S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 927–936 (2017) УДК 519.644.7
DOI 10.17377/semi.2017.14.078 MSC 65D32

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

А.И. ЗАДОРИН

Abstract. There are constructed and investigated the cubature formulas in the rectangular domain to compute the integral from a function of two variables with large gradients in boundary layers. It is assumed that the function have two components with large gradients which are known up to the multiplier. This components responsible for growth of function in boundary layers. Research is relevant, because the application of cubature formulas based on Lagrangian interpolation in the presence of large gradients leads to significant errors. Cubature formula with a given number of nodes in each direction is constructed. Formula is exact for selected components. It is proved that the error estimates of constructed formulas don't depend on large gradients of function in boundary layers.

Keywords: two-variable function, boundary layer, double integral, nonpolynomial interpolation, cubature rule, error estimate.

1. Введение

Построение квадратурных формул Ньютона-Котеса основано на приближении интегрируемой функции многочленом Лагранжа. Наличие особенностей у интегрируемой функции, как известно [1], требует применения различных приемов, таких как выделение весового множителя, сгущение сетки и других для обеспечения заданной точности квадратурных формул.

Zadorin, A.I., Cubature formulas for two-variable functions with large gradients in the boundary layers.

Работа частично поддержана РФФИ (гранты 15-01-06584, 16-01-00727).

Поступила 15 июня 2017 г., опубликована 15 сентября 2017 г.

Представляет интерес исследование квадратурных и кубатурных формул для функций, имеющих большие градиенты в пограничных слоях. В [2] рассмотрен вопрос численного интегрирования функции одной переменной с быстро растущей погранслойной составляющей. Предполагается, что погранслойная составляющая выделена аддитивно с точностью до множителя. В частности, такое представление справедливо для решения сингулярно возмущенных краевых задач [3], [4].

В [2] в качестве примера рассмотрен случай, когда погранслойная составляющая соответствует экспоненциальному пограничному слою и имеет вид $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon},\ x \in [0,1], \varepsilon > 0$. При $\varepsilon = 1$ погрешность составной формулы Симпсона порядка $O(h^4)$, однако показано, что с уменьшением параметра ε погрешность повышается до величины порядка $O(h)$. Таким образом, вопрос разработки квадратурных и кубатурных формул для функций с большими градиентами в пограничном слое является актуальным.

В [2] предложено строить квадратурные формулы, точные на выделенной с точностью до множителя погранслойной составляющей, и таким образом построены аналоги формул трапеций и Симпсона Получены оценки погрешности построенных квадратурных формул, равномерные по погранслойной составляющей и ее производным. В случае погранслойной составляющей экспоненциального вида эти оценки не зависят от параметра ε. В [5] аналогичным образом построена и обоснована квадратурная формула с четырьмя узлами, а в [6] – с пятью узлами.

В [7] предложенный подход к построению квадратурных формул распространен на случай кубатурных формул, когда интегрируемая функция двух переменных, рассматриваемая в прямоугольной области, содержит погранслойную составляющую по каждой переменной. Построены и обоснованы аналоги кубатурных формул трапеций и Симпсона. Формулы построены так, чтобы они были точными на обеих выделенных погранслойных составляющих.

В данной работе для численного интегрирования функций двух переменных с погранслойными составляющими предлагается применить подход работы [7] и построить кубатурные формулы в прямоугольной области с произвольно заданным числом узлов в каждом направлении.

Под C и C_j будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от погранслойных составляющих $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$ и их производных, а так же от шагов сетки. В случае экспоненциального пограничного слоя [4] это соответствует тому, что C и C_j не зависят от значений малого параметра ε и шагов сетки.

