(x)| \le \frac{1}{2}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}(s-x_{n-1})(x_n-s)|u'''(s)|ds. \tag{3.3}$$

Доказательство. Несложно доказать, что

$$F(x) = w_n(x)-u(x) = \frac{(x-x_{n-1})^2}{h_n^2}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}\int\limits_{x_{n-1}}^{s}u''(t)dtds - \int\limits_{x_{n-1}}^{x}\int\limits_{x_{n-1}}^{s}u''(t)dtds.$$

В соответствии с условием интерполяции имеем $F(x) = 0$ на концах интервала Δ_n, поэтому $F(x)$ имеет экстремумы внутри интервала Δ_n. Пусть $\bar{x}$ – точка экстремума, тогда $F'(\bar{x}) = 0$, поэтому

$$\frac{2(\bar{x}-x_{n-1})}{h_n^2}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}\int\limits_{x_{n-1}}^{s}u''(t)dtds = \int\limits_{x_{n-1}}^{\bar{x}}u''(t)dt.$$

Следовательно,

$$F(\bar{x}) = \frac{\bar{x}-x_{n-1}}{2}\int\limits_{x_{n-1}}^{\bar{x}}u''(t)dt - \int\limits_{x_{n-1}}^{\bar{x}}\int\limits_{x_{n-1}}^{s}u''(t)dtds.$$

Пусть

$$G(x) = \int\limits_{x_{n-1}}^{x}u''(t)dt.$$

Тогда имеем

$$F(\bar{x}) = \frac{\bar{x}-x_{n-1}}{2}G(\bar{x}) - \int\limits_{x_{n-1}}^{\bar{x}}G(s)ds.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$F(\bar{x}) = \frac{\bar{x}-x_{n-1}}{2}G(\bar{x}) - (\bar{x}-x_{n-1})G(\bar{x}) + \int\limits_{x_{n-1}}^{\bar{x}}(s-x_{n-1})G'(s)ds.$$

Следовательно, имеем

$$w_n(\bar{x})-u(\bar{x}) = -\frac{1}{2}\int\limits_{x_{n-1}}^{\bar{x}}(\bar{x}-2s+x_{n-1})u''(s)ds.$$

Интегрируя еще раз по частям и сводя полученное выражение к одному интегралу, получаем

$$w_n(\bar{x})-u(\bar{x}) = \frac{1}{2}\int\limits_{x_{n-1}}^{\bar{x}}(s-x_{n-1})(\bar{x}-s)u'''(s)ds,$$

откуда следует утверждение леммы.

Учитывая в (3.3) оценку (1.1) для $|u'''(s)|$, получаем

$$|w_n(x)-u(x)| \le \frac{C_0}{2}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}(s-x_{n-1})(x_n-s)\left[\frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}s)+1\right]ds.$$

Применяя дважды формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{gathered}|w_n(x)-u(x)| \le \frac{C_0}{2}\left[\frac{h_n^3}{6}+\frac{h_n}{\alpha^2\varepsilon}\{\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_n)+\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1})\}-\right.\\ \left.-\frac{2}{\alpha^3}\{\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1})-\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_n)\}\right].\end{gathered} \tag{3.4}$$

Оценку (3.4) можно записать в виде

$$|w_n(x)-u(x)| \le \frac{C_0}{2}\left[\frac{h_n^3}{6}+\frac{h_n}{\alpha^2\varepsilon}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1})G(s)\right], \quad s = \frac{\alpha h_n}{\varepsilon},$$

$$G(s) = \exp(-s)+1-\frac{2}{s}[1-\exp(-s)].$$

Учитывая, что при $s > 0$ функция $G(s)$ возрастающая, $0 \le G(s) \le 1$, получаем

$$|w_n(x)-u(x)| \le \frac{C_0}{12}h_n^3+\frac{C_0h_n}{2\alpha^2\varepsilon}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1}). \tag{3.5}$$

Итак, для квадратического сплайна $w(x)$ справедливы оценки погрешности (3.2) и (3.5) в случае функции $u(x)$ с оценками производных (1.1). Теперь оценим погрешность квадратического сплайна в зависимости от разностной сетки.

