ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2011, том 51, № 11, с. 1952–1962

УДК 519.644

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПОГРАНСЛОЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ[1)]

© 2011 г. А. И. Задорин*, Н. А. Задорин**

(644099 Омск, ул. Певцова, 13, Омский фил. Ин-та матем. СО РАН;*

*** 644077 Омск, пр-т Мира, 55-а, Омский гос. ун-т)*

e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru; nik-zadorin@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.12.2010 г.

Строятся и исследуются квадратурные формулы для функции одной переменной с погранслойной составляющей. Предполагается, что интегрируемая функция имеет представление в виде суммы регулярной и погранслойной составляющей, большие градиенты которой понижают точность классических квадратурных формул, таких как формулы трапеций и Симпсона. Осуществлена модификация этих формул, при которой погрешность квадратурной формулы не зависит от градиентов погранслойной составляющей. Приводятся результаты численных экспериментов. Библ. 9. Табл. 6.

Ключевые слова: функция одной переменной, погранслойная составляющая, большие градиенты, определенный интеграл, неполиномиальная интерполяция, квадратурная формула, оценка погрешности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Построение квадратурных формул Ньютона–Котеса основано на приближении интегрируемой функции многочленом Лагранжа. Погрешность таких составных квадратурных формул, как известно, в случае больших градиентов интегрируемой функции и равномерной сетки может быть значительной.

Для функций с особенностями известны методы численного интегрирования, такие как выделение весового множителя, метод Канторовича аддитивного выделения особенности, сгущение сетки в областях больших градиентов и др. Вопросы построения квадратурных формул для функций с особенностями излагаются в [1]–[3] и в работах многих других авторов.

В данной работе предполагается, что интегрируемая функция представима в виде суммы регулярной составляющей, имеющей ограниченные производные до некоторого порядка, и известной погранслойной составляющей, имеющей резкие изменения в определенных частях интервала интегрирования. Предполагается, что погранслойная составляющая не может быть аддитивно выделена при численном интегрировании. Предлагается строить квадратурные формулы исходя из того, что они должны быть точными на погранслойной составляющей.

Итак, будем строить квадратурные формулы для вычисления интеграла

$$I(u) = \int_a^b u(x)dx \tag{1.1}$$

в случае функции $u(x)$, имеющей представление

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [a, b]. \tag{1.2}$$

Предполагаем, что функция $u(x)$ является достаточно гладкой (используемые производные непрерывны), погранслойная составляющая $\Phi(x)$ известна, ограничена и имеет области больших градиентов, регулярная составляющая $p(x)$ ограничена вместе с некоторыми производными, постоянная γ не задана. Представление (1.2) имеет место для решений сингулярно возмущенных краевых или начальных задач.

Для примера рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{1.3}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 10-01-00726, 11-01-00875).

где

$$a_1(x) \ge \alpha > 0, \quad a_2(x) \ge 0, \quad \varepsilon > 0,$$

функции a_1, a_2, f достаточно гладкие. Согласно [4]–[6], при малых значениях параметра ε решение задачи (1.3) имеет экспоненциальный пограничный слой у левой границы интервала $x = 0$ и для решения $u(x)$ справедливо представление (1.2) при задании

$$\Phi(x) = \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x), \quad a_0 = a_1(0), \quad \gamma = -\varepsilon u'(0)/a_0. \tag{1.4}$$

При этом постоянная γ неизвестна, $|p'(x)| \le C_0$, $|\gamma| \le C_1$, постоянные C_0 и C_1 не зависят от параметра ε. Заметим, что для $\Phi(x)$ из (1.4) при всех $x \in [0, 1]$ справедливы соотношения

$$\Phi(x) > 0, \quad \Phi'(x) < 0, \quad \Phi''(x) > 0. \tag{1.5}$$

Всюду в работе под C и C_j, $j \ge 0$ будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от погранслойной составляющей и ее производных, а также от шагов разностной сетки. Различные постоянные будем обозначать одной буквой, если это не вызывает недоразумений.

2. ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ С ДВУМЯ УЗЛАМИ

Выпишем квадратурную формулу трапеций:

$$S_2(u) = (b-a)\frac{u(a)+u(b)}{2}. \tag{2.1}$$

Для формулы (2.1) известно представление погрешности (см. [2, с. 185])

$$R_2(u) = I(u) - S_2(u) = -\frac{(b-a)^3}{12}u''(s) \tag{2.2}$$

для некоторого $s \in (a, b)$. Из (2.2) следует, что

$$|R_2(u)| \le \max_x |u''(x)| \frac{(b-a)^3}{12}. \tag{2.3}$$

Введем составную формулу трапеций. Пусть задана равномерная сетка интервала $[a, b]$:

$$\Omega = \{x_n : x_n = a + nh, n = 0, 1, \ldots, N, Nh = b - a\}.$$

Составная формула трапеций имеет вид

$$S_2^c(u) = h\sum_{n=1}^{N}\frac{u_{n-1}+u_n}{2}, \quad u_n = u(x_n). \tag{2.4}$$

Для формулы (2.4) с учетом (2.3) имеет место оценка погрешности

$$|R_2^c(u)| \le \max_x |u''(x)| \frac{(b-a)}{12}h^2. \tag{2.5}$$

В соответствии с (2.5), если производная $u''(x)$ является равномерно ограниченной, то погрешность формулы (2.4) порядка $O(h^2)$. При больших значениях производной интегрируемой функции порядок точности формулы (2.4) может понизиться.

Рассмотрим погрешность формулы трапеций для первого сеточного интервала на примере функции $u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$, $\varepsilon > 0$:

$$\Delta = \int_0^h \exp(-\varepsilon^{-1}x)dx - \frac{h}{2}(1 + \exp(-\varepsilon^{-1}h)) = \varepsilon - \frac{h}{2} - \exp(-\varepsilon^{-1}h)\left(\varepsilon + \frac{h}{2}\right).$$

Нетрудно заключить, что $\Delta = O(h^3)$ при $\varepsilon \approx 1$ и $\Delta = O(h)$ при $\varepsilon \le h$. Таким образом, при наличии погранслойной составляющей у интегрируемой функции порядок погрешности составной формулы трапеций (2.4) может увеличиться до порядка $O(h)$.

Осуществим модификацию формулы трапеций (2.1), добиваясь того, чтобы погрешность квадратурной формулы не зависела от погранслойной составляющей $\Phi(x)$. Для построения квадратурной формулы используем неполиномиальную интерполяцию функции $u(x)$, точную на составляющей $\Phi(x)$. В случае экспоненциального пограничного слоя такая интерполяция строилась в [7]. В [8], [9] при построении формул сплайн-интерполяции рассмотрен случай погранслойной составляющей $\Phi(x)$ общего вида. Сделаем ограничение, что функция $\Phi(x)$ монотонна на интервале (a, b) и, в соответствии с [8], выпишем формулу интерполяции функции $u(x)$ на интервале $[a, b]$:

$$u_{\Phi,2}(x) = [u(a) - u(b)]\frac{\Phi(x) - \Phi(b)}{\Phi(a) - \Phi(b)} + u(b). \tag{2.6}$$

Интерполяция (2.6) является точной на функции $\Phi(x)$. В [9] доказано, что для интерполяции (2.6) справедлива оценка погрешности

$$|u_{\Phi,2}(x) - u(x)| \le 2\max_s|p'(s)|(b-a), \quad s, x \in [a, b]. \tag{2.7}$$

В соответствии с (2.7), оценка погрешности формулы (2.6) не зависит от погранслойной составляющей $\Phi(x)$. В интеграле (1.1) заменяя функцию $u(x)$ интерполянтом (2.6) и, интегрируя, получаем

$$S_{\Phi,2}(u) = u(b)(b-a) + [u(a) - u(b)]\frac{\int_a^b \Phi(x)dx - \Phi(b)(b-a)}{\Phi(a) - \Phi(b)}. \tag{2.8}$$

Учитывая оценку (2.7), получаем

$$|R_{\Phi,2}(u)| = |I(u) - S_{\Phi,2}(u)| \le 2\max_s|p'(s)|(b-a)^2. \tag{2.9}$$

Отметим, что, в отличие от (2.3), оценка погрешности (2.9) не зависит от погранслойной составляющей $\Phi(x)$.

Получим другую оценку погрешности формулы (2.8). Для этого воспользуемся оценкой погрешности из [9] интерполяционной формулы (2.6):

$$|u_{\Phi,2}(x) - u(x)| \le \frac{(b-a)^2}{8}[\max_s|p''(s)| + \max_s|p''_{\Phi,2}(s)|], \quad s, x \in [a, b], \tag{2.10}$$

где $p_{\Phi,2}(x)$ – интерполянт (2.6) для функции $p(x)$. Используя оценку (2.10), получаем

$$|R_{\Phi,2}(u)| \le \frac{(b-a)^3}{8}[\max_{s \in [a,b]}|p''(s)| + \max_{s \in [a,b]}|p''_{\Phi,2}(s)|]. \tag{2.11}$$

В соответствии с (2.11), формула (2.8), как и формула трапеций, точна на многочленах первой степени, но она точна и на погранслойной составляющей $\Phi(x)$.

