ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2014, том 54, № 10, с. 1547–1556

УДК 519.644.2

МОДИФИКАЦИЯ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПОГРАНСЛОЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ[1)]

© 2014 г. **А. И. Задорин**

(644099 Омск, ул. Певцова, 13, Омский фил. Ин-та матем. СО РАН)

e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

Поступила в редакцию 28.11.2013 г.

Исследуется квадратурная формула Эйлера для численного интегрирования функции с погранслойной составляющей на равномерной сетке. При наличии у интегрируемой функции быстро растущей составляющей погрешность может быть значительной. Для построения равномерно точной квадратурной формулы интерполяционная формула Эрмита модифицируется таким образом, чтобы построенная интерполяционная формула стала точной на погранслойной составляющей. Построен аналог формулы Эйлера, точный на погранслойной составляющей. Доказано, что построенная составная квадратурная формула обладает третьим порядком точности по шагу сетки, равномерно по погранслойной составляющей и ее производным. Библ. 12. Табл. 3.

Ключевые слова: квадратурная формула для определенного интеграла, функция с погранслойной составляющей, модифицированная квадратурная формула Эйлера, многочлен Эрмита, модификация, оценка погрешности квадратурной формулы.

DOI: 10.7868/S0044466914100081

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о построении квадратурных формул для функций с особенностями исследовался в ряде работ, например в [1]–[3]. Обеспечить заданную точность при вычислении интеграла от функции с большими градиентами можно сгущением сетки в области больших градиентов, выделением весового множителя, аддитивным выделением особенности и другими способами (см. [1]–[4]).

Будем строить квадратурную формулу для вычисления интеграла вида

$$I(u) = \int_a^b u(x)dx \tag{1.1}$$

в случае, когда функция $u(x)$ на интервале $[a, b]$ имеет область больших градиентов. Предполагаем, что из функции $u(x)$ аддитивным образом с точностью до множителя можно выделить составляющую, задающую большие градиенты этой функции. Итак, пусть функция $u(x)$ имеет представление

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [a, b]. \tag{1.2}$$

Предполагаем, что погранслойная составляющая $\Phi(x)$ известна, ее производные не являются равномерно ограниченными и функция $\Phi(x)$ может быть проинтегрирована в явном виде, регулярная составляющая $p(x)$ ограничена вместе с производными до некоторого порядка, постоянная γ не задана. Предполагаем достаточную гладкость функций $u(x)$ и $\Phi(x)$.

Представление (1.2) имеет место для решения сингулярно возмущенной краевой задачи (см. [5], [6]):

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B,$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-00618, 11-01-00875).

где

$$a_1(x) \geq \alpha > 0, \quad a_2(x) \geq 0, \quad \varepsilon > 0,$$

функции a_1, a_2, f достаточно гладкие. В решении этой задачи можно выделить погранслойную составляющую $\Phi(x)$ таким образом, что производные функции $p(x)$ до некоторого порядка будут ограниченными равномерно по ε. При задании

$$\Phi(x) = \exp(-a_1(0)\varepsilon^{-1}x), \quad \gamma = -\varepsilon u'(0)/a_1(0)$$

для некоторой постоянной C выполнится условие $|p'(x)| \leq C$. Производные функции $\Phi(x)$ не являются равномерно ограниченными при малых значениях параметра ε. Под C и C_j подразумеваем положительные постоянные, не зависящие от ε и шага сетки.

В [7] приведены примеры функций вида (1.2), когда составные формулы трапеций и Симпсона имеют погрешность порядка $O(h)$. В случае функций с ограниченной четвертой производной составная формула Симпсона имеет погрешность порядка $O(h^4)$. В [7] построены аналоги формул трапеций и Симпсона, точные на погранслойной составляющей $\Phi(x)$. При построении подынтегральная функция приближалась не многочленом Лагранжа, а интерполянтом, точным на погранслойной составляющей $\Phi(x)$ (см. [8], [9]). В [10] таким же образом построен аналог формулы Ньютона–Котеса с четырьмя узлами, в [11] – с пятью узлами. Доказано, что построенные составные квадратурные формулы имеют погрешность порядка $O(h^{n-1})$, равномерно по составляющей $\Phi(x)$ и ее производным, где n – число узлов квадратурной формулы.

