Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. И. Задорин, Н. А. Задорин, Аналог формулы Ньютона–Котеса с четырьмя узлами для функции с погранслойной составляющей, *Сиб. журн. вычисл. матем.*, 2013, том 16, номер 4, 313–323

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 217.79.53.22
20 января 2017 г., 14:18:45

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2013. Т. 16, № 4

УДК 519.644

Аналог формулы Ньютона–Котеса с четырьмя узлами для функции с погранслойной составляющей*

А.И. Задорин, Н.А. Задорин

Омский филиал Института математики Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Певцова, 13, 644099, Омск

E-mails: zadorin@ofim.oscsbras.ru (Задорин А.И.), nik-zadorin@yandex.ru (Задорин Н.А.)

Задорин А.И., Задорин Н.А. Аналог формулы Ньютона–Котеса с четырьмя узлами для функции с погранслойной составляющей // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 4. — С. 313–323.

Построение квадратурных формул Ньютона–Котеса основано на приближении подынтегральной функции полиномом Лагранжа. В случае функции с погранслойной составляющей применение таких формул может привести к большим погрешностям. В работе строится аналог формулы Ньютона–Котеса с четырьмя узлами. Построение основано на использовании неполиномиальной интерполяции, точной на погранслойной составляющей. Получены оценки точности квадратурной формулы, не зависящие от градиентов погранслойной составляющей. Проведены численные эксперименты.

Ключевые слова: *функция одной переменной, погранслойная составляющая, большие градиенты, определенный интеграл, неполиномиальная интерполяция, квадратурная формула, оценка погрешности.*

Zadorin A.I., Zadorin N.A. An analogue of Newton–Cotes formula with four nodes for a function with a boundary-layer component // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 4. — P. 313–323.

The construction of the Newton–Cotes formulas is based on approximating an integrand by the Lagrange polynomial. The error of such quadrature formulas can be serious for a function with a boundary-layer component. In this paper, an analogue to the Newton–Cotes rule with four nodes is constructed. The construction is based on using non-polynomial interpolation that is accurate for a boundary layer component. Estimates of the accuracy of the quadrature rule, uniform on gradients of the boundary layer component, are obtained. Numerical experiments have been performed.

Key words: *one-variable function, boundary-layer component, high gradients, definite integral, non-polynomial interpolation, quadrature rule, error estimate.*

1. Введение

Построение квадратурных формул Ньютона–Котеса основано на приближении интегрируемой функции многочленом Лагранжа. Погрешность таких составных квадратурных формул, как известно, в случае больших градиентов интегрируемой функции и равномерной сетки, может быть значительной. Вопрос построения квадратурных формул для функций с особенностями исследовался в целом ряде работ, например [1, 2].

В [3–5] исследовался вопрос построения формул сплайн-интерполяции для функций с погранслойной составляющей и предложено строить формулы сплайн-интерполяции,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00726, № 11-01-00875).

© Задорин А.И., Задорин Н.А., 2013

точные на погранслойной составляющей. В [6] показано, что использование формул Ньютона–Котеса при интегрировании функций с погранслойной составляющей может приводить к понижению точности этих формул до величины порядка $O(h)$. Предложено строить квадратурные формулы на основе формул неполиномиальной интерполяции, полученных в [3–5]. В [6] построены квадратурные формулы с двумя и тремя узлами и показано, что погрешность этих формул не зависит от градиентов погранслойной составляющей. В данной работе аналогичным образом строится квадратурная формула с четырьмя узлами и оценивается ее погрешность.

Итак, будем строить квадратурную формулу для вычисления интеграла

$$I(u) = \int_a^b u(x)\,dx \tag{1.1}$$

в случае функции $u(x)$, имеющей представление

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [a,b]. \tag{1.2}$$

Предполагаем, что $u(x) \in C^4[a,b]$, погранслойная составляющая $\Phi(x)$ известна, ограничена и имеет области больших градиентов, регулярная составляющая $p\,(x)$ ограничена вместе с некоторыми производными, постоянная γ не задана. Представление (1.2) имеет место, например, для решений сингулярно-возмущенных краевых или начальных задач [7–9].

Для примера рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{1.3}$$

где

$$a_1(x) \ge \alpha > 0, \qquad a_2(x) \ge 0, \quad \varepsilon > 0,$$

функции a_1, a_2, f — достаточно гладкие. Согласно [7–9], при малых значениях параметра ε решение задачи (1.3) имеет экспоненциальный пограничный слой у левой границы интервала $x = 0$, и для решения $u(x)$ справедливо представление (1.2) при задании:

$$\Phi(x) = \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x), \quad a_0 = a_1(0), \quad \gamma = -\varepsilon u'(0)/a_0. \tag{1.4}$$

При этом постоянная γ в явном виде не задана, $|p'(x)| \le C_0$, $|\gamma| \le C_1$.