Пусть сетка Ω соответствует соотношению (2.2) и

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{r\varepsilon}{\alpha}\ln(N)\right\}, \quad r \ge 3. \tag{3.6}$$

Покажем, что при задании σ согласно (3.6) справедливы следующие оценки погрешности квадратической интерполяции при $x \in \Delta_n$ в зависимости от n:

$$|w_n(x)-u(x)| \le \begin{cases}\dfrac{2C_0r^3\ln^3N}{3\alpha^3N^3}, & x_{n-1} < \sigma,\\[2mm] \left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{\alpha^2\varepsilon N^{r-2}}\right)\dfrac{C_0}{N^3}, & x_{n-1} = \sigma,\\[2mm] \left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2\alpha^3}\right)\dfrac{C_0}{N^3}, & x_{n-1} > \sigma.\end{cases} \tag{3.7}$$

Вывод первой оценки в (3.7) основан на использовании формул (3.2) и (3.6). Остановимся на выводе последней оценки в (3.7). В соответствии с сеткой (2.2) и условием $x_{n-1} > \sigma$ имеем

$$x_{n-1} \ge \sigma + h_{n-1}, \quad h_{n-1} = h_n = H.$$

Учитывая (3.5), получаем

$$|w_n(x) - u(x)| \le \frac{C_0}{12}h_n^3 + \frac{C_0 h_n}{2\alpha^2\varepsilon}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(\sigma + h_{n-1})] = \frac{C_0}{12}h_n^3 + \frac{C_0}{2\alpha^3}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}\sigma)s\exp(-s),$$

$$s = \frac{\alpha h_n}{\varepsilon}.$$

Учитывая, что $s\exp(-s) \le e^{-1}$, имеем

$$|w_n(x) - u(x)| \le \frac{C}{N^3}, \quad C = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2\alpha^3}\right)C_0.$$

Это доказывает последнюю оценку в (3.7). Вторая оценка в (3.7) обосновывается аналогично.

Остановимся на случае сетки (2.2) при задании

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, -\frac{3\varepsilon}{\alpha}\ln(\varepsilon)\right\}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{3.8}$$

Используя оценку (3.2), рассматривая два случая на значение σ из (3.8), можно показать, что справедлива оценка

$$|w_n(x) - u(x)| \le \begin{cases} \dfrac{18C_0}{\alpha^3}|\ln(\varepsilon)|^3/N^3, & x_n \le \sigma, \\ \dfrac{2}{3}C_0/N^3, & x_n > \sigma. \end{cases} \tag{3.9}$$

3.1. Уменьшение погрешности интерполяции

Зависимость погрешности от параметра ε можно уменьшить, если интервал [0, 1] разбить на большее число, чем на два подинтервала с равномерными шагами. Пусть N кратно числу k, $N = kM$, интервал [0, 1] разбит на k подынтервалов

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_{k-1} < 1,$$

где для $1 \le j \le k - 1$ имеем

$$\sigma_j = \frac{3\varepsilon}{\alpha}\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k-j}\frac{1}{\varepsilon}.$$

Определим равномерные шаги на каждом подынтервале:

$$\tau_1 = \sigma_1/M, \quad \tau_j = (\sigma_j - \sigma_{j-1})/M, \quad 2 \le j \le k-1, \quad \tau_k = (1 - \sigma_{k-1})/M.$$

Оценим погрешность интерполяции на заданной таким образом сетке Ω_1.