Преобразуем формулу (2.8). Пусть

$$G_2 = \frac{\int_a^b \Phi(x)dx - (b-a)\Phi(b)}{(b-a)(\Phi(a) - \Phi(b))}. \tag{2.12}$$

Тогда имеем

$$S_{\Phi,2}(u) = (b-a)[G_2u(a) + (1-G_2)u(b)]. \tag{2.13}$$

Из (2.13) следует формула трапеций при задании $G_2 = 1/2$, что соответствует случаю $\Phi(x) = x$.

Пусть функция $\Phi(x)$ монотонна на $[a, b]$. Тогда из (2.12) следует, что $0 < G_2 < 1$, коэффициенты формулы (2.13) положительны.

Пусть

$$\Phi'(x) < 0, \quad \Phi''(x) > 0 \quad \text{или} \quad \Phi'(x) > 0, \quad \Phi''(x) < 0, \quad x \in (a, b). \tag{2.14}$$

Тогда имеем

$$0 < G_2 < 1/2. \tag{2.15}$$

Для обоснования (2.15) остановимся на первом случае ограничений (2.14). Функция $\Phi(x)$ монотонно убывает на (a, b), поэтому $G_2 > 0$. Условие $G_2 < 1/2$ приводится к виду

$$\int_a^b \Phi(x)dx < (b-a)\frac{\Phi(a) + \Phi(b)}{2}.$$

Учитывая (2.2) и условие $\Phi''(x) > 0$ на (a, b), заключаем, что это неравенство справедливо, что и доказывает (2.15).

Заметим, что если составляющая $\Phi(x)$ определена в соответствии с (1.4), то выполнены условия (1.5) и, следовательно, условия (2.14).

Предположим, что функция $\Phi(x)$ монотонна на сеточных интервалах, и определим составную квадратурную формулу, соответствующую формуле (2.13):

$$S^c_{\Phi,2}(u) = h\sum_{n=1}^{N}[G_{2,n}u_{n-1} + (1-G_{2,n})u_n], \tag{2.16}$$

где

$$G_{2,n} = \frac{\int_{x_{n-1}}^{x_n}\Phi(x)dx - h\Phi_n}{h(\Phi_{n-1}-\Phi_n)}, \quad \Phi_n = \Phi(x_n).$$

Применяя оценку (2.9) к сеточным интервалам, получаем оценку погрешности составной формулы (2.16):

$$\left|R^c_{\Phi,2}(u)\right| \le 2(b-a)\max_{s\in[a,b]}|p'(s)|h. \tag{2.17}$$

В соответствии с (2.17), оценка погрешности формулы (2.16) не зависит от погранслойной составляющей $\Phi(x)$ и ее производных.

Покажем, что если интегрируемая функция $u(x)$ не содержит области больших градиентов, то составная квадратурная формула (2.16), как и формула (2.4), – второго порядка точности по шагу сетки. Применяя оценку (2.11) к сеточным интервалам, получаем

$$\left|R^c_{\Phi,2}(u)\right| \le \frac{b-a}{8}[\max_s|p''(s)| + \max_s|p''_{\Phi,2}(s)|]h^2, \quad s\in[a,b]. \tag{2.18}$$

Итак, составная квадратурная формула (2.16) – первого порядка точности по шагу сетки равномерно по градиентам погранслойной составляющей и второго порядка точности, как и составная формула трапеций, если интегрируемая функция не имеет больших градиентов.

Покажем, как можно повысить точность составной квадратурной формулы. Построим составную формулу так, чтобы на сеточных интервалах вне области пограничного слоя применялась формула трапеций (2.1), а в пограничном слое – формула (2.13). Для определенности остановимся на случае, когда пограничный слой находится у левой границы интервала $[a, b]$ и $|u''(x)| \le C$ для всех $x \ge a + \sigma$, $\sigma > 0$.