Всюду в работе под C и C_j, $j \ge 0$, будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от погранслойной составляющей и ее производных, а также от шагов разностной сетки.

2. Построение и обоснование квадратурной формулы

Остановимся на вопросе построения для интеграла (1.1) квадратурной формулы с четырьмя равноотстоящими узлами в случае функции вида (1.2). Пусть

$$c = a + \tau, \qquad d = a + 2\tau, \qquad \tau = \frac{b-a}{3}.$$

Выпишем формулу Ньютона–Котеса с четырьмя равноотстоящими узлами

$$S_4(u) = \frac{b-a}{8}[u(a) + 3u(c) + 3u(d) + u(b)]. \tag{2.1}$$

Погрешность формулы (2.1) удовлетворяет соотношению [10]:

$$S_4(u) - I(u) = \frac{3}{80}\left(\frac{b-a}{3}\right)^5 u^{(4)}(s), \quad \exists\, s \in [a,b]. \tag{2.2}$$

Пусть Ω — равномерная сетка интервала $[a,b]$ с узлами $\{x_n\}$, $0 \le n \le N$, и шагом h, $h = (b-a)/N$, N кратно трем. Предполагаем известными значения $u_n = u(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Построим составную квадратурную формулу для вычисления интеграла (1.1), используя формулу (2.1) на каждом интервале длины $3h$:

$$S_4^c(u) = \frac{3h}{8}\sum_{n=1,3}^{N-2}(u_{n-1} + 3u_n + 3u_{n+1} + u_{n+2}). \tag{2.3}$$

Для формулы (2.3) справедлива оценка погрешности, соответствующая (2.2):

$$|R_4^c(u)| = |I(u) - S_4^c(u)| \le \frac{b-a}{80}\max_{x\in[a,b]}|u^{(4)}(x)|h^4. \tag{2.4}$$

Согласно (2.4), составная формула (2.3) имеет погрешность порядка $O(h^4)$, если производная $u^{(4)}(x)$ равномерно ограничена. Но при наличии погранслойной составляющей эта производная может быть сколь угодно большой, что сказывается на точности квадратурной формулы.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию $u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$, $\varepsilon > 0$. Тогда погрешность формулы (2.1) для сеточного интервала $[0, 3h]$ имеет вид

$$\Delta = \varepsilon(1 - \exp(-3h/\varepsilon)) - \frac{3h}{8}[1 + 3\exp(-h/\varepsilon) + 3\exp(-2h/\varepsilon) + \exp(-3h/\varepsilon)].$$

Следовательно, при $\varepsilon \ll h$ погрешность $\Delta \approx -3h/8$. Таким образом, при $\varepsilon = 1$ формула (2.3) имеет погрешность порядка $O(h^4)$, и эта погрешность увеличивается до величины порядка $O(h)$ с уменьшением параметра ε.

Проведем модификацию формулы (2.1) с учетом того, чтобы она стала точной на составляющей $\Phi(x)$. Для этого для функции $u(x)$ построим формулу интерполяции, учитывающую значения в узлах $\{a, c, d, b\}$, и точную на составляющей $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned} u_\Phi(x) = u(a) &+ \frac{u(c)-u(a)}{\tau}(x-a) - \frac{u(d)-2u(c)+u(a)}{2\tau}(x-a) + \\ &\frac{[u(d)-2u(c)+u(a)](x-a)^2}{2\tau^2} + G\left[\frac{\Phi(d)-2\Phi(c)+\Phi(a)}{2\tau}(x-a) - \right. \\ &\left.\frac{\Phi(c)-\Phi(a)}{\tau}(x-a) - \frac{[\Phi(d)-2\Phi(c)+\Phi(a)](x-a)^2}{2\tau^2} + \Phi(x) - \Phi(a)\right], \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$G = \frac{u(b)-3u(d)+3u(c)-u(a)}{\Phi(b)-3\Phi(d)+3\Phi(c)-\Phi(a)}. \tag{2.6}$$

Исследуем на корректность выражение (2.6). Пусть $f \in C^3[a,b]$. Тогда найдется $s \in (a,b)$, при котором

$$f(b) - 3f(d) + 3f(c) - f(a) = \frac{1}{27}(b-a)^3 f^{(3)}(s). \tag{2.7}$$

Для обоснования (2.7) введем $w(x) = f(x+\tau) - f(x)$ и запишем

$$
\begin{aligned}
f(b) - 3f(d) + 3f(c) - f(a) &= (f(b) - f(d)) - 2(f(d) - f(c)) + (f(c) - f(a)) \\
&= w(d) - 2w(c) + w(a) = \tau^2 w''(r) = \tau^2 (f''(r+\tau) - f''(r)) = \tau^3 f'''(s).
\end{aligned}
$$

Мы воспользовались известным соотношением для разностного аналога второй производной и получили (2.7).