Представляет интерес исследование квадратурных формул, использующих в узлах как значение функции, так и значение производной, в случае интегрирования функций вида (1.2). В данной работе остановимся на анализе квадратурной формулы Эйлера.

Квадратурная формула Эйлера использует значения производной интегрируемой функции в узлах сетки и повышает точность составной формулы трапеций (см. [1]). Формула Эйлера с двумя узлами имеет вид

$$S_2(u) = \frac{b-a}{2}(u(a)+u(b)) + \frac{1}{12}(b-a)^2(u'(a)-u'(b)). \tag{1.3}$$

В соответствии с [2], для погрешности формулы (1.3) справедливо представление

$$I(u) - S_2(u) = \frac{1}{720}(b-a)^5 u^{(4)}(s), \quad s \in (a, b). \tag{1.4}$$

Пусть Ω – равномерная сетка интервала $[a, b]$:

$$\Omega = \{x_n : x_n = a + nh, n = 0, 1, \dots, N\}, \quad h = (b-a)/N.$$

На основе формулы (1.3) выпишем составную квадратурную формулу

$$S_2^c(u) = h\left(\frac{u_0 + u_N}{2} + u_1 + \dots + u_{N-1}\right) - \frac{h^2}{12}(u_N' - u_0'), \tag{1.5}$$

где $u_n = u(x_n)$, $u_n' = u'(x_n)$. В соответствии с (1.4), для составной формулы (1.5) справедлива оценка погрешности

$$\left|I(u) - S_2^c(u)\right| \leq \frac{1}{720}(b-a)h^4 \max_x \left|u^{(4)}(x)\right|, \quad x \in [a, b]. \tag{1.6}$$

В соответствии с (1.6), если производная $u^{(4)}(x)$ равномерно ограничена, то погрешность составной формулы Эйлера (1.5) будет порядка $O(h^4)$.

Покажем, что если производная $u^{(4)}(x)$ не является равномерно ограниченной, то погрешность может быть значительной. Пусть $[a, b] = [0, 1]$ и $u(x) = \exp(-x/\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Тогда имеем

$$\Delta = \int_0^h e^{-x/\varepsilon}dx - \frac{h}{2}(1 + e^{-h/\varepsilon}) + \frac{h^2}{12\varepsilon}(1 - e^{-h/\varepsilon}). \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что при $\varepsilon \ll h$ получаем

$$\Delta \approx -\frac{h}{2} + \frac{h^2}{12\varepsilon}.$$

Если производная $u^{(4)}(x)$ не является ограниченной при малых значениях ε, то при этом погрешность формулы Эйлера (1.5) оказывается значительной.

Модифицируем квадратурную формулу Эйлера для интегрирований функций вида (1.2) с погранслойной составляющей.

2. АНАЛОГ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МНОГОЧЛЕНА ЭРМИТА ДЛЯ ФУНКЦИИ С ПОГРАНСЛОЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

Построим аналог интерполяционного многочлена Эрмита, который будет использоваться при построении квадратурной формулы. Рассмотрим полином Эрмита $H(u, x)$ на интервале $[a, b]$, удовлетворяющий условиям интерполяции функции $u(x)$ и производной $u'(x)$ на концах интервала:

$$H(u, x) = u(a) + u'(a)(x-a) + \frac{u'(b) - u'(a)}{2(b-a)}(x-a)^2 +$$
$$+ \left[u(b) - u(a) - \frac{b-a}{2}(u'(a) + u'(b))\right]\frac{(x-a)^2}{(b-a)^3}(3b - a - 2x).$$

Используем известную оценку погрешности приближения функции интерполяционного многочлена Эрмита (см. [12, с. 115]) на интервале $[x_{n-1}, x_n]$:

$$|u(x) - H(u, x)| \le \frac{1}{384}\max_x\left|u^{(4)}(x)\right|h^4, \quad x \in [x_{n-1}, x_n].$$

Если производная $u^{(4)}(x)$ является равномерно ограниченной, то формула интерполяции многочленом Эрмита имеет погрешность порядка $O(h^4)$. Рассмотрим погрешность интерполяции функции погранслойного вида $u(x) = \exp(-x/\varepsilon)$ на сеточном интервале $[0, h]$. Тогда при $\varepsilon = h$ имеем

$$H(u, h/2) - u(h/2) \approx 0.66$$

независимо от шага h. При $\varepsilon \ll h$ погрешность интерполяции будет порядка $O(h/\varepsilon)$. Таким образом, применение интерполяции Эрмита приводит к существенным погрешностям, если интерполируемая функция содержит погранслойную составляющую.