2. Построение кубатурной формулы

Рассмотрим вопрос построения кубатурной формулы для интеграла:

$$I(u) = \int_c^d \int_a^b u(x,y)\,dx\,dy \tag{1.1}$$

в случае функции $u(x,y)$, имеющей представление:

$$u(x,y) = p(x,y) + d_1(y)\Phi(x) + d_2(x)\Theta(y) + d_3\Phi(x)\Theta(y), \tag{1.2}$$

где функции $p(x, y)$, $d_1(y), d_2(x)$ имеют ограниченные производные по своим аргументам до заданного ниже порядка, эти функции и постоянная d_3 не заданы. Функции $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ известны, достаточно гладкие, но их производные не являются равномерно ограниченными, эти функции отвечают за большие градиенты интегрируемой функции в пограничных слоях.

Остановимся на примере функции вида (1.2).

Пусть $u(x, y)$ – решение эллиптической задачи:

$$\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a_1(x)u_x + a_2(y)u_y - a_3(x, y)u = f(x, y),\ (x, y) \in (0, 1)^2,$$

$$u(x, y) = g(x, y),\ (x, y) \in \Gamma, \tag{1.3}$$

где Γ – граница области, функции a_1, a_2, a_3, f, g - достаточно гладкие,

$$a_1(x) \geq \alpha > 0, \quad a_2(y) \geq \beta > 0, \quad a_3(x, y) \geq 0,\ \varepsilon > 0.$$

Известно [3], [8], что функция $u(x, y)$ имеет экспоненциальные пограничные слои у границ $x = 0$ и $y = 0$ и представима в виде (1.2) при задании

$$\Phi(x) = \exp(-a_1(0)\varepsilon^{-1}x),\ \Theta(y) = \exp(-a_2(0)\varepsilon^{-1}y). \tag{1.4}$$

Производные функций (1.4) не являются равномерно оганиченными по параметру $\varepsilon \in (0, 1]$.

Интерполяционная формула. Для построения кубатурной формулы используем построенную нами ранее двумерную интерполяционную формулу с заданным числом узлов интерполяции в каждом направлении, точную на погранслойных составляющих интерполируемой функции [9]. Предполагаем, что формула содержит k_1 узлов интерполяции по x и k_2 узлов по y.

Зададим сетку $\Omega^h = \Omega_x^{h_1} \times \Omega_y^{h_2}$ в исходной области $\bar{\Omega} = [a, b] \times [c, d]$:

$$\Omega_x^{h_1} = \{x_i : x_i = a + (i - 1)h_1, i = 1, 2, \ldots, k_1\},\ h_1 = (b - a)/(k_1 - 1),$$

$$\Omega_y^{h_2} = \{y_j : y_j = c + (j - 1)h_2, j = 1, 2, \ldots, k_2\},\ h_2 = (d - c)/(k_2 - 1).$$

Остановимся на интерполяционной формуле из [9]. Сначала при заданном значении y зададим интерполяцию по x [10]:

$$L_x u(x, y) = L_{k_1} u(x, y) + \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}]u(x, y)}{[x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}]\Phi(x)}\Big[\Phi(x) - L_{k_1}\Phi(x)\Big], \tag{1.5}$$

где

$L_{k_1}u(x, y)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа по x при заданном значении y для функции $u(x, y)$ с узлами интерполяции $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$,

$[x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}]u(x, y)$ – разделенная разность для функции $u(x, y)$ с узлами $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$ при заданном значении y.

Несложно убедиться, что формула (1.5) является интерполяционной и точной на многочленах $P_{k_1-2}(x)$ степени (k_1-2) и на погранслойной составляющей $\Phi(x)$.

По аналогии с (1.5) зададим интерполяционную формулу по y при заданном значении x

$$L_y u(x, y) = L_{k_2} u(x, y) + \frac{[y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}]u(x, y)}{[y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}]\Theta(y)}\Big[\Theta(y) - L_{k_2}\Theta(y)\Big]. \tag{1.6}$$

Используя (1.6), после интерполяции по x осуществляем интерполяцию по y :

$$L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}u(x,y) = L_{k_2}L_x u(x,y) + \frac{[y_1,y_2,\ldots,y_{k_2}]L_x u(x,y)}{[y_1,y_2,\ldots,y_{k_2}]\Theta(y)}\Big[\Theta(y) - L_{k_2}\Theta(y)\Big]. \tag{1.7}$$

Итак, построена двумерная интерполяционная формула (1.7).