Следовательно, соотношение (2.6) корректно, если производная $\Phi'''(x)$ внутри интервала (a, b) не обращается в нуль.

Теперь, используя формулу (2.5), получим квадратурную формулу для интеграла (1.1), точную на погранслойной составляющей $\Phi(x)$:

$$
S_{\Phi,4}(u) = \int_a^b u_\Phi(x)\,dx. \tag{2.8}
$$

Подставляя (2.5) в (2.8) и интегрируя, получим

$$
S_{\Phi,4}(u) = \frac{b-a}{4}[u(a) + 3u(d)] + G\left[\int_a^b \Phi(x)\,dx - \frac{b-a}{4}[\Phi(a) + 3\Phi(d)]\right], \tag{2.9}
$$

где G определено в (2.6). Квадратурная формула (2.9) является точной на $\Phi(x)$.

Построенную формулу (2.9) можно рассматривать как формулу Радо с фиксированным левым узлом

$$
I(u) \approx \frac{b-a}{4}[u(a) + 3u(d)] \tag{2.10}
$$

с поправкой, чтобы квадратурная формула была точной на составляющей $\Phi(x)$.

Докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть $f \in C^3[a, b]$. Тогда для некоторого $s \in (a, b)$:*

$$
\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{4}[f(a) + 3f(d)] = \frac{(b-a)^4}{216} f^{(3)}(s). \tag{2.11}
$$

Доказательство. Пусть

$$
\Delta = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{4}[f(a) + 3f(d)].
$$

Формула (2.10) точна на многочленах второй степени, поэтому для вычисления погрешности Δ можно воспользоваться формулой (см. [11, с. 26]):

$$
\Delta = \int_a^b F_3(t) f^{(3)}(t)\,dt,
$$

где

$$
F_3(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{(b-t)^3}{3} - (b-a)\left(\frac{1}{4}K_3(a-t) + \frac{3}{4}K_3(d-t)\right)\right],
$$

$K_3(s) = s^2$ при $s \geq 0$ и $K_3(s) = 0$ при $s < 0$. Следовательно,

$$
\Delta = \frac{1}{2}\int_a^d R_1(t) f^{(3)}(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_d^b R_2(t) f^{(3)}(t)\,dt, \tag{2.12}
$$

где

$$R_1(t) = \frac{(b-t)^3}{3} - \frac{3}{4}(b-a)(d-t)^2, \qquad R_2(t) = \frac{(b-t)^3}{3}.$$

Докажем, что $R_1(t) \geq 0$, $a \leq t \leq d$. Найдем критическую точку из условия $R_1'(s) = 0$. Несложно убедиться, что $s = (a+b)/2$. Тогда

$$R_1(a) = 0, \quad R_1(s) = \frac{1}{48}(b-a)^3, \quad R_1(d) = \frac{1}{81}(b-a)^3.$$

Следовательно,

$$0 \leq R_1(t) \leq \frac{1}{48}(b-a)^3, \quad a \leq t \leq d, \qquad 0 \leq R_2(t) \leq \frac{1}{81}(b-a)^3, \quad d \leq t \leq b. \tag{2.13}$$

Так как $R_1(t)$, $R_2(t)$ неотрицательны (согласно (2.13)), то к интегралам в (2.12) можно применить теорему Лагранжа о среднем значении, тогда для некоторых s_1, s_2 имеем

$$\Delta = \frac{1}{2} f^{(3)}(s_1) \int_a^d R_1(t)\,dt \ + \frac{1}{2} f^{(3)}(s_2) \int_d^b R_2(t)\,dt.$$

Интегрируя, получим

$$\Delta = \frac{1}{3}\tau^4 f^{(3)}(s_1) + \frac{1}{24}\tau^4 f^{(3)}(s_2).$$

Коэффициенты в этой формуле положительны, поэтому найдется s, при котором

$$\Delta = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\right)\tau^4 f^{(3)}(s) = \frac{(b-a)^4}{216} f^{(3)}(s).$$ □