Пусть $x < \sigma_1$. В соответствии с оценкой (3.2) имеем

$$|w(x) - u(x)| \le \frac{C_0\tau_1^3}{12\varepsilon^3} = \frac{9k^3C_0}{4\alpha^3N^3}(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k-1}(\varepsilon^{-1}))^3.$$

Пусть $\sigma_j \le x \le \sigma_{j+1}$, $1 \le j \le k - 2$. В соответствии с (3.2) получаем

$$|w(x) - u(x)| \le \frac{C_0\tau_{j+1}^3}{24} + \frac{C_0\tau_{j+1}^3}{24\varepsilon^3}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}\sigma_j) =$$

$$= \frac{C_0\tau_{j+1}^3}{24} + \frac{27C_0}{24\alpha^3M^3}\left(1 - \frac{\sigma_j}{\sigma_{j+1}}\right)^3 \le \frac{C_0}{24M^3}\left(1 + \frac{27}{\alpha^3}\right) = \frac{C_1k^3}{N^3}.$$

Остается рассмотреть случай $x > \sigma_{k-1}$. Тогда в соответствии с (3.2) имеем

$$|w(x) - u(x)| \le \frac{C_0 k^3}{12N^3}.$$

Итак, в случае сетки Ω_1 для всех $x \ge \sigma_1$ погрешность кусочно-квадратической интерполяции порядка $O(N^{-3})$, для $x < \sigma_1$ выполняется оценка

$$|w(x) - u(x)| \le C_2(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k-1}(\varepsilon^{-1}))^3 N^{-3}, \quad C_2 = \frac{9k^3 C_0}{4\alpha^3}.$$

3.2. Приближение производной

Для использования интерполяционной формулы (3.1) необходимо знать производные u'_{n-1}, которые можно приближенно вычислить на основе формул численного дифференцирования, если известны значения $\{u_n\}$ в узлах сетки. Функция $w_n(x)$ из (3.1) устойчива к возмущению u'_{n-1}: если $\tilde{w}_n(x)$ соответствует замене u'_{n-1} на $\tilde{u}'_{n-1}$, то

$$|w_n(x) - \tilde{w}_n(x)| \le |u'_{n-1} - \tilde{u}'_{n-1}|\frac{h_n}{4}. \tag{3.10}$$

Следовательно, если найти производные $\{u'_{n-1}\}$ с необходимой точностью, то это не увеличит порядок погрешности формулы (3.1).

Рассмотрим это подробнее в случае сетки (2.2). Перейдем от (3.1) к интерполяционной формуле

$$\tilde{w}_n(x) = \frac{1}{h_n}\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h_n} - \tilde{u}'_{n-1}\right)(x - x_{n-1})^2 + \tilde{u}'_{n-1}(x - x_{n-1}) + u_{n-1}, \quad 1 \le n \le N, \tag{3.11}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{u}'_0 = \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h}, \quad \tilde{u}'_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}, \quad 1 \le n < \frac{N}{2},\\ \tilde{u}'_n = \frac{-3u_n + 4u_{n+1} - u_{n+2}}{2H}, \quad n = \frac{N}{2},\\ \tilde{u}'_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2H}, \quad \frac{N}{2} < n < N.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Мы учли, что в случае сетки Ω из (2.2) имеем

$$h_n = \begin{cases} h, & n \le N/2, \\ H, & n > N/2. \end{cases}$$

Определим $\tilde{w}(x) = \{\tilde{w}_n(x), x \in \Delta_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$.

Лемма 3. *Пусть* σ *соответствует условию* (3.8). *Тогда для некоторых постоянных* C_1, C_2 *справедливы оценки*

$$|\tilde{w}(x) - w(x)| \le C_1\frac{|\ln^3(\varepsilon)|}{N^3} \quad \text{при} \quad x \le \sigma \tag{3.13}$$

и

$$|\tilde{w}(x) - w(x)| \le C_2/N^3 \quad \text{при} \quad x \ge \sigma. \tag{3.14}$$

Доказательство. Пусть $\sigma < 1/2$. Рассмотрим случай $x \le \sigma$. Тогда имеем $x \in \Delta_n$, $n \le N/2$. Разложением в ряд Тейлора несложно убедиться, что имеют место оценки

$$\left|u'(0) - \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h}\right| \le h^2 \max_{0 \le s \le 2h} |u'''(s)|,$$

$$\left|u'_n - \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}\right| \le \frac{h^2}{6} \max_{s \in [x_{n-1}, x_{n+1}]} |u'''(s)|.$$