Для того чтобы погрешность интерполяции не зависела от погранслойного изменения интерполируемой функции, построим аналог интерполяционного многочлена Эрмита, точный на погранслойной составляющей. Итак, на интервале $[a, b]$ построим интерполянт $H_\Phi(u, x)$, точный на составляющей $\Phi(x)$, с условиями интерполяции

$$H_\Phi(u, a) = u(a), \quad H'_\Phi(u, a) = u'(a), \quad H_\Phi(u, b) = u(b), \quad H'_\Phi(u, b) = u'(b). \tag{2.1}$$

Интерполянт $H_\Phi(u, x)$ строим в виде

$$H_\Phi(u, x) = L(u, x) + d[\Phi(x) - L(\Phi, x)], \tag{2.2}$$

где многочлен

$$L(u, x) = u(a) + u'(a)(x-a) + \frac{1}{2(b-a)}[u'(b) - u'(a)](x-a)^2$$

построен с учетом условий интерполяции

$$L(u, a) = u(a), \quad L'(u, a) = u'(a), \quad L'(u, b) = u'(b).$$

Выполняя условие $H_\Phi(u, b) = u(b)$, находим

$$d = \frac{u(b) - u(a) - (b-a)(u'(a) + u'(b))/2}{\Phi(b) - \Phi(a) - (b-a)(\Phi'(a) + \Phi'(b))/2}. \tag{2.3}$$

По построению условия интерполяции (2.1) для функции (2.2) выполнены, интерполяционная формула (2.2) точна на функции $\Phi(x)$.

Покажем, что если $\Phi^{(3)}(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то знаменатель в (2.3) не обращается в нуль. Для погрешности формулы трапеций справедливо представление:

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - I(f) = \frac{1}{2}\int_a^b (b-t)(t-a)f''(t)dt, \quad f \in C^2[a, b]. \tag{2.4}$$

Учитывая (2.4), получаем

$$\Phi(b) - \Phi(a) - (b-a)\frac{\Phi'(a)+\Phi'(b)}{2} = -\frac{1}{2}\int_a^b (b-t)(t-a)\Phi^{(3)}(t)dt. \tag{2.5}$$

В соответствии с (2.5), если $\Phi^{(3)}(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$, то знаменатель в (2.3) не обращается в нуль и формула (2.2) определена корректно.

Проведем обоснование точности построенного интерполянта (2.2).

Лемма 1. *Пусть для функции* $u(x)$ *справедливо представление* (1.2), $\Phi^{(3)}(x) \neq 0$ *на интервале* (a, b). *Тогда для интерполянта* (2.2) *справедлива оценка погрешности*

$$|H_\Phi(u, x) - u(x)| \le \frac{5}{8}(b-a)^2\int_a^b |p^{(3)}(t)|dt. \tag{2.6}$$

Доказательство. Интерполянт $H_\Phi(u, x)$ точен на составляющей $\Phi(x)$, поэтому имеем

$$\begin{gathered} H_\Phi(u, x) - u(x) = H_\Phi(p, x) - p(x) = [L(p, x) - p(x)] + \\ + \left[p(b) - p(a) - (b-a)\frac{p'(a)+p'(b)}{2}\right]G(x), \end{gathered} \tag{2.7}$$

где

$$G(x) = \frac{\Phi(x) - \Phi(a) - \Phi'(a)(x-a) - (\Phi'(b) - \Phi'(a))(x-a)^2/(2(b-a))}{\Phi(b) - \Phi(a) - (b-a)(\Phi'(a) - \Phi'(b))/2}. \tag{2.8}$$

Без потери общности будем считать, что

$$\Phi^{(3)}(x) < 0, \quad x \in (a, b), \tag{2.9}$$

случай $\Phi^{(3)}(x) > 0$ рассматривается аналогично. Докажем, что

$$0 \le G(x) \le 1, \quad x \in (a, b). \tag{2.10}$$

Очевидно, что $G(a) = 0$, $G(b) = 1$. Докажем, что $G(x)$ возрастает на (a, b). Пусть $R(x)$ – функция, соответствующая числителю в (2.8). Тогда

$$R'(x) = (x-a)(\Theta(x) - \Theta(b)), \quad \Theta(x) = (\Phi'(x) - \Phi'(a))/(x-a).$$

Учитывая условие (2.9), несложно убедиться, что функция $\Theta(x)$ – убывающая на (a, b). Следовательно, $R'(x) \ge 0$. В соответствии с (2.5), (2.9), знаменатель в (2.8) положителен. Следовательно, $G(x)$ возрастает на $[a, b]$, что доказывает (2.10).