Пусть $m = \min\limits_n\{n : x_n \ge a + \sigma\}$. Запишем составную формулу

$$\tilde{S}^c_{\Phi,2} = h\sum_{n=1}^{m}[G_{2,n}u_{n-1} + (1-G_{2,n})u_n] + h\sum_{n=m+1}^{N}\frac{u_{n-1}+u_n}{2}. \tag{2.19}$$

Исследуем случаи, когда составная квадратурная формула (2.19) имеет точность порядка $O(h^2)$, что соответствует оценке

$$\left|I(u) - \tilde{S}^c_{\Phi,2}\right| \le C_1h^2 \tag{2.20}$$

для некоторой постоянной C_1. Если функция $u(x)$ имеет равномерно ограниченную вторую производную, то оценка (2.20) следует из оценок (2.5) и (2.18). Рассмотрим случай, когда погранслойная составляющая $\Phi(x)$ быстро меняется, а погранслойная область $[a, a + \sigma]$ содержится в одном или в нескольких сеточных интервалах. Тогда первая сумма в (2.19) в соответствии с оценкой (2.9), примененной к сеточным интервалам, приближает интеграл

$$\int_a^{x_m}u(x)dx$$

с погрешностью порядка $O(h^2)$. В силу ограниченности $|u''(x)|$ при всех $x \ge a + \sigma$ и оценки (2.3), применяемой к сеточным интервалам, вторая квадратурная сумма в (2.19) приближает интеграл

$$\int_{x_m}^{b}u(x)dx$$

с точностью $O(h^2)$, из чего следует оценка (2.20).

Рассмотрим случай, когда $u(x)$ является решением задачи (1.3). Тогда справедлива оценка (см. [6])

$$|u^{(j)}(x)| \le C_2\left[\frac{1}{\varepsilon^j}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x) + 1\right], \quad 1 \le j \le 4. \tag{2.21}$$

Следовательно имеем, $|u''(x)| \le 2C_2$, если $x \ge \sigma = -2\alpha^{-1}\varepsilon\ln(\varepsilon)$, $\varepsilon < 1$.

3. КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА С ТРЕМЯ УЗЛАМИ

Остановимся на квадратурных формулах с тремя узлами для вычисления интеграла (1.1), когда $u(x)$ имеет представление (1.2).

Пусть $c = (a + b)/2$. Выпишем известную формулу Симпсона:

$$S_3(u) = \frac{b-a}{6}(u(a) + 4u(c) + u(b)) \tag{3.1}$$

с оценкой остаточного члена

$$|R_3(u)| = |I(u) - S_3(u)| \le \max_x |u^{(4)}(x)| \frac{(b-a)^5}{2880}, \quad x \in [a, b]. \tag{3.2}$$

Пусть N четно. Для составной формулы Симпсона

$$S_3^c = \frac{h}{3}\sum_{n=1,2}^{N-1}(u_{n-1} + 4u_n + u_{n+1}) \tag{3.3}$$

известна оценка погрешности, соответствующая (3.2):

$$|R_3^c(u)| = |I(u) - S_3^c(u)| \le (b-a)\max_{x \in [a,b]}|u^{(4)}(x)|\frac{h^4}{180}. \tag{3.4}$$

Согласно (3.4), составная формула Симпсона (3.3) имеет погрешность порядка $O(h^4)$, если производная $u^{(4)}(x)$ равномерно ограничена.

Рассмотрим функцию $u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$, $\varepsilon > 0$. Тогда погрешность формулы Симпсона для сеточного интервала $[0, 2h]$ имеет вид

$$\Delta = \int_0^{2h}\exp(-\varepsilon^{-1}x)dx - \frac{h}{3}(1 + 4\exp(-\varepsilon^{-1}h) + \exp(-2\varepsilon^{-1}h)) =$$

$$= \varepsilon - \frac{h}{3} - \frac{4h}{3}\exp(-\varepsilon^{-1}h) - \left(\varepsilon + \frac{h}{3}\right)\exp(-2\varepsilon^{-1}h).$$

Несложно проверить, что $\Delta = O(h^5)$ при $\varepsilon \approx 1$ и $\Delta = O(h)$ при $\varepsilon \le h$. Итак, при наличии погранслойной составляющей погрешность составной формулы Симпсона (3.3) может увеличиться с $O(h^4)$ до $O(h)$.

Проведем модификацию формулы Симпсона (3.1) с учетом того, чтобы она была точной на составляющей $\Phi(x)$. Для этого к функции $u(x)$ применим формулу интерполяции из [9], учитывающую значение функции в трех узлах и точную на составляющей $\Phi(x)$:

$$\begin{gathered} u_{\Phi,3}(x) = u(c) + 2\frac{u(c) - u(a)}{b-a}(x-c) + \\ + \frac{u(a) - 2u(c) + u(b)}{\Phi(a) - 2\Phi(c) + \Phi(b)}\left[\Phi(x) - \Phi(c) - 2\frac{\Phi(c) - \Phi(a)}{b-a}(x-c)\right], \\ c = (a+b)/2, \quad x \in [a, b]. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Используя интерполяцию (3.5), получаем квадратурную формулу для интеграла (1.1), точную на погранслойной составляющей $\Phi(x)$:

$$S_{\Phi,3}(u) = \int_a^b u_{\Phi,3}(x)dx. \tag{3.6}$$

Учитывая (3.5) в (3.6), получаем

$$S_{\Phi,3}(u) = u(c)(b-a) + \frac{u(a)-2u(c)+u(b)}{\Phi(a)-2\Phi(c)+\Phi(b)}\left[\int_a^b \Phi(x)dx - \Phi(c)(b-a)\right]. \qquad (3.7)$$

Несложно убедиться, что формула (3.7) переходит в формулу Симпсона (3.1) при задании $\Phi(x) = x^2$.

