

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОБОЛЕВА
ОМСКИЙ ФИЛИАЛ

На правах рукописи

УДК 519.63

Задорин Александр Иванович

**Разностные схемы для нелинейных
дифференциальных уравнений с малым параметром
в ограниченных и неограниченных областях**

специальность 01.01.07 – вычислительная математика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Омск- 2000

Содержание

Введение	5
Основные обозначения	17
Содержание диссертации	18
1 Разностные схемы для нелинейных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка	41
§1. Нелинейное сингулярно возмущенное уравнение второго порядка	41
§2. Краевая задача для системы уравнений	48
§3. Схема второго порядка точности для уравнения типа реакция-диффузия	67
§4. Разностная схема для уравнения с сильной нелинейностью	75
§5. Разностная схема для стационарного одномерного уравнения Бюргерса	79
§6. Задача со степенным пограничным слоем	86
2 Краевые задачи для уравнений второго порядка с малым параметром на бесконечном интервале	94
§7. Несамосопряженное линейное уравнение	94
§8. Линейное уравнение без первой производной	103
§9. Нелинейное автономное уравнение	108
§10. Анализ схемы направленных разностей для редуцированной задачи	118

§11. Монотонная схема Самарского в случае третьей краевой задачи	130
§12. Решение уравнения с малым параметром и точечным источником на бесконечном интервале . . .	143
§13. Нелинейная система дифференциальных уравнений . .	163
3 Редукция скалярных и векторных схем к конечному числу узлов	176
§14. Линейная трехточечная схема с полубесконечным числом узлов	177
§15. Нелинейная трехточечная схема с постоянными коэффициентами	192
§16. Нелинейная трехточечная схема с переменными коэффициентами	198
§17. Трехточечная векторная схема с полубесконечным числом узлов	202
§18. Редукция неявной схемы для параболического уравнения к конечному числу узлов	219
4 Разностные схемы для нелинейных эллиптических уравнений с малым параметром	227
§19. Нелинейное эллиптическое уравнение с регулярным экспоненциальным пограничным слоем	227
§20. Эллиптическое уравнение с параболическими экспоненциальными слоями в полубесконечной полосе	247

§21. Обоснование схемы Самарского для эллиптического уравнения в случае краевых условий третьего рода	263
§22. Нелинейное эллиптическое уравнение с параболическими экспоненциальными погранслоями	268
5 Моделирование переноса примеси от источников загрязнений	275
§23. Схема для численного моделирования стационарного распространения примеси в направлении ветра	276
§24. Описание метода расчета переноса примеси	287
Заключение	297
Список литературы	299

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. При математическом моделировании ряда физических явлений, например, течений вязкой жидкости, процесса распространения примеси от источников, возникают краевые задачи для уравнений второго порядка с малыми параметрами при старших производных. Область, для которой ставится краевая задача, может быть неограниченной. В связи с этим возникает проблема редукции краевых условий к ограниченной области и разработки разностной схемы для задачи в ограниченной области.

Решения краевых задач для уравнений с малыми параметрами при старших производных могут содержать пограничные и внутренние переходные слои, где градиенты решения велики. Такие задачи называются сингулярно возмущенными. Особенность этих задач в том, что при их вырождении понижается порядок дифференциального уравнения и теряется часть краевых условий. В отличие от случая регулярно возмущенной задачи имеются области, где решения исходной и вырожденной задач существенно отличаются, даже если параметр при старшей производной мал.

Первоначально для решения таких задач развивались асимптотические методы. основополагающими являются работы А.Н.Тихонова, А.Б.Васильевой, С.А. Ломова, В.Б. Бутузова, Л.И. Люстерника, М.И. Вишика, А.М.Ильина. Асимптотические методы предполагают разложения в регулярные и погранслойные ряды по степеням малого параметра. И в настоящее время данный подход успешно развивается. Ограниченность данного подхода в том, что параметр должен быть существенно меньше единицы.

При применении вычислительной техники для решения краевых задач обычно используются конечно-разностные схемы, сводящие краевую задачу к системе алгебраических уравнений, решаемых с помощью циклических процедур. Оказывается, традиционные разностные схемы в общем случае теряют свойство сходимости при решении сингулярно возмущенных краевых задач. Поэтому возникла необходимость в разработке разностных схем, обладающих свойством сходимости, равномерной относительно малого параметра.

В 1969 году появились работы Н.С. Бахвалова и А.М. Ильина, обозначившие основные подходы к построению разностных схем для задач с пограничными слоями.

Можно выделить следующие подходы, применяемые при разработке численных методов для сингулярно возмущенных уравнений:

- 1) сгущение сеток в пограничных слоях;
- 2) подгонка схем к погранслойной составляющей решения;
- 3) использование интегральных соотношений и усеченных схем;
- 4) применение метода Галеркина с выделением особенностей;
- 5) использование сплайнов и метода коллокации.

К первому подходу относятся работы Н.С. Бахвалова, В.Д. Лисейкина, Г.И. Шишкина, Р. Вулановича и других авторов. В этих работах строится функция, распределяющая узлы сетки. Эта функция учитывает градиенты решения и сетка сгущается в пограничных слоях.

Н.С. Бахвалов эту функцию строит таким образом, чтобы погрешность аппроксимации по узлам сетки была равномерной, при этом погранслойная составляющая решения на каждом шаге сетки нарастает равномерно, а вне пограничного слоя сетка принимается равномерной. Причем осуществляется склейка логарифмической и линейной функ-

ций с точностью до непрерывной первой производной. На такой сетке достигается второй порядок точности по количеству узлов сетки.

Лисейкин В.Д. предлагает осуществить замену переменной таким образом, чтобы производные до некоторого порядка стали равномерно ограничены. В исходных переменных