Теперь получим представление погрешности аналогичной формулы

$$I(f) \approx \frac{b-a}{4}[3f(c) + f(b)]. \tag{2.14}$$

Лемма 2. *Пусть $f \in C^3[a,b]$. Тогда для некоторого $s_1 \in (a,b)$:*

$$\Delta = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{4}[3f(c) + f(b)] = -\frac{(b-a)^4}{216} f^{(3)}(s_1). \tag{2.15}$$

По аналогии с предыдущей леммой получим

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_a^c R_1(t) f^{(3)}(t)\,dt \ + \frac{1}{2} \int_c^b R_2(t) f^{(3)}(t)\,dt,$$

где

$$R_1(t) = \frac{(b-t)^3}{3} - \frac{3}{4}(b-a)(c-t)^2 - \frac{1}{4}(b-a)(b-t)^2 \leq 0, \quad t \in [a,c],$$
$$R_2(t) = \frac{(b-t)^3}{3} - \frac{1}{4}(b-a)(b-t)^2 \leq 0, \quad t \in [c,b].$$

Применяя теорему о среднем и интегрируя, получим утверждение леммы.

Учитывая соотношения (2.11) и (2.15), заключаем, что квадратурные формулы (2.10) и (2.14) приближают интеграл $I(f)$ с разных сторон, если $f^{(3)}(x)$ не меняет знак на (a,b).

Оценим погрешность построенной формулы (2.9).

Лемма 3. *Пусть функция* $u(x)$ *имеет представление* (1.2), $\Phi(x) \in C^4[a,b]$. *Предположим, что*

$$\Phi^{(3)}(x) > 0, \qquad \Phi^{(4)}(x) > 0, \quad a < x < b, \tag{2.16}$$

или

$$\Phi^{(3)}(x) < 0, \qquad \Phi^{(4)}(x) < 0, \quad a < x < b. \tag{2.17}$$

Тогда

$$|R_{\Phi,4}(u)| = |S_{\Phi,4}(u) - I(u)| \le \frac{(b-a)^4}{108} \max_x |p^{(3)}(x)|, \quad a \le x \le b. \tag{2.18}$$

Доказательство. Остановимся на случае выполнения условий (2.16) (случай условий (2.17) аналогичен). Учитывая представление (1.2) для функции $u(x)$, для погрешности квадратурной формулы (2.9) получим соотношения:

$$\begin{aligned} R_{\Phi,4}(u) &= S_{\Phi,4}(u) - I(u) = R_{\Phi,4}(p) \\ &= [p(b) - 3p(d) + 3p(c) - p(a)](b-a)M + \left[\frac{b-a}{4}(p(a) + 3p(d)) - \int_a^b p(x)\,dx\right], \end{aligned} \tag{2.19}$$

где

$$M = \frac{\int_a^b \Phi(x)\,dx - \frac{b-a}{4}(\Phi(a) + 3\Phi(d))}{(b-a)(\Phi(b) - 3\Phi(d) + 3\Phi(c) - \Phi(a))}. \tag{2.20}$$

Докажем, что

$$0 < M < 1/8. \tag{2.21}$$

Неравенство $M > 0$ следует из (2.7), (2.11), (2.16), (2.20). Учитывая, что $\Phi^{(3)}(x) > 0$, получаем, что неравенство $M < 1/8$ равносильно неравенству $I(\Phi) < S_4(\Phi)$. Это неравенство справедливо в силу (2.2) и условий (2.16).

Итак, неравенство (2.21) имеет место. Тогда из (2.19), с учетом (2.7) и (2.11), получим

$$|R_{\Phi,4}(u)| \le \frac{1}{27}(b-a)^4 \max_x |p^{(3)}(x)| M + \frac{(b-a)^4}{216} \max_x |p^{(3)}(x)|.$$

Учитывая (2.21), получим утверждение леммы. □

Условия леммы 3 требуют, чтобы производные $\Phi^{(3)}(x)$ и $\Phi^{(4)}(x)$ имели одинаковый знак. В случае функции $\Phi(x)$ из (1.4), соответствующей экспоненциальному пограничному слою, это условие не выполнено. Получим оценку точности формулы (2.9) без ограничений на $\Phi^{(4)}(x)$.