Лемма 1. *Пусть*

$$\Phi''(x) < 0, \quad \Phi^{(4)}(x) < 0, \quad x \in (a, b), \qquad (3.8)$$

или

$$\Phi''(x) > 0, \quad \Phi^{(4)}(x) > 0, \quad x \in (a, b). \qquad (3.9)$$

Тогда справедлива оценка

$$|R_{\Phi,3}(u)| = |I(u) - S_{\Phi,3}(u)| \le \frac{1}{12}\max_{s \in (a,b)}|p''(s)|(b-a)^3. \qquad (3.10)$$

Доказательство. Остановимся на случае выполнения условий (3.9), аналогичном случаю условий (3.8). Квадратурная формула (3.7) точна на погранслойной составляющей $\Phi(x)$, поэтому имеем

$$R_{\Phi,3}(u) = R_{\Phi,3}(p) = [p(a) - 2p(c) + p(b)](b-a)G_3 + \left[p(c)(b-a) - \int_a^b p(s)ds\right], \qquad (3.11)$$

где

$$G_3 = \frac{1}{b-a}\frac{\int_a^b \Phi(x)dx - \Phi(c)(b-a)}{\Phi(a)-2\Phi(c)+\Phi(b)}. \qquad (3.12)$$

Докажем, что для G_3 из (3.12) справедлива оценка

$$0 < G_3 < 1/6. \qquad (3.13)$$

На основе разложения $\Phi(x)$ в ряд Тейлора в точке $x = c$ несложно показать, что

$$\int_a^b \Phi(x)dx - \Phi(c)(b-a) = \frac{1}{2}\int_a^b \Phi''(s(x))(x-c)^2 dx > 0,$$

где $a < s(x) < b$. Учитывая, что для некоторого $r \in (a, b)$ имеем

$$\Phi(a) - 2\Phi(c) + \Phi(b) = \Phi''(r)(b-a)^2/4 > 0,$$

заключаем, что $G_3 > 0$.

Докажем вторую часть неравенства (3.13). Учитывая, что $\Phi''(x) > 0$, неравенство $G_3 < 1/6$ преобразуем к виду

$$\int_a^b \Phi(x)dx < \frac{b-a}{6}[\Phi(a) + 4\Phi(c) + \Phi(b)]. \qquad (3.14)$$

В соответствии с [2, с. 187], для произвольной достаточно гладкой функции $f(x)$ найдется $s \in (a, b)$ такое, что

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(c) + f(b)] - \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(s). \qquad (3.15)$$

Учитывая ограничение $\Phi^{(4)}(x) > 0$ и (3.15), убеждаемся в справедливости неравенства (3.14), откуда следует (3.13).

Учитывая оценку (3.13), оценку погрешности формулы прямоугольников при $c = (a + b)/2$ и оценивая оба слагаемых в (3.11), получаем утверждение леммы.

Заметим, что использование оценки (3.10) требует равномерной ограниченности $|p''(x)|$. Чтобы обойти это требование, на основе соотношения (3.11) можно получить оценку

$$|R_{\Phi,3}(u)| \le \frac{(b-a)^2}{12}\int_a^b |p''(s)|ds + \int_a^c\int_s^c |p'(r)|drds + \int_c^b\int_c^s |p'(r)|drds.$$

Получим оценку погрешности формулы (3.7) без ограничений на $\Phi^{(4)}(x)$.

Лемма 2. *Пусть*

$$\Phi''(x) > 0,\quad x\in(a,b)\quad \text{или}\quad \Phi''(x) < 0,\quad x\in(a,b).$$

Тогда справедлива оценка

$$|R_{\Phi,3}(u)| \le \frac{1}{6}\max_{s\in(a,b)}|p''(s)|(b-a)^3.$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы. Отличие в том, что при заданных условиях можно доказать, что справедливо неравенство

$$0 < G_3 < 1/2.$$

Остановимся на случае $\Phi''(x) > 0$, $x \in (a, b)$. Обоснование оценки $G_3 > 0$ приведено в лемме 1. Неравенство $G_3 < 1/2$ можно записать в виде

$$\int_a^b \Phi(x)dx < (b-a)\frac{\Phi(a)+\Phi(b)}{2}.$$

Как уже говорилось выше, это неравенство справедливо в силу (2.2) и того, что $\Phi''(x) > 0$. Итак, оценка параметра G_3 обоснована. Далее используем соотношение (3.11) и получаем утверждение леммы.