Учитывая оценки производных (1.1) и формулу на шаг h сетки Ω, получаем, что при всех $1 \le n \le N/2$ выполняется оценка

$$|u'_{n-1} - \tilde{u}'_{n-1}| \le C_3 \frac{\ln^2(\varepsilon)}{N^2 \varepsilon}, \quad C_3 = \frac{72 C_0}{\alpha^2}. \tag{3.15}$$

Учитывая неравенство (3.15) в (3.10), получаем требуемую оценку (3.13) при $C_1 = 3C_3/(2\alpha)$.

Пусть теперь $x \ge \sigma$. Тогда $x \in \Delta_n$, $n > N/2$. Случаи $n = N/2 + 1$ и $n > N/2 + 1$ рассматриваются аналогичным образом, поэтому пусть $n = N/2 + 1$. Тогда имеем

$$\left|u'(\sigma) - \frac{-3u(\sigma) + 4u(\sigma + H) - u(\sigma + 2H)}{2H}\right| \le H^2 \max_{\sigma \le s \le \sigma + 2H} |u'''(s)| \le 2C_0 H^2.$$

Учитывая (3.10), получаем оценку (3.14) при $C_2 = 4C_0$.

Случай $\sigma = 1/2$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

При задании σ в соответствии с (3.6) разностная аппроксимация производных в интерполянте (3.1) также не ухудшает точность интерполяции по порядку.

Значения $\{u_n\}$ для функции $u(x)$ могут быть заданы с некоторой погрешностью, например на основе численного решения краевой задачи (1.2). Используя формулы (3.11), (3.12), можно показать, что если при всех n справедливо неравенство $|u_n - \tilde{u}_n| \le \delta$, то при всех n и x имеем $|\tilde{w}_n(x) - \tilde{w}_n(x, \delta)| \le 11\delta$, где $\tilde{w}_n(x, \delta)$ соответствует соотношению (3.11) в случае возмущенных значений $\tilde{u}_n$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Проведем сравнительный анализ рассмотренных методов интерполяции на примере функции

$$u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x) + \sin(x).$$

В табл. 1 приведены значения погрешности δ_N метода кусочно-линейной интерполяции (2.1), где

$$\delta_N = \max_n |u(\tilde{x}_n) - u_L(\tilde{x}_n)|, \quad \tilde{x}_n = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

в зависимости от ε и N в случае равномерной сетки. Погрешность значительна при $\varepsilon \le h$.

Таблица 1

ε	N				
	10	10^2	10^3	10^4	10^5
1	0.11×10^{-2}	0.12×10^{-4}	0.13×10^{-6}	0.13×10^{-8}	0.13×10^{-10}
10^{-1}	0.77×10^{-1}	0.12×10^{-2}	0.12×10^{-4}	0.13×10^{-6}	0.13×10^{-8}
10^{-2}	0.49	0.77×10^{-1}	0.12×10^{-2}	0.12×10^{-4}	0.13×10^{-6}
10^{-3}	0.50	0.49	0.77×10^{-1}	0.12×10^{-2}	0.12×10^{-4}
10^{-4}	0.50	0.50	0.49	0.77×10^{-1}	0.12×10^{-2}
10^{-5}	0.50	0.50	0.50	0.49	0.77×10^{-1}

Таблица 2

ε	N				
	10	10^2	10^3	10^4	10^5
1	0.11×10^{-2}	0.12×10^{-4}	0.13×10^{-6}	0.13×10^{-8}	0.13×10^{-10}
10^{-1}	0.68×10^{-1}	0.12×10^{-2}	0.12×10^{-4}	0.13×10^{-6}	0.13×10^{-8}
10^{-2}	0.68×10^{-1}	0.39×10^{-2}	0.94×10^{-4}	0.17×10^{-5}	0.27×10^{-7}
10^{-3}	0.68×10^{-1}	0.39×10^{-2}	0.94×10^{-4}	0.17×10^{-5}	0.27×10^{-7}
δ_N/δ_{10N}	17.6	41.1	55.6	63.9	
$\phi(N)$	25.0	44.4	56.3	64.0	