Интерполяционную формулу (1.7), с учетом (1.5), можно записать в виде:

$$L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}u(x,y) = L_{k_2}L_{k_1}u(x,y) + \frac{\Phi(x) - L_{k_1}\Phi(x)}{[x_1,\ldots,x_{k_1}]\Phi(x)}L_{k_2}([x_1,,\ldots,x_{k_1}]u(x,y)) +$$

$$\frac{\Theta(y) - L_{k_2}\Theta(y)}{[y_1,\ldots,y_{k_2}]\Theta(y)}L_{k_1}([y_1,\ldots,y_{k_2}]u(x,y)) +$$

$$\frac{\Theta(y) - L_{k_2}\Theta(y)}{[y_1,\ldots,y_{k_2}]\Theta(y)}\frac{\Phi(x) - L_{k_1}\Phi(x)}{[x_1,\ldots,x_{k_1}]\Phi(x)}[y_1,\ldots,y_{k_2}]([x_1,\ldots,x_{k_1}]u(x,y)). \tag{1.8}$$

Формула (1.8) задана корректно, если знаменатели в (1.8) не обращаются в нуль. В соответствии с [1, с. 45], для некоторого $s \in (a,b)$

$$[x_1,x_2,\ldots,x_{k_1}]\Phi = \Phi^{(k_1-1)}(s)/(k-1)!. \tag{1.9}$$

В соответствии с (1.9) формула (1.8) задана корректно, если

$$\Phi^{(k_1-1)}(x) \neq 0, x \in (a,b),\ \Theta^{(k_2-1)}(y) \neq 0, y \in (c,d). \tag{1.10}$$

Пусть $r(x)$ и $s(y)$ - две ограниченные функции. Несложно убедиться в справедливости соотношения:

$$L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(r(x)s(y)) = L_x r(x) \times L_y s(y). \tag{1.11}$$

Несложно проверить, что интерполяционная формула (1.8) является точной на функциях:

$$x^i, x^i\Theta(y),\ i = 0,1,\ldots,k_1-2,\ y^j, y^j\Phi(x), j = 0,1,\ldots,k_2-2,\ \Phi(x)\Theta(y). \tag{1.12}$$

Построение кубатурной формулы. Кубатурную формулу строим на основе приближения функции $u(x,y)$ в (1.1) интерполянтом (1.8).

Итак, на основе (1.8) строим кубатурную формулу:

$$S_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u) = \int_c^d\int_a^b L_y L_x u(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\int_a^b L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}u(x,y)\,dx\,dy. \tag{1.13}$$

Кубатурная формула (1.13) после вычисления интеграла от интерполянта может быть записана в виде:

$$S_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u) = \sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} D_{i,j}u(x_i,y_j). \tag{1.14}$$

Заметим, что кубатурная формула, основанная на интерполяции многочленом Лагранжа, может быть построена на основе вычисления интеграла:

$$S_{k_1,k_2}(u) = \int_c^d\int_a^b L_{k_2}L_{k_1}u(x,y)\,dx\,dy.$$

Перейдем к оценке погрешности построенной кубатурной формулы (1.13). Воспользуемся полученной в [9] оценкой погрешности интерполяционной формулы (1.8) в соответствии со следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть функция $u(x,y)$ имеет представление (1.2) и выполнены условия (1.10). Тогда для некоторой постоянной C справедлива оценка погрешности:*

$$|u(x,y) - L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}u(x,y)| \leq$$
$$C\Big(1 + \max_x |M_{k_1}(\Phi,x)|\Big)\Big(1 + \max_y |M_{k_2}(\Theta,y)|\Big)\Big[h_1^{k_1-1} + h_2^{k_2-1}\Big], \tag{1.15}$$