Оценим первое слагаемое в (2.7). Имеем:

$$L(p, x) - p(x) = p(a) - p(x) + p'(a)(x-a) + \frac{1}{2(b-a)}[p'(b) - p'(a)](x-a)^2 =$$

$$= \int_a^x \left[p'(a) - p'(s) + \frac{p'(b) - p'(a)}{b-a}(s-a)\right]ds = \int_a^x\int_a^s \left[\frac{p'(b) - p'(a)}{b-a} - p''(t)\right]dtds.$$

Следовательно,

$$L(p, x) - p(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^x\int_a^s\int_a^b\int_t^r p^{(3)}(\rho)d\rho drdtds. \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что

$$|L(p, x) - p(x)| < \frac{1}{b-a}\int_a^x\int_a^s\int_a^b\int_a^b |p^{(3)}(\rho)|d\rho drdtds.$$

Интегрируя, получаем, что

$$|L(p, x) - p(x)| < \frac{(x-a)^2}{2} \int_a^b |p^{(3)}(\rho)| d\rho. \tag{2.12}$$

Оценим второе слагаемое в (2.7). Соотношение (2.5) справедливо и для функции $p(x)$. Следовательно, имеем

$$\left| p(b) - p(a) - (b-a)\frac{p'(a) + p'(b)}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} \int_a^b (b-t)(t-a) p^{(3)}(t) dt \right| \le \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b |p^{(3)}(t)| dt. \tag{2.13}$$

Учитывая в (2.7) оценки (2.10), (2.12), (2.13), получаем оценку (2.6). Лемма доказана.

В соответствии с (2.6) получена оценка погрешности интерполяционной формулы (2.2)–(2.3), равномерная по погранслойной составляющей $\Phi(x)$ и ее производным.

Применим построенную формулу (2.2) к произвольному сеточному интервалу $[x_{n-1}, x_n]$. Если $\Phi^{(3)}(x) \neq 0$ при $x \in \{x_{n-1}, x_n)$, то в соответствии с леммой 1 справедливы оценки погрешности интерполяции

$$|H_\Phi(u, x) - u(x)| \le \frac{5}{8} h^2 \int_{x_{n-1}}^{x_n} |p^{(3)}(t)| dt, \quad |H_\Phi(u, x) - u(x)| \le \frac{5}{8} h^3 \max_t |p^{(3)}(t)|,$$

где $x, t \in [x_{n-1}, x_n]$. Если производная $p^{(3)}(t)$ не является равномерно ограниченной, то предпочтительнее первая из этих оценок погрешности.

3. МОДИФИКАЦИЯ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

На основе интерполянта (2.2) для вычисления интеграла (1.1) построим квадратурную формулу:

$$S_\Phi(u) = \int_a^b H_\Phi(u, x) dx.$$

Подставляя $H_\Phi(u, x)$ из (2.2) и интегрируя, получаем

$$\begin{gathered} S_\Phi(u) = (b-a)u(a) + \frac{(b-a)^2}{6}(2u'(a) + u'(b)) - \\ - d\left[(b-a)\Phi(a) + \frac{(b-a)^2}{6}(2\Phi'(a) + \Phi'(b)) - \int_a^b \Phi(x) dx\right], \end{gathered} \tag{3.1}$$

где d соответствует (2.3). Несложно убедиться, что квадратурная формула (3.1) точна на многочленах второй степени и на функции $\Phi(x)$.