Лемма 4. *Пусть функция* $u(x)$ *имеет представление* (1.2), *производная* $\Phi^{(3)}(x)$ *непрерывна и сохраняет знак на интервале* (a,b). *Тогда для формулы* (2.9) *справедлива оценка погрешности*

$$|R_{\Phi,4}(u)| \le \frac{3}{216}(b-a)^4 \max_x |p^{(3)}(x)|, \quad a \le x \le b. \tag{2.22}$$

Доказательство. Пусть для определенности $\Phi^{(3)}(x) > 0$, $x \in (a,b)$. Покажем, что при этом

$$0 < M < 1/4. \tag{2.23}$$

Первая часть этого неравенства обоснована в предыдущей лемме. Учитывая (2.20), (2.7), получаем, что условие $M < 1/4$ равносильно неравенству

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx < \frac{b-a}{4}[3\Phi(c)+\Phi(b)].$$

Это неравенство справедливо в силу соотношения (2.15). Учитывая (2.23), из (2.19) получим утверждение леммы. □

Для случая, когда производная $p^{(3)}(x)$ не является равномерно ограниченной, оценку погрешности формулы (2.9) можно получить в интегральном виде. Для этого используем выражение для погрешности (2.19). В соответствии с обоснованием (2.7) имеем

$$|f(b)-3f(d)+3f(c)-f(a)| = |w(d)-2w(c)+w(a)| \le \tau \int_a^d |w''(s)|\,ds.$$

Следовательно,

$$|f(b)-3f(d)+3f(c)-f(a)| \le \tau \int_a^d \int_s^{s+\tau} |f^{(3)}(r)|\,dr\,ds. \tag{2.24}$$

Из (2.12), (2.13) получим

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{4}[f(a)+3f(d)]\right| \le \frac{(b-a)^3}{96}\int_a^b |f^{(3)}(s)|\,ds. \tag{2.25}$$

Если $\Phi^{(3)}(x)$ на (a,b) сохраняет знак, то в соответствие с (2.19) и оценками (2.23), (2.24), (2.25) получим оценку погрешности формулы (2.9):

$$|R_{\Phi,4}(u)| \le \frac{(b-a)^2}{12}\int_a^d \int_s^{s+\tau} |p^{(3)}(r)|\,dr\,ds + \frac{(b-a)^3}{96}\int_a^b |p^{(3)}(s)|\,ds. \tag{2.26}$$

Квадратурную формулу (2.9) можно записать в виде

$$S_{\Phi,4}(u) = (b-a)\left[\left(\frac{1}{4}-M\right)u(a)+3Mu(c)+3\left(\frac{1}{4}-M\right)u(d)+Mu(b)\right], \tag{2.27}$$

где M соответствует (2.20). Из (2.27) следует формула (2.1) при $M = 1/8$. Если $\Phi^{(3)}(x)$ на интервале (a,b) сохраняет знак, то в силу (2.23) все коэффициенты формулы (2.27) положительны.

Получим оценку точности квадратурной формулы (2.27) без требования, чтобы оценка была равномерной по производным погранслойной составляющей. Пусть $L_4(x)$ — многочлен Лагранжа, учитывающий значения $u(a)$, $u(c)$, $u(d)$, $u(b)$. Из представления погрешности приближения функции $u(x)$ многочленом Лагранжа [2] следует, что для некоторого s_1:

$$u(x)-L_4(x) = \frac{1}{24}u^{(4)}(s_1)w_4(x),\ w_4(x) = (x-a)(x-c)(x-d)(x-b).$$

Аналогично для неполиномиального интерполянта (2.5):

$$u_\Phi(x)-L_4(x) = \frac{1}{24}u_\Phi^{(4)}(s_2)w_4(x).$$

Следовательно,

$$u(x)-u_\Phi(x) = \frac{1}{24}\left[u^{(4)}(s_1)-u_\Phi^{(4)}(s_2)\right]w_4(x). \tag{2.28}$$

Оценивая $w_4(x)$, из (2.28) получим

$$|u(x)-u_\Phi(x)|\le \frac{1}{1944}\big[\max_s|u^{(4)}(s)|+\max_s|u_\Phi^{(4)}(s)|\big](b-a)^4. \tag{2.29}$$

Учитывая, что интерполянт $u_\Phi(x)$ точен на составляющей $\Phi(x)$, на основе (2.29) получаем

$$|I(u)-S_{\Phi,4}(u)|\le \frac{1}{1944}\big[\max_s|p^{(4)}(s)|+\max_s|p_\Phi^{(4)}(s)|\big](b-a)^5. \tag{2.30}$$

3. Составная квадратурная формула

Используя сетку Ω, введенную после соотношения (2.2), построим составную квадратурную формулу на основе формулы (2.27):

$$S^c_{\Phi,4}(u)=3h\sum_{n=1,3}^{N-2}\left[\left(\frac14-M_n\right)u_{n-1}+3M_nu_n+3\left(\frac14-M_n\right)u_{n+1}+M_nu_{n+2}\right], \tag{3.1}$$