где $(x,y) \in \bar{\Omega}$,

$$M_{k_1}(\Phi,x) = \frac{\Phi(x) - L_{k_1-1}\Phi(x)}{\Phi(b) - L_{k_1-1}\Phi(b)},\ M_{k_2}(\Theta,y) = \frac{\Theta(y) - L_{k_2-1}\Theta(y)}{\Theta(d) - L_{k_2-1}\Theta(d)}. \tag{1.16}$$

На основе леммы 1, несложно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть функция $u(x,y)$ имеет представление (1.2) и выполнены условия (1.10). Тогда для некоторой постоянной C справедлива оценка погрешности кубатурной формулы (1.13):*

$$|I(u) - S_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u)| \leq$$
$$C(b-a)(d-c)\Big(1+\max_x |M_{k_1}(\Phi,x)|\Big)\Big(1+\max_y |M_{k_2}(\Theta,y)|\Big)\Big[h_1^{k_1-1}+h_2^{k_2-1}\Big]. \tag{1.17}$$

Лемма 3. *Пусть*

$$\Phi^{(k_1-1)}(x) > 0,\ \Phi^{(k_1)}(x) \geq 0 \quad \textit{или} \quad \Phi^{(k_1-1)}(x) < 0,\ \Phi^{(k_1)}(x) \leq 0, \quad x \in (a,b),$$
$$\Theta^{(k_2-1)}(y) > 0,\ \Theta^{(k_2)}(y) \geq 0 \quad \textit{или}$$
$$\Theta^{(k_2-1)}(y) < 0,\ \Theta^{(k_2)}(y) \leq 0, \quad y \in (c,d). \tag{1.18}$$

Тогда справедлива оценка погрешности кубатурной формулы (1.13)

$$|I(u) - S_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u)| \leq 4C(b-a)(d-c)\Big[h_1^{k_1-1} + h_2^{k_2-1}\Big], \tag{1.19}$$

где постоянная C такая же, как в леммах 1,2.

Доказательство. В соответствии с [11] при выполнении условий (1.18) справедливы оценки:

$$|M_{k_1}(\Phi,x)| \leq 1,\ x \in [a,b], \quad |M_{k_2}(\Theta,y)| \leq 1,\ y \in [c,d]. \tag{1.20}$$

Применяя оценки (1.20) в неравенстве (1.17), получаем требуемую оценку (1.19). □

Замечание 1. Условия (1.18) выполнены, если составляющие $\Phi(x), \Theta(y)$ соответствуют экспоненциальным пограничным слоям у границ $x = 1, y = 1$ для решения задачи (1.3), когда $a_1(x) < 0$ и $a_2(y) < 0$, $\bar{\Omega} = [0,1]^2$. При этом $\Phi(x) = e^{-a_1(1)(x-1)}, \Theta(y) = e^{-a_2(1)(y-1)}$. Если пограничные слои находятся у границ $x = 0, y = 0$, то $\Phi(x), \Theta(y)$ соответствуют (1.4), при этом условия (1.18) не выполнены.

Покажем, что при $k_1, k_2 = 2,3,4,5$ от условий (1.18) на $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$ можно перейти к менее ограничительным условиям (1.10) при обосновании оценки погрешности вида (1.19) для кубатурной формулы.

В [2, 5, 6] исследован вопрос построения квадратурных формул $S_{\Phi,k_1}(u)$ для функций вида $u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x)$ с числом узлов $k_1 = 2, 3, 4, 5$. Формулы построены так, чтобы они были точными на $\Phi(x)$. В этих работах доказано, что если для погранслойной составляющей $\Phi(x)$ справедливо условие $\Phi^{(k_1-1)}(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$, то

$$\Big|\int\limits_a^b u(x)\,dx - S_{\Phi,k_1}(u)\Big| \le C_1(b-a)h_1^{k_1-1},\ h_1(k_1-1) = b-a. \tag{1.21}$$

На основе оценки (1.21) для квадратурной формулы получим оценку погрешности кубатурной формулы (1.13).