Докажем, что порядок точности квадратурной формулы (3.7) будет выше, если не требовать, чтобы оценка погрешности не зависела от градиентов погранслойной составляющей. В соответствии с [9] можно утверждать, что справедлива оценка

$$|u_{\Phi,3}(x) - u(x)| \le \frac{1}{72\sqrt{3}}[\max_s|p''_{\Phi,3}(s)| + \max_s|p'''(s)|](b-a)^3,\quad s\in[a,b],$$

где $p_{\Phi,3}(x)$ соответствует интерполянту (3.5) для функции $p(x)$. Следовательно, имеем

$$|R_{\Phi,3}(u)| \le \frac{1}{72\sqrt{3}}[\max_s|p'''_{\Phi,3}(s)| + \max_s|p'''(s)|](b-a)^4,\quad s\in[a,b]. \tag{3.16}$$

Учитывая формулу (3.12), квадратурную формулу (3.7) можно преобразовать к виду

$$S_{\Phi,3}(u) = (b-a)[G_3u(a) + (1-2G_3)u(c) + G_3u(b)]. \tag{3.17}$$

Если производная $\Phi''(x)$ на интервале (a, b) сохраняет знак, то все коэффициенты квадратурной формулы (3.17) положительны.

На основе формулы (3.17) получим составную квадратурную формулу

$$S^c_{\Phi,3}(u) = 2h\sum_{n=1,2}^{N-1}[G_{3,n}u_{n-1} + (1-2G_{3,n})u_n + G_{3,n}u_{n+1}], \tag{3.18}$$

где N четно и

$$G_{3,n} = \frac{\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}\Phi(x)dx - 2\Phi_n h}{2h(\Phi_{n-1} - 2\Phi_n + \Phi_{n+1})}.$$

Пусть неравенства (3.8) или (3.9) выполнены на всех сеточных интервалах (x_{n-1}, x_{n+1}), используемых в составной квадратурной формуле. Используя оценку (3.10) применительно к этим интервалам, получаем оценку погрешности формулы (3.18):

$$|R^c_{\Phi,3}(u)| = |I(u) - S^c_{\Phi,3}(u)| \le \frac{b-a}{3}\max_{s\in[a,b]}|p''(s)|h^2. \tag{3.19}$$

Если известно, что производная $\Phi''(x)$ сохраняет знак на интервалах (x_{n-1}, x_{n+1}), то, в соответствии с леммой 2, будет справедлива оценка (3.19) с заменой множителя 1/3 на 2/3.

Итак, при рассматриваемых ограничениях на $\Phi(x)$ составная квадратурная формула (3.18) имеет второй порядок точности по шагу сетки равномерно по градиентам погранслойной составляющей $\Phi(x)$.

Если не требовать, чтобы погрешность квадратурной формулы (3.18) была равномерной по градиентам погранслойной составляющей, то порядок точности этой формулы будет $O(h^3)$. Действительно, используя оценку (3.16) в случае каждого интервала $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, получаем следующую оценку погрешности составной квадратурной формулы (3.18):

$$\left|R^c_{\Phi,3}(u)\right| \le \frac{b-a}{9\sqrt{3}}[\max_s\left|p'''_{\Phi,3}(s)\right| + \max_s\left|p'''(s)\right|]h^3, \quad s \in [a, b]. \tag{3.20}$$

Итак, для формулы (3.18) справедливы оценки погрешности (3.19) и (3.20). В соответствии с этими оценками если функция $u(x)$ имеет область больших градиентов, то точность составной квадратурной формулы (3.18) будет порядка $O(h^2)$, если же производные функции $u(x)$ равномерно ограничены, то точность этой формулы повышается до порядка $O(h^3)$.