где

$$M_n=\frac{\int_{x_{n-1}}^{x_{n+2}}\Phi(x)\,dx-\frac{3h}{4}\Big(\Phi_{n-1}+3\Phi_{n+1}\Big)}{3h(\Phi_{n+2}-3\Phi_{n+1}+3\Phi_n-\Phi_{n-1})}. \tag{3.2}$$

Предположим, что $\Phi^{(3)}(x)$ не меняет знак на интервалах: (x_{n-1},x_{n+2}), $n=1,4,7,\dots,N-2$. Учитывая оценку погрешности на каждом интервале длины $3h$ в соответствии с леммой 4, получим

$$|I(u)-S^c_{\Phi,4}(u)|\le \frac38(b-a)\max_x|p^{(3)}(x)|h^3. \tag{3.3}$$

Если использовать оценку (2.30), то получим

$$|I(u)-S^c_{\Phi,4}(u)|\le \frac{1}{24}(b-a)\big[\max_s|p^{(4)}(s)|+\max_s|p_\Phi^{(4)}(s)|\big]h^4. \tag{3.4}$$

Таким образом, в соответствии с (3.3) построенная составная квадратурная формула (3.1) имеет погрешность порядка $O(h^3)$ равномерно по погранслойной составляющей и ее градиентам. Эта формула, согласно (3.4), обладает погрешностью порядка $O(h^4)$, если не учитывать равномерную точность по градиентам погранслойной составляющей.

При построении составной квадратурной формулы вне области пограничного слоя можно применить классическую формулу (2.1), а в пограничном слое — построенную формулу (2.27). Это повысит точность составной квадратурной формулы. Для определенности рассмотрим случай, когда функция $\Phi(x)$ соответствует погранслойному изменению $u(x)$ в окрестности точки $x=a$. Пусть $[a,a+\sigma]$ — область пограничного слоя, где параметр σ выбран так, чтобы для $x\ge a+\sigma$ и некоторой постоянной C_0 выполнилось $|u^{(4)}(x)|\le C_0$. Пусть

$$m=\min_n\{n: x_{n-1}\ge a+\sigma,\quad n-1 \text{ кратно трем }\}.$$

Тогда можно записать составную квадратурную формулу

$$\tilde S^c_{\Phi,4}(u)=3h\sum_{n=1,3}^{m-3}\left[\left(\frac14-M_n\right)u_{n-1}+3M_nu_n+3\left(\frac14-M_n\right)u_{n+1}+M_nu_{n+2}\right]+$$
$$\frac{3h}{8}\sum_{n=m,3}^{N-2}(u_{n-1}+3u_n+3u_{n+1}+u_{n+2}). \tag{3.5}$$

Учитывая (2.2) и (2.22), получим

$$|I(u) - \tilde{S}^c_{\Phi,4}(u)| \le \frac{3}{8}(m-1)\max_x |p^{(3)}(x)|h^4 + \frac{1}{80}(N-m+1)C_0h^5. \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, если функция $u(x)$ имеет большие градиенты и $m \ll N$ (в пограничном слое находится ограниченное количество сеточных интервалов), то погрешность формулы (3.5) будет порядка $O(h^4)$.

Например, в случае экспоненциального пограничного слоя, когда $\Phi(x)$ соответствует (1.4), $\sigma = -4\alpha^{-1}\varepsilon\ln(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$.

4. Численные эксперименты

Остановимся на вычислении интеграла

$$I(u) = \int_0^1 u(x)\,dx, \quad u(x) = \cos(\pi x/2) + \exp(-\varepsilon^{-1}x), \tag{4.1}$$

при различных значениях параметра $\varepsilon \in (0,1]$. Подынтегральная функция соответствует представлению (1.2) с $\Phi(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$. Число сеточных интервалов N кратно трем.

В табл. 1 представлена погрешность $\Delta = |I(u) - S^c_4(u)|$ составной формулы (2.3) в зависимости от ε и N. С уменьшением ε погрешность формулы (2.3) возрастает с величины порядка $O(h^4)$ до $O(h)$, что соответствует оценке (2.4) и примеру, показывающему понижение точности этой формулы до $O(h)$ в случае малых значений ε. В таблицах $e\pm m$ обозначает $10^{\pm m}$.