Лемма 4. *Пусть функция $u(x, y)$ имеет представление (1.2), причем для погранслойных составляющих выполнены условия (1.10). Тогда при всех (k_1, k_2), таких, что $k_1 \in \{2, 3, 4, 5\}$ и $k_2 \in \{2, 3, 4, 5\}$ для некоторой постоянной C_2 справедлива оценка погрешности*

$$|I(u) - S_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u)| \le C_2(b-a)(d-c)\Big[h_1^{k_1-1} + h_2^{k_2-1}\Big]. \tag{1.22}$$

Доказательство. Распишем двойной интеграл через повторные:

$$\int\limits_c^d\int\limits_a^b u(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d F(y)\,dy, \tag{1.23}$$

где

$$F(y) = \int\limits_a^b u(x, y)\,dx.$$

Функцию $u(x, y)$ приближаем интерполянтом $L_x u(x, y)$, точным на $\Phi(x)$, и в соответствии с оценкой (1.21) получаем

$$F(y) = \sum_{j=1}^{k_1} D_j u(x_j, y) + O((b-a)h_1^{k_1-1}). \tag{1.24}$$

Мы подразумеваем, что в (1.24) $\beta = O(h_1^{k_1-1})$, если для некоторой постоянной C, не зависящей от погранслойных составляющих $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ и их производных, выполняется неравенство $|\beta| \le Ch_1^{k_1-1}$. В (1.24) D_j - коэфициенты квадратурной формулы с k_1 узлами, точной на составляющей $\Phi(x)$.

С учетом (1.24) имеем

$$\int\limits_c^d\int\limits_a^b u(x, y)\,dx\,dy = \sum_{j=1}^{k_1} D_j \int\limits_c^d u(x_j, y)\,dy + (d-c)(b-a)O(h_1^{k_1-1}). \tag{1.25}$$

В (1.25) для вычисления интегралов подынтегральную функцию приближаем интерполянтом $L_y u(x_j, y)$ и получаем квадратурные формулы, точные на составляющей $\Theta(y)$ и, учитывая оценку вида (1.21) в случае интегрирования по y и представление (1.13) для $S_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u)$, получаем:

$$\int\limits_c^d\int\limits_a^b u(x, y)\,dx\,dy = S_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u) + \sum_{j=1}^{k_1} D_j \times (d-c)O(h_2^{k_2-1}) + (d-c)(b-a)O(h_1^{k_1-1}). \tag{1.26}$$

В соответствии с [2, 5, 6] для построенных квадратурных формул, точных на $\Phi(x)$, справедливо $\sum\limits_{j=1}^{k_1} D_j = b-a$. При $k_1 = 2,3,4$ коэффициенты D_j положительны, при $k_1 = 5$ один коэффициент может быть отрицательным, при этом $\sum\limits_{j=1}^{5} |D_j| < 11h_1 = 11(b-a)/4$. Теперь из (1.26) получаем оценку (1.22). Лемма доказана. □

Замечание 2. Интерполяционная формула (1.8) точна на функциях (1.12), поэтому построенная на ее основе кубатурная формула (1.13) является точной на этих функциях.

3. Составная кубатурная формула

С целью повышения точности для вычисления интегралов применяются составные квадратурные и кубатурные формулы. Пусть Ω^h – равномерная сетка области $[a,b]\times[c,d]$ с узлами (x_i, y_j), $i = 0,1,\ldots,N_1$, $j = 0,1,\ldots,N_2$ и шагами $\tilde{h}_1 = (b-a)/N_1$ и $\tilde{h}_2 = (d-c)/N_2$. Пусть сетка Ω^h разбита на непересекающиеся ячейки с k_1 узлами по x и k_2 узлами по y,

$$K^h_{i,j} = [x_i, x_{i+k_1-1}] \times [y_j, y_{j+k_2-1}]. \qquad (3.1).$$

Тогда интеграл (1.1) можно записать в виде:

$$I(u) = \int\limits_c^d \int\limits_a^b u(x,y)\,dx\,dy = \sum_{j=0,k_2-1}^{N_2-k_2+1} \sum_{i=0,k_1-1}^{N_1-k_1+1} I_{i,j}(u), \qquad (3.2)$$