Таблица 3

ε	N				
	10	10^2	10^3	10^4	10^5
1	0.13	0.10×10^{-1}	0.25×10^{-3}	0.45×10^{-5}	0.71×10^{-7}
10^{-1}	0.91×10^{-1}	0.15×10^{-2}	0.15×10^{-4}	0.15×10^{-6}	0.17×10^{-8}
10^{-2}	0.27×10^{-1}	0.12×10^{-2}	0.20×10^{-4}	0.27×10^{-6}	0.33×10^{-8}
10^{-3}	0.27×10^{-1}	0.12×10^{-2}	0.20×10^{-4}	0.27×10^{-6}	0.33×10^{-8}

Таблица 4

ε	N				
	10	10^2	10^3	10^4	10^5
1	0.12×10^{-3}	0.12×10^{-6}	0.13×10^{-9}	0.13×10^{-12}	0.44×10^{-15}
10^{-1}	0.28×10^{-1}	0.57×10^{-4}	0.62×10^{-7}	0.63×10^{-10}	0.63×10^{-13}
10^{-2}	0.54×10^{-1}	0.10×10^{-2}	0.43×10^{-5}	0.11×10^{-7}	0.21×10^{-10}
10^{-3}	0.54×10^{-1}	0.10×10^{-2}	0.43×10^{-5}	0.11×10^{-7}	0.21×10^{-10}
δ_N/δ_{10N}	52	242	409	510	
$\psi(N)$	125	296	422	512	

В табл. 2 приведена погрешность δ_N кусочно-линейной интерполяции в зависимости от ε и N в случае неравномерной сетки (2.2), (2.3). В последней строке табл. 2 приведено значение функции $\phi(N) = 100\ln^2(N)/\ln^2(10N)$. Анализ последних двух строк табл. 2 подтверждает оценку (2.4) погрешности кусочно-линейной интерполяции.

В табл. 3 приведена погрешность δ_N метода кусочно-линейной интерполяции в случае модифицированной сетки (2.8), (2.9).

Теперь исследуем точность кусочно-квадратической интерполяции на сгущающейся сетке. В табл. 4 приведена погрешность $\delta_N = \max\limits_n|u(\tilde{x}_n) - \tilde{w}(\tilde{x}_n)|$ в случае квадратического сплайна (3.11), (3.12) на сетке (2.2) с заданием σ в соответствии с (3.6), $r = 3$. Преимущество в точности квадратической интерполяции существенно в сравнении с линейной интерполяцией на аналогичной сетке. В последней строке табл. 4 приведено значение функции $\psi(N) = (10\ln(N)/\ln(10N))^3$. Анализ последних двух строк табл. 4 подтверждает оценку точности

$$|\tilde{w}(x) - u(x)| \le C\ln^3 N/(N^3).$$

В [7] показано преимущество в точности кусочно-линейной интерполяции на сгущающейся в пограничном слое сетке (2.2) в сравнении с использованием равномерной сетки. В качестве интерполируемой функции бралось решение дифференциальной задачи вида (1.2), которое в узлах сетки находилось на основе применения равномерно сходящейся разностной схемы. Заметим, что при таком сравнении на погрешность интерполяции накладывается погрешность разностной схемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841–890.
2. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
3. *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Singapore: World Scientific, 1996.
4. *Vulanovic R.* A priori meshes for singularly perturbed quasilinear two-point boundary value problems // IMA J. Numer. Analys. 2001. V. 21. № 1. P. 349–366.
5. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
6. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.
7. *Задорин А.И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сибирский журнал вычисл. матем. 2007. Т. 10. № 3. С. 267–275.
8. *Kellogg R.B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points // Math. Comput. 1978. V. 32. № 144. P. 1025–1039.
9. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.