Таблица 1. Погрешность составной формулы (2.3), функция (4.1)

ε	N					
	$3\cdot2^3$	$3\cdot2^4$	$3\cdot2^5$	$3\cdot2^6$	$3\cdot2^7$	$3\cdot2^8$
1	$1.70e-7$	$1.06e-8$	$6.63e-10$	$4.15e-11$	$2.59e-12$	$1.61e-13$
10^{-1}	$3.63e-5$	$2.34e-6$	$1.47e-7$	$9.22e-9$	$5.77e-10$	$3.61e-11$
10^{-2}	$6.36e-3$	$1.13e-3$	$1.17e-4$	$8.64e-6$	$5.66e-7$	$3.58e-8$
10^{-3}	$1.46e-2$	$6.81e-3$	$2.91e-3$	$9.85e-4$	$2.10e-4$	$2.55e-5$
10^{-4}	$1.55e-2$	$7.71e-3$	$3.81e-3$	$1.85e-3$	$8.77e-4$	$3.88e-4$
10^{-5}	$1.56e-2$	$7.80e-3$	$3.89e-3$	$1.94e-3$	$9.67e-4$	$4.78e-4$

В табл. 2 приведена погрешность $\Delta = |I(u) - S^c_{\Phi,4}(u)|$ предложенной составной формулы (3.1) в зависимости от ε и N. С уменьшением параметра ε порядок погрешности этой формулы увеличивается с $O(h^4)$ до $O(h^3)$, что соответствует оценкам точности (3.4) и (3.3).

Таблица 2. Погрешность составной формулы (3.1), функция (4.1)

ε	N					
	$3\cdot2^3$	$3\cdot2^4$	$3\cdot2^5$	$3\cdot2^6$	$3\cdot2^7$	$3\cdot2^8$
1	$2.39e-7$	$1.49e-8$	$9.33e-10$	$5.81e-11$	$3.67e-12$	$2.40e-13$
10^{-1}	$1.08e-6$	$6.73e-8$	$4.20e-9$	$2.63e-10$	$1.64e-11$	$1.63e-12$
10^{-2}	$9.68e-6$	$6.10e-7$	$3.73e-8$	$2.31e-9$	$1.44e-10$	$9.01e-12$
10^{-3}	$2.11e-5$	$2.44e-6$	$2.60e-7$	$2.24e-8$	$1.45e-9$	$9.03e-11$
10^{-4}	$2.23e-5$	$2.76e-6$	$3.40e-7$	$4.14e-8$	$4.89e-9$	$5.41e-10$
10^{-5}	$2.24e-5$	$2.80e-6$	$3.49e-7$	$4.34e-8$	$5.34e-9$	$6.67e-10$

В табл. 3 представлена погрешность $\Delta = |I(u) - \tilde{S}^{c}_{\Phi,4}(u)|$ комбинированной составной формулы (3.5) при различных ε и N. Данные этой таблицы подтверждают, что точность формулы (3.5) повышается в сравнении с (3.1), ее погрешность порядка $O(h^4)$, независимо от значения ε.

Таблица 3. Погрешность комбинированной формулы (3.5), функция (4.1)

ε	N					
	$3 \cdot 2^3$	$3 \cdot 2^4$	$3 \cdot 2^5$	$3 \cdot 2^6$	$3 \cdot 2^7$	$3 \cdot 2^8$
10^{-1}	$6.61e-7$	$5.16e-8$	$3.80e-9$	$2.38e-10$	$1.49e-11$	$9.51e-13$
10^{-2}	$3.53e-7$	$2.49e-8$	$1.09e-8$	$7.93e-10$	$1.08e-10$	$1.00e-11$
10^{-3}	$5.48e-7$	$2.08e-8$	$8.83e-10$	$2.03e-10$	$3.71e-11$	$4.33e-12$
10^{-4}	$5.72e-7$	$2.24e-8$	$9.80e-10$	$4.81e-11$	$2.60e-12$	$1.50e-13$
10^{-5}	$5.75e-7$	$2.25e-8$	$9.89e-10$	$4.87e-11$	$2.63e-12$	$1.52e-13$

Теперь остановимся на примере

$$I(u) = \int_0^1 u(x)\,dx, \quad u(x) = \cos(\pi x/2) + \exp(-\varepsilon^{-1}(x + x^2/2)). \tag{4.2}$$

Интегрируемая функция (4.2) является решением сингулярно возмущенной задачи

$$\varepsilon u'(x) + a_1(x)u(x) = -\frac{\varepsilon\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2} + (1+x)\cos\frac{\pi x}{2}, \quad u(0) = 2, \tag{4.3}$$

где $a_1(x) = 1 + x$. Известно [8, 12], что решение задачи (4.3) представимо в виде (1.2), где $\Phi(x)$ и γ соответствуют (1.4). В представлении (1.2) для $u(x)$ имеем

$$\Phi(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x), \qquad p(x) = \cos(\pi x/2) + \exp(-\varepsilon^{-1}(x + x^2/2)) - \exp(-\varepsilon^{-1}x), \quad \gamma = 1.$$

Функция $\Phi(x)$ легко интегрируется и может быть использована в (3.2) при построении составной квадратурной формулы (3.1).