где

$$I_{i,j}(u) = \int\limits_{y_j}^{y_{j+k_2-1}} \int\limits_{x_i}^{x_{i+k_1-1}} u(x,y)\,dx\,dy. \qquad (3.3)$$

Выпишем кубатурную формулу (1.13) применительно к ячейке $K^h_{i,j}$

$$S^{i,j}_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u) = \int\limits_{y_j}^{y_{j+k_2-1}} \int\limits_{x_i}^{x_{i+k_1-1}} L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2} u(x,y)\,dx\,dy.$$

В соответствии с (1.22) при выполнении условий лемм 3 или 4 справедлива оценка

$$\Big| I_{i,j}(u) - S^{i,j}_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u) \Big| \le C_2 (x_{i+k_1-1} - x_i)(y_{j+k_2-1} - y_j) \Big[\tilde{h}_1^{k_1-1} + \tilde{h}_2^{k_2-1} \Big]. \qquad (3.4)$$

Учитывая, что ячейки $K^h_{i,j}$ покрывают всю исходную область, из (3.4) получаем оценку погрешности составной кубатурной формулы

$$\Big| I(u) - \sum_{i=0,k_1-1}^{N_1-k_1+1} \sum_{j=0,k_2-1}^{N_2-k_2+1} S^{i,j}_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u) \Big| \le C_2 (b-a)(d-c) \Big[\tilde{h}_1^{k_1-1} + \tilde{h}_2^{k_2-1} \Big]. \qquad (3.5)$$

В соответствии с леммами 3, 4 оценка погрешности (3.5) имеет место, если выполнены ограничения (1.18) или ограничения (1.10) в случае $2 \le k_1, k_2 \le 5$ в ячейках, для которых строятся кубатурные формулы, т.е. когда $x \in (x_i, x_{i+k_1-1})$, $y \in (y_j, y_{j+k_2-1})$.

4. Численные эксперименты

Пусть

$$I(u)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u(x,y)\,dx\,dy,$$

где

$$u(x,y)=\Big(1-e^{-x/\varepsilon}\Big)\Big(1-e^{-2y/\varepsilon}\Big)(1-x)(1-y)+cos(\pi x/2)e^{-y},\ \varepsilon\in(0,1]. \quad (4.1)$$

Функция (4.1) соответствует представлению (1.2) при задании

$$\Phi(x)=e^{-x/\varepsilon},\ \Theta(y)=e^{-2y/\varepsilon}.$$

Остановимся на случае $k_1=k_2=3$. Как было сказано, кубатурная формула для этого случая рассматривалась в [7]. Ячейку $K_{i,j}^h$ зададим в виде:

$$K_{i,j}^h=[x_{i-1},x_{i+1}]\times[y_{j-1},y_{j+1}].$$

Выпишем кубатурную формулу, основанную на формуле Симпсона по каждому направлению, для ячейки $K_{i,j}^h$:

$$S_{i,j}^{sim}(u)=\frac{1}{9}\tilde h_1\tilde h_2\Big[16u_{i,j}+4u_{i+1,j}+4u_{i-1,j}+4u_{i,j+1}+4u_{i,j-1}+$$
$$+u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j-1}+u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j+1}\Big]. \quad (4.2)$$