Учитывая (3.1), определим

$$M = \frac{\int_a^b \Phi(x) dx - \left((b-a)\Phi(a) + \frac{(b-a)^2}{6}(2\Phi'(a) + \Phi'(b))\right)}{\left[\Phi(b) - \Phi(a) - \frac{1}{2}(\Phi'(a) + \Phi'(b))(b-a)\right](b-a)}. \tag{3.2}$$

Лемма 2. *Пусть* $\Phi^{(3)}(x) \neq 0$ *на интервале* (a, b). *Тогда погрешность формулы* (3.1) *представима в виде*

$$S_\Phi(u) - I(u) = \frac{1}{6} \int_a^b (b-t)(t-a)[2b - a - t - 3M(b-a)] P^{(3)}(t) dt, \tag{3.3}$$

причем

$$0 < M < \frac{2}{3}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Учитывая, что формула (3.1) точна на погранслойной составляющей $\Phi(x)$, получаем

$$S_\Phi(u) - I(u) = S_\Phi(p) - I(p) = \left((b-a)p(a) + \frac{(b-a)^2}{6}(2p'(a) + p'(b)) - \int_a^b p(x)dx\right) + \\ + M(b-a)\left((p(b) - p(a)) - \frac{1}{2}(p'(a) + p'(b))(b-a)\right). \tag{3.5}$$

Докажем неравенство (3.4). Остановимся на случае ограничения (2.9). В соответствии с (2.5), знаменатель в выражении (3.2) положителен.

Докажем, что и числитель в (3.2) положителен. Для этого используем точное выражение для погрешности квадратурной формулы в соответствии с [3, с. 99]. Пусть для достаточно гладкой функции $f(x)$ задана квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx s_2(f, f') = p_{1,0}f(a) + p_{1,1}f'(a) + p_{2,0}f(b) + p_{2,1}f'(b),$$

которая точна на многочленах степени $r-1$. Тогда в соответствии с [3] имеем

$$\int_a^b f(x)dx - s_2(f, f') = \int_a^b F_r(t)f^{(r)}(t)dt,$$

где

$$F_r(t) = \frac{1}{r!}[(b-t)^r - q_{1,0}K_r(a-t) - q_{1,1}K_{r-1}(a-t) - q_{2,0}K_r(b-t) - q_{2,1}K_{r-1}(b-t)],$$

$$q_{k,j} = p_{k,j}\frac{r!}{(r-j-1)!}, \quad K_r(t) = t^{r-1}, \text{ если } t \ge 0; \quad K_r(t) = 0, \text{ если } t \le 0.$$

В случае формулы

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{6}(2f'(a) + f'(b))$$

имеем

$$r = 3, \quad p_{1,0} = b-a, \quad p_{1,1} = (b-a)^2/3, \quad p_{2,0} = 0, \quad p_{2,1} = (b-a)^2/6.$$

Следовательно, $q_{2,0} = 0$, $q_{2,1} = (b-a)^2$. Получаем, что

$$F_3(t) = \frac{1}{6}(b-t)[(b-t)^2 - (b-a)^2] \le 0, \quad a \le t \le b. \tag{3.6}$$

Итак, мы доказали, что имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx - \left((b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{6}(2f'(a) + f'(b))\right) = \int_a^b F_3(t)f^{(3)}(t)dt, \tag{3.7}$$

где $F_3(t)$ соответствует (3.6) и $f(x) \in C^3[a, b]$.

Задавая в (3.7) $f(t) = \Phi(t)$ и учитывая (3.6), получаем

$$\int_a^b \Phi(x)dx - \left((b-a)\Phi(a) + \frac{(b-a)^2}{6}(2\Phi'(a) + \Phi'(b))\right) = \\ = \frac{1}{6}\int_a^b (b-t)[(b-t)^2 - (b-a)^2]\Phi^{(3)}(t)dt. \tag{3.8}$$

Учитывая (2.9), (3.8), получаем, что и числитель в выражении (3.2) положителен. Итак, мы доказали, что $M > 0$.

Учитывая соотношения (2.5), (2.9), (3.2) и (3.8), получаем, что условие $M < 2/3$ равносильно верному неравенству

$$\int_a^b (b-t)(t-a)^2 \Phi^{(3)}(t)dt < 0.$$

Оценка (3.4) доказана.