Если имеются оценки производных интегрируемой функции $u(x)$, то при построении составной квадратурной формулы можно комбинировать формулы (3.1) и (3.17). На сеточных интервалах в области пограничного слоя используем квадратурную формулу (3.17), а вне пограничного слоя – формулу Симпсона (3.1), порядок точности которой выше. Рассмотрим случай, когда функция $\Phi(x)$ соответствует погранслойному изменению функции $u(x)$ в окрестности точки $x = a$. Пусть $[a, a + \sigma]$ – область пограничного слоя, где параметр σ выбран так, чтобы для $x \ge a + \sigma$ и некоторой постоянной C_0 выполнилось неравенство $|u^{(4)}(x)| \le C_0$. Пусть

$$m = \min_n\{n : x_{n-1} \ge a + \sigma, n \text{ нечетно}\}.$$

Тогда можно записать составную квадратурную формулу в виде

$$\begin{aligned}\tilde{S}^c_{\Phi,3}(u) = 2h \sum_{n=1,2}^{m-2} [G_{3,n}u_{n-1} + (1-2G_{3,n})u_n + G_{3,n}u_{n+1}] + \\ + \frac{h}{3}\sum_{n=m,2}^{N-1}(u_{n-1} + 4u_n + u_{n+1}).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Покажем, что если область пограничного слоя находится в одном или в нескольких сеточных интервалах, то для погрешности формулы (3.21) справедлива оценка

$$\left|I(u) - \tilde{S}^c_{\Phi,3}(u)\right| \le Ch^3. \tag{3.22}$$

Обоснование аналогично случаю формулы трапеций. Формула Симпсона (3.1) применяется для интервалов вне пограничного слоя, где производная $u^{(4)}(x)$ ограничена. Поэтому, в соответствии с оценкой (3.4), составная формула Симпсона, применяемая в (3.21), обладает погрешностью порядка $O(h^4)$. Формула (3.17), используемая в (3.21), применяется к нескольким сеточным интервалам, пересекающимся с областью пограничного слоя, поэтому, в соответствии с (3.10), первая квадратурная сумма в (3.21) имеет погрешность порядка $O(h^3)$. Итак, итоговая погрешность формулы (3.21) имеет порядок $O(h^3)$, что соответствует оценке (3.22).

В случае экспоненциального пограничного слоя у границы $x = 0$ с учетом оценки производных (2.21) можно задать $\sigma = -4\alpha^{-1}\varepsilon\ln(\varepsilon)$.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Остановимся на вычислении интеграла

$$I = \int_0^1[\cos(\pi x/2) + \exp(-\varepsilon^{-1}x)]dx$$

при различных значениях параметра $\varepsilon \in (0, 1]$. Подынтегральная функция соответствует представлению (1.2) с $\Phi(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$. Для функции $\Phi(x)$ выполнены условия (1.5) и (3.9). В таблицах $e \pm m$ обозначает $10^{\pm m}$.

Таблица 1

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	0.31e–3	0.76e–4	0.19e–4	0.48e–5	0.12e–5	0.30e–6
10^{-1}	0.27e–2	0.68e–3	0.17e–3	0.42e–4	0.11e–4	0.27e–5
10^{-2}	0.21e–1	0.69e–2	0.19e–2	0.50e–3	0.12e–3	0.31e–4
10^{-3}	0.30e–1	0.14e–1	0.68e–2	0.29e–2	0.10e–2	0.30e–3
10^{-4}	0.31e–1	0.15e–1	0.77e–2	0.38e–2	0.19e–2	0.88e–3
10^{-5}	0.31e–1	0.15e–1	0.77e–2	0.39e–2	0.19e–2	0.97e–3

Таблица 2

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	0.84e–3	0.21e–3	0.52e–4	0.13e–4	0.33e–5	0.82e–6
10^{-1}	0.37e–2	0.94e–3	0.24e–3	0.59e–4	0.15e–4	0.36e–5
10^{-2}	0.22e–1	0.71e–2	0.20e–2	0.51e–3	0.12e–3	0.32e–4
10^{-3}	0.31e–1	0.15e–1	0.68e–2	0.29e–2	0.10e–2	0.30e–3
10^{-4}	0.31e–1	0.16e–1	0.77e–2	0.38e–2	0.19e–2	0.88e–3
10^{-5}	0.31e–1	0.16e–1	0.78e–2	0.39e–2	0.19e–2	0.97e–3

Таблица 3

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
10^{-1}	0.14e–2	0.33e–3	0.83e–4	0.20e–4	0.50e–5	0.13e–5
10^{-2}	0.92e–3	0.20e–3	0.52e–4	0.13e–4	0.34e–5	0.84e–6
10^{-3}	0.66e–3	0.15e–3	0.34e–4	0.89e–5	0.23e–5	0.59e–6
10^{-4}	0.66e–3	0.15e–3	0.34e–4	0.83e–5	0.20e–5	0.50e–6
10^{-5}	0.66e–3	0.15e–3	0.34e–4	0.83e–5	0.20e–5	0.50e–6

В табл. 1 представлена погрешность составной формулы трапеций (2.4) в зависимости от ε и h. С уменьшением ε погрешность формулы (2.4) увеличивается с $O(h^2)$ до $O(h)$, что соответствует оценке (2.5) и последующему за (2.5) примеру, показывающему понижение точности составной формулы трапеций до $O(h)$ в случае малых значений ε.