Теперь для ячейки $K_{i,j}^h$ выпишем построенную формулу (1.13), которая в данном случае имеет вид:

$$S_{\Phi,\Theta,3,3}^{i,j}(u)=4\tilde h_1\tilde h_2\Big[(1-2R_i-2G_j+4R_iG_j)u_{i,j}+R_i(1-2G_j)u_{i+1,j}+$$
$$+R_i(1-2G_j)u_{i-1,j}+G_j(1-2R_i)u_{i,j+1}+G_j(1-2R_i)u_{i,j-1}+R_iG_ju_{i+1,j+1}+$$
$$+R_iG_ju_{i-1,j-1}+R_iG_ju_{i+1,j-1}+R_iG_ju_{i-1,j+1}\Big], \quad (4.3)$$

где

$$R_i=\frac{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\Phi(x)\,dx-2\tilde h_1\Phi_i}{2\tilde h_1(\Phi_{i+1}-2\Phi_i+\Phi_{i-1})},\quad G_j=\frac{\int\limits_{y_{j-1}}^{y_{j+1}}\Theta(y)\,dy-2\tilde h_2\Theta_j}{2\tilde h_2(\Theta_{j+1}-2\Theta_j+\Theta_{j-1})}.$$

В соответствии с [7] при выполнении условий

$$\Phi''(x)\neq 0,\ x\in(x_{i-1},x_{i+1}),\ \Theta''(y)\neq 0,\ y\in(y_{j-1},y_{j+1})$$

справедливы оценки $0<R_i<1/2,\ 0<G_j<1/2$. Вследствие этого все коэффициенты формулы (4.3) положительны.

Пусть $N_1=N_2=N$. При этом $\tilde h_1=\tilde h_2=h$.

В табл. 1 приведена погрешность $\Delta(\varepsilon,h)$ и вычисленный порядок точности $CR_{\varepsilon,h}=\log_2(\Delta(\varepsilon,h)/\Delta(\varepsilon,h/2))$ составной кубатурной формулы, соответствующей (4.2). При уменьшении ε погрешность кубатурной формулы возрастает и при малых значениях ε становится порядка $O(h)$.

В табл. 2 приведены погрешность и вычисленный порядок точности составной формулы, основанной на кубатурной формуле (4.3). Порядок точности понижается с уменьшением ε с четвертого до второго, что соответствует оценке (3.5).

Таблица 1. Погрешность и вычисленный порядок точности составной формулы, основанной на классической формуле (4.2)

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	$1.63e-8$ 3.9	$1.06e-9$ 4.0	$6.66e-11$ 4.0	$4.16e-12$ 4.0	$2.60e-13$ 4.2	$1.37e-14$
10^{-1}	$3.12e-4$ 3.8	$2.21e-5$ 4.0	$1.43e-6$ 4.0	$8.99e-8$ 4.0	$5.63e-9$ 4.0	$3.52e-10$
10^{-2}	$1.31e-2$ 2.3	$3.84e-3$ 2.5	$6.95e-4$ 3.3	$7.30e-5$ 3.7	$5.44e-6$ 3.9	$3.57e-7$
10^{-3}	$1.97e-2$ 1.0	$9.56e-3$ 1.1	$4.43e-3$ 1.3	$1.85e-3$ 1.6	$6.05e-4$ 2.2	$1.29e-4$
10^{-4}	$2.03e-2$ 1.0	$1.02e-2$ 1.0	$5.11e-3$ 1.0	$2.52e-3$ 1.0	$1.23e-3$ 1.1	$5.76e-4$
10^{-5}	$2.03e-2$ 1.0	$1.03e-2$ 1.0	$5.17e-3$ 1.0	$2.59e-3$ 1.0	$1.29e-3$ 1.0	$6.43e-4$

Таблица 2. Погрешность и вычисленный порядок точности составной кубатурной формулы, основанной на формуле (4.3)