Вернемся к соотношению (3.5). Используя в (3.8) функцию $p(x)$ вместо $\Phi(x)$, получаем

$$(b-a)p(a) + \frac{(b-a)^2}{6}(2p'(a) + p'(b)) - \int_a^b p(x)dx = \\ = \frac{1}{6}\int_a^b (b-t)[(b-a)^2 - (b-t)^2]p^{(3)}(t)dt. \tag{3.9}$$

Используя в (2.5) функцию $p(x)$ вместо $\Phi(x)$, получаем

$$p(b) - p(a) - (b-a)\frac{p'(a) + p'(b)}{2} = -\frac{1}{2}\int_a^b (b-t)(t-a)p^{(3)}(t)dt. \tag{3.10}$$

Учитывая соотношения (3.9), (3.10) в (3.5), получаем (3.3). Лемма доказана.

Замечание. Покажем, что если не накладывать дополнительных ограничений на $\Phi(x)$, то оценка $M < 2/3$ в (3.4) не улучшаема. Учитывая соотношения (2.5), (2.9), (3.2) и (3.8), несложно убедиться, что неравенство $M < \alpha$ равносильно следующему:

$$\int_a^b \frac{1}{2}(b-t)(t-a)\left[\alpha(b-a) - \frac{1}{2}(2b-a) + \frac{t}{3}\right]\Phi^{(3)}(t)dt < 0. \tag{3.11}$$

Для выполнения неравенства (3.11) без дополнительных ограничений на $\Phi(x)$ потребуем, чтобы в (3.11) выражение в квадратных скобках было неотрицательно. Это выражение минимально при $t = a$. Условие неотрицательности этого выражения при $t = a$ равносильно неравенству $\alpha \ge 2/3$. Следовательно, оценка $M < 2/3$ является точной.

Получим оценки погрешности формулы (3.1) на основе (3.3). Учитывая (3.4), несложно показать, что

$$|2b - a - t - 3M(b-a)| \le 2(b-a). \tag{3.12}$$

Следовательно,

$$|S_\Phi(u) - I(u)| \le \frac{(b-a)^3}{12}\int_a^b |p^{(3)}(t)|dt.$$

Если производная $p^{(3)}(x)$ равномерно ограничена, то, используя неравенство (3.12), из (3.3) получаем

$$|S_\Phi(u) - I(u)| \le \max_x |p^{(3)}(x)|\frac{(b-a)^4}{18}. \tag{3.13}$$

Погрешность формулы (3.1) можно оценить через вторую производную функции $p(x)$. Такая оценка может быть полезной, если производная $p^{(3)}(x)$ имеет большие градиенты или не существует. Преобразуем интеграл в (3.3) интегрированием по частям и получим

$$S_\Phi(u) - I(u) = \frac{1}{6}\int_a^b [3M(b-a)(b-2t+a) + (b-a)^2 - 3(b-t)^2]p''(t)dt. \tag{3.14}$$

Рассматривая в (3.14) выражение в квадратных скобках как функцию переменной $t \in [a, b]$ и учитывая ограничение (3.4), несложно показать, что

$$|3M(b-a)(b-2t+a) + (b-a)^2 - 3(b-t)^2| \le 2(b-a)^2.$$

Следовательно,

$$|S_\Phi(u) - I(u)| \le \frac{(b-a)^2}{3}\int_a^b |p''(t)|dt.$$

Построенную формулу (3.1) можно записать в виде

$$S_\Phi(u) = (b-a)\left[(1-M)u(a) + Mu(b) + (b-a)\left(\frac{1}{3} - \frac{M}{2}\right)u'(a) + (b-a)\left(\frac{1}{6} - \frac{M}{2}\right)u'(b)\right], \qquad (3.15)$$

где M вычисляется согласно (3.2). Формула (3.15) переходит в формулу Эйлера (1.3), если $M = 1/2$.

4. СОСТАВНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА

Используя квадратурную формулу (3.15), получаем:

$$I_n(u) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} u(x)dx \approx S_{\Phi,n}(u) = h\left[(1-M_n)u_{n-1} + M_n u_n + h\left(\frac{1}{3} - \frac{M_n}{2}\right)u'_{n-1} + h\left(\frac{1}{6} - \frac{M_n}{2}\right)u'_n\right], \qquad (4.1)$$

где

$$M_n = \frac{h\Phi_{n-1} + h^2(2\Phi'_{n-1} + \Phi'_n)/6 - \int_{x_{n-1}}^{x_n}\Phi(x)dx}{[h(\Phi'_{n-1} + \Phi'_n)/2 - (\Phi_n - \Phi_{n-1})]h}.$$