В табл. 2 приведена погрешность составной формулы (2.16) при различных значениях ε и h. Подтверждаются оценки погрешности (2.17) и (2.18).

В табл. 3 приведена погрешность комбинированной составной формулы (2.19) в зависимости от ε и h. Подтверждается второй порядок точности этой формулы, что соответствует оценке (2.20).

Теперь остановимся на анализе точности трехточечных составных квадратурных формул.

В табл. 4 представлена погрешность составной формулы Симпсона (3.3) в зависимости от ε и h. Результаты вычислений подтверждают, что точность этой формулы имеет порядок $O(h^4)$ при $\varepsilon = 1$ и становится порядка $O(h)$ при $\varepsilon \le h$.

Таблица 4

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	0.38e–6	0.24e–7	0.15e–8	0.93e–10	0.58e–11	0.36e–12
10^{-1}	0.81e–4	0.52e–5	0.33e–6	0.21e–7	0.12e–8	0.81e–10
10^{-2}	0.12e–1	0.23e–2	0.25e–3	0.19e–4	0.13e–5	0.80e–7
10^{-3}	0.20e–1	0.94e–2	0.42e–2	0.16e–2	0.41e–3	0.55e–4
10^{-4}	0.21e–1	0.10e–1	0.51e–2	0.25e–2	0.12e–2	0.55e–3
10^{-5}	0.21e–1	0.10e–1	0.52e–2	0.26e–2	0.13e–2	0.64e–3

Таблица 5

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	0.46e–6	0.29e–7	0.18e–8	0.11e–9	0.70e–11	0.45e–12
10^{-1}	0.13e–4	0.85e–6	0.53e–7	0.33e–8	0.21e–9	0.13e–10
10^{-2}	0.54e–3	0.61e–4	0.48e–5	0.32e–6	0.20e–7	0.12e–8
10^{-3}	0.97e–3	0.23e–3	0.54e–4	0.98e–5	0.13e–5	0.11e–6
10^{-4}	0.10e–2	0.25e–3	0.63e–4	0.15e–4	0.37e–5	0.84e–6
10^{-5}	0.10e–2	0.25e–3	0.64e–4	0.16e–4	0.40e–5	0.98e–6

Таблица 6

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
10^{-1}	0.12e–3	0.85e–6	0.53e–7	0.33e–8	0.21e–9	0.13e–10
10^{-2}	0.30e–3	0.24e–4	0.16e–5	0.10e–6	0.61e–8	0.38e–9
10^{-3}	0.37e–3	0.45e–4	0.50e–5	0.72e–6	0.80e–7	0.62e–8
10^{-4}	0.39e–3	0.49e–4	0.61e–5	0.75e–6	0.90e–7	0.10e–7
10^{-5}	0.39e–3	0.50e–4	0.62e–5	0.78e–6	0.97e–7	0.12e–7

В табл. 5 представлена погрешность предложенной составной квадратурной формулы (3.18) при различных ε и h. Результаты вычислений подтверждают, что при малых значениях ε формула (3.18) обладает погрешностью порядка $O(h^2)$, а при $\varepsilon = 1$ погрешность, как и в случае формулы Симпсона, порядка $O(h^4)$.

В табл. 6 при различных значениях ε и h представлена погрешность составной квадратурной формулы (3.21). Результаты вычислений показывают, что формула (3.21) обладает погрешностью порядка $O(h^4)$ при $\varepsilon = 0.1$, порядок погрешности увеличивается до $O(h^3)$ с уменьшением ε. В табл. 6 нет результатов вычислений при $\varepsilon = 1$, но в этом случае пограничный слой отсутствует и формула (3.21) переходит в формулу Симпсона (3.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канторович Л.В.* О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей // Матем. сб. 1934. Т. 41. № 2. С. 235–244.
2. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. М.: Наука, 1966.

3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.
4. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
5. *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Singapure: World Scient., 1996.
6. *Kellogg R.B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points // Math. Comput. 1978. V. 32. P. 1025–1039.
7. *Задорин А.И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сибирский ж. вычисл. матем. 2007. Т. 10. № 3. С. 267–275.
8. *Zadorin A.I.* Interpolation method for a function with a singular component // Lect. Notes in Comput. Sci. Berlin: Springer. 2009. V. 5434. P. 612–619.
9. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 221–233.