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	$8.95e-8$ 4.0	$5.56e-9$ 4.0	$3.47e-10$ 4.0	$2.17e-11$ 4.0	$1.36e-12$ 3.9	$9.24e-14$
10^{-1}	$3.37e-5$ 3.8	$2.41e-6$ 4.0	$1.56e-7$ 4.0	$9.85e-9$ 4.0	$6.17e-10$ 4.0	$3.74e-11$
10^{-2}	$8.83e-5$ 1.9	$2.32e-5$ 1.7	$7.34e-6$ 3.0	$8.65e-7$ 3.7	$6.63e-8$ 3.9	$4.38e-9$
10^{-3}	$3.60e-4$ 2.1	$8.31e-5$ 2.3	$1.72e-5$ 2.9	$2.33e-6$ 3.6	$1.87e-7$ 0.6	$1.25e-7$
10^{-4}	$3.82e-4$ 2.0	$9.49e-5$ 2.0	$2.34e-5$ 2.0	$5.69e-6$ 2.1	$1.34e-6$ 2.2	$2.92e-7$
10^{-5}	$3.85e-4$ 2.0	$9.60e-5$ 2.0	$2.40e-5$ 2.0	$5.98e-6$ 2.0	$1.49e-6$ 2.0	$3.67e-7$

5. Заключение

Исследован вопрос численного интегрирования функции двух переменных, имеющей области больших градиентов в прямоугольной области. Предложено строить кубатурную формулу, точную на погранслойных составляющих, задающих основной рост интегрируемой функции в пограничных слоях. Для построения кубатурной формулы предложено применять разработанную ранее формулу двумерной интерполяции, точную на выделенных погранслойных составляющих. Кубатурная формула может содержать произвольно заданное число узлов в каждом направлении. Получены оценки погрешности построенной кубатурной формулы, равномерные по погранслойным составляющим и их производным. Таким образом, погрешность кубатурной формулы равномерна по большим градиентам функции в пограничных слоях. Приведены результаты численных экспериментов, согласующиеся с полученными оценками погрешности.

References

[1] N.S. Bakhvalov, N.P. Zhidkov, G.M. Kobel'kov, *Numerical Methods*, Nauka, Moscow, 1987 [in Russian]. MR0938739

[2] A.I. Zadorin, N.A. Zadorin, *Quadrature formulas for functions with a boundary-layer component*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **51**:11 (2011), 1837–1846. MR2933107

[3] G. I. Shishkin, *Grid Approximations of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations*, Ural Otd. Ross. Akad. Nauk, Yekaterinburg, 1992 [in Russian]. MR1246799

[4] J.J.H. Miller, E. O'Riordan, G.I. Shishkin, *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions (Revised Edition)*, World Scientific, Singapore, 2012. MR2978532

[5] A.I. Zadorin, N.A. Zadorin, *An Analogue of the Four-Point Newton-Cotes Formula for a Function with a boundary-Layer Component*, Numerical Analysis and Applications, **6**:4 (2013), 268–278. MR3380131

[6] A. Zadorin, N. Zadorin, *Quadrature Formula with Five Nodes for Functions with a Boundary Layer Component* , Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin, **8236** (2013), 540–546. MR3150029

[7] A.I. Zadorin, *Cubature Formulas for a Two-Variable Function with Boundary-Layer Components*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **53**:12 (2013), 1808–1818. MR3146568

[8] H.G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska, *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Convection-Diffusion and Flow Problems. Springer Series in Computational Mathematics, 24*, Springer-Verlag, Berlin, 1996. MR1477665

[9] A.I. Zadorin, *Interpolation of a Function of Two Variables with Large Gradients in Boundary Layers*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **37**:3 (2016), 349–359.

[10] A.I. Zadorin , N.A. Zadorin, *Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9** (2012), 445–455. MR3037872

[11] A.I. Zadorin, *Interpolation Formulas for Functions with Large Gradients in the Boundary Layer and their Application*, Modeling and Analysis of Information Systems, **23**:3 (2016), 377–384. MR3520861

Alexander Ivanovich Zadorin
Sobolev Institute of Mathematics,
Acad. Koptyug avenue, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: zadorin@ofim.oscsbras.ru