В соответствии с [12] для некоторой постоянной C, не зависящей от ε, $|p'(x)| \le C$, в то же время производная $p'''(x)$ не является равномерно ограниченной, $p'''(0) = 3/\varepsilon^2$.

За значение интеграла (4.2) принималось вычисленное значение этого интеграла по формуле (2.3) при достаточно большом количестве узлов, $N_0 = 3 \cdot 10^7$.

В табл. 4 приведена погрешность формулы (2.3) в случае функции (4.2) при различных значениях ε и N.

Таблица 4. Погрешность составной формулы (2.3), функция (4.2)

ε	N					
	$3 \cdot 2^3$	$3 \cdot 2^4$	$3 \cdot 2^5$	$3 \cdot 2^6$	$3 \cdot 2^7$	$3 \cdot 2^8$
1	$5.39e-8$	$3.37e-9$	$2.10e-10$	$1.32e-11$	$8.66e-13$	$9.39e-14$
10^{-1}	$2.63e-5$	$1.65e-6$	$1.04e-7$	$6.47e-9$	$4.05e-10$	$2.53e-11$
10^{-2}	$6.40e-3$	$1.13e-3$	$1.15e-4$	$8.41e-6$	$5.49e-7$	$3.47e-8$
10^{-3}	$1.46e-2$	$6.81e-3$	$2.91e-3$	$9.86e-4$	$2.10e-4$	$2.54e-5$
10^{-4}	$1.55e-2$	$7.71e-3$	$3.81e-3$	$1.85e-3$	$8.77e-4$	$3.88e-4$
10^{-5}	$1.56e-2$	$7.80e-3$	$3.90e-3$	$1.94e-3$	$9.67e-4$	$4.78e-4$

В табл. 5 приведена погрешность формулы (3.1) для функции (4.2) при различных ε и N.

Таблица 5. Погрешность формулы (3.1), функция (4.2)

ε	N					
	$3 \cdot 2^3$	$3 \cdot 2^4$	$3 \cdot 2^5$	$3 \cdot 2^6$	$3 \cdot 2^7$	$3 \cdot 2^8$
1	$1.72e-7$	$1.08e-8$	$6.72e-10$	$4.20e-11$	$2.71e-12$	$2.28e-13$
10^{-1}	$6.06e-6$	$3.97e-7$	$2.51e-8$	$1.58e-9$	$9.85e-11$	$6.14e-12$
10^{-2}	$1.86e-5$	$9.72e-6$	$1.87e-6$	$1.62e-7$	$1.10e-8$	$7.04e-10$
10^{-3}	$2.20e-5$	$3.44e-6$	$1.22e-6$	$3.61e-7$	$1.21e-7$	$3.68e-8$
10^{-4}	$2.23e-5$	$2.77e-6$	$3.50e-7$	$5.14e-8$	$1.49e-8$	$1.05e-8$
10^{-5}	$2.25e-5$	$2.80e-6$	$3.48e-7$	$4.35e-8$	$5.49e-9$	$7.67e-10$

Литература

1. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. — М.: Наука, 1966.
2. **Бахвалов Н.С.** Численные методы. — М.: Наука, 1975.
3. **Задорин А.И.** Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2007. — Т. 10, № 3. — С. 267–275.
4. **Задорин А.И., Задорин Н.А.** Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 221–233.
5. **Zadorin A.I.** Spline interpolation of functions with a boundary layer component // Int. J. of Num. Analysis and Modeling. Series B. — 2011. — Vol. 2, № 2, 3. — P. 562–579.
6. **Задорин А.И., Задорин Н.А.** Квадратурные формулы для функций с погранслойной составляющей // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2011. — Т. 51, № 11. — С. 1952–1962.
7. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. — Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
8. **Miller J.J.H., O'Riordan E., and Shishkin G.I.** Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. — Singapore: World Scientific, 1996.
9. **Kellogg R.B., Tsan A.** Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points // Math. Comput. — 1978. — Vol. 32. — P. 1025–1039.
10. **Милн В.Э.** Численный анализ. — М.: ИЛ, 1951.
11. **Никольский С.М.** Квадратурные формулы. — М.: Наука, 1974.
12. **Дулан Э., Миллер Д., Шилдерс У.** Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. — М.: Мир, 1983.

Поступила в редакцию 24 ноября 2011 г.,
в окончательном варианте 28 февраля 2012 г.