Если $\Phi^{(3)}(x)$ на интервале (x_{n-1}, x_n) не меняет знак, то, в соответствии с (3.13), справедлива оценка

$$|I_n(u) - S_{\Phi,n}(u)| \le \frac{1}{18}\max_x |p^{(3)}(x)|h^4, \quad x \in [x_{n-1}, x_n]. \qquad (4.2)$$

Используя (4.1), определим составную квадратурную формулу:

$$S^c_\Phi(u) = \sum_{n=1}^{N} S_{\Phi,n}(u). \qquad (4.3)$$

Учитывая оценку (4.2), получаем

$$|I(u) - S^c_\Phi(u)| \le \frac{1}{18}(b-a)\max_x |p^{(3)}(x)|h^3, \quad x \in [a, b]. \qquad (4.4)$$

Оценка погрешности (4.4) равномерна по погранслойной составляющей $\Phi(x)$ и ее производным.

При построении составной квадратурной формулы на сеточных интервалах вне области пограничного слоя можно применить классическую формулу (1.3), а в пограничном слое – построенную формулу (3.15). Это повышает точность составной квадратурной формулы. Для определенности рассмотрим случай, когда функция $\Phi(x)$ соответствует погранслойному изменению $u(x)$ в окрестности точки $x = a$. Пусть $[a, a + \sigma]$ – область пограничного слоя, где параметр σ выбран так, чтобы для некоторой постоянной C_0 при всех $x \ge a + \sigma$ выполнялось неравенство $|u^{(4)}(x)| \le C_0$. Пусть

$$m = \min_n \{n : x_n \ge a + \sigma\}.$$

Определим комбинированную составную квадратурную формулу:

$$\tilde{S}^c_\Phi(u) = \sum_{n=1}^{m} S_{\Phi,n}(u) + h\left(\frac{u_m + u_N}{2} + u_{m+1} + \ldots + u_{N-1}\right) - \frac{h^2}{12}(u'_N - u'_m). \qquad (4.5)$$

Учитывая (1.4), (4.2), получаем

$$|I(u) - \tilde{S}^c_\Phi(u)| \le \frac{m}{18}\max_x |p^{(3)}(x)|h^4 + \frac{N-m}{720}C_0 h^5. \qquad (4.6)$$

В соответствии с (4.6) погрешность квадратурной формулы (4.5) будет порядка $O(h^4)$ если в пограничном слое расположено ограниченное число узлов сетки ($m \ll N$).

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Остановимся на вычислении интеграла

$$I(u) = \int_0^1 u(x)dx, \quad u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + \exp(-x/\varepsilon)$$

при различных значениях параметра $\varepsilon \in (0, 1]$. Подынтегральная функция соответствует представлению (1.2) при задании $\Phi(x) = \exp(-x/\varepsilon)$. Функция $\Phi(x)$ при малых значениях ε соответствует экспоненциальному пограничному слою (см. [6]) у границы $x = 0$. В таблицах $e \pm m$ соответствует $10^{\pm m}$.

В табл. 1 приведена погрешность $\Delta_{h,\varepsilon} = |I(u) - S_2^c(u)|$ формулы Эйлера (1.5) в зависимости от ε и h. Из табл. 1 следует, что погрешность составной формулы Эйлера на равномерной сетке пропорциональна ε^{-1}.

В табл. 2 приведены погрешность и вычисленный порядок точности $CR_{h,\varepsilon} = \log_2(\Delta_{h,\varepsilon}/\Delta_{h/2,\varepsilon})$ построенной формулы (4.3) в зависимости от ε и h. Порядок точности формулы (4.3) понижается с четвертого до третьего с уменьшением ε, что соответствует оценке погрешности (4.4).

Таблица 1. Погрешность составной формулы Эйлера (1.5)

ε	h					
	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}
1	1.53e–6	9.55e–8	5.97e–9	3.73e–10	2.33e–11	1.46e–12
10^{-1}	3.28e–4	2.11e–5	1.33e–6	8.31e–8	5.19e–9	3.25e–10
10^{-2}	7.77e–2	1.12e–2	1.08e–3	7.82e–5	5.10e–6	3.22e–7
10^{-3}	1.24	2.95e–1	6.68e–2	1.35e–2	2.18e–3	2.38e–4
10^{-4}	1.30e+1	3.22	7.98e–1	1.96e–1	4.71e–2	1.08e–2
10^{-5}	1.30e+2	3.25e+1	8.12	2.03	5.05e–1	1.25e–1
10^{-6}	1.30e+3	3.25e+2	8.14e+1	2.03e+1	5.08	1.27

Таблица 2. Погрешность и вычисленный порядок точности формулы (4.3)

ε	h					
	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}
1	2.15e–6	1.34e–7	8.40e–9	5.25e–10	3.28e–11	2.04e–12
	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.4
10^{-1}	9.60e–6	6.04e–7	3.78e–8	2.36e–9	1.48e–10	9.23e–12
	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
10^{-2}	4.89e–5	4.29e–6	3.11e–7	2.04e–8	1.29e–9	8.10e–11
	3.5	3.8	3.9	4.0	4.0	4.0
10^{-3}	6.62e–5	7.92e–6	9.22e–7	1.00e–7	9.41e–9	7.25e–10
	3.1	3.1	3.2	3.4	3.7	3.9
10^{-4}	6.81e–5	8.40e–6	1.04e–6	1.28e–7	1.55e–8	1.84e–9
	3.0	3.0	3.0	3.0	3.1	3.2
10^{-5}	6.83e–5	8.44e–6	1.05e–6	1.31e–7	1.63e–8	2.02e–9
	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0
10^{-6}	6.83e–5	8.45e–6	1.05e–6	1.31e–7	1.64e–8	2.04e–9
	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0

Таблица 3. Погрешность и вычисленный порядок точности формулы (4.5)

ε	h					
	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}
10^{-1}	9.60e–6	5.53e–7	3.46e–8	2.12e–9	1.32e–10	8.27e–12
	4.1	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
10^{-2}	4.94e–6	2.63e–7	1.83e–8	1.19e–9	7.48e–11	4.69e–12
	4.2	3.8	3.9	4.0	4.0	4.0
10^{-3}	2.56e–6	1.20e–7	6.24e–9	4.41e–10	3.14e–11	2.12e–12
	4.4	4.3	3.8	3.8	3.9	4.0
10^{-4}	2.60e–6	1.22e–7	6.38e–9	3.59e–10	2.12e–11	1.29e–12
	4.4	4.3	4.2	4.1	4.0	4.0
10^{-5}	2.60e–6	1.22e–7	6.39e–9	3.60e–10	2.13e–11	1.29e–12
	4.4	4.3	4.1	4.1	4.0	4.0
10^{-6}	2.60e–6	1.22e–7	6.39e–9	3.60e–10	2.13e–11	1.29e–12
	4.4	4.3	4.1	4.1	4.0	4.0

В табл. 3 приведены погрешность и вычисленный порядок точности $CR_{h,\varepsilon}$ комбинированной формулы (4.5) в зависимости от ε и h. Для того чтобы производная $\Phi^{(4)}(x)$ была ограниченной вне пограничного слоя, выбрано $\sigma = -4\varepsilon\ln\varepsilon$. С уменьшением параметра ε сохраняется четвертый порядок точности формулы (4.5). Это соответствует оценке (4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березин И.С, Жидков Н.П.* Методы вычислений. М.: Наука, 1966.
2. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.
3. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1972.
4. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Квадратурная формула Эйлера для функции с погранслойной составляющей на кусочно-равномерной сетке // Сибирск. электронные матем. изв. 2013. Т. 10. С. 491–503.
5. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
6. *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems: error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Singapore: World Scientific Publishing, 2012.
7. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Квадратурные формулы для функций с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 11. С. 1952–1962.
8. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 221–233.
9. *Zadorin A.I., Zadorin N.A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Сибирск. электронные матем. изв. 2012. Т. 9. С. 445–455.
10. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Аналог формулы Ньютона–Котеса с четырьмя узлами для функции с погранслойной составляющей // Сибирск. ж. вычисл. матем. 2013. Т. 16. № 4. С. 313–323.
11. *Zadorin A., Zadorin N.* Quadrature formula with five nodes for functions with a boundary layer component // Lect. Notes in Comput. Sci. Berlin: Springer, 2013. V. 8236. P. 540–546.
12. *Ильин В.П.* Численный анализ. Новосибирск: ИВМ и МГ СО РАН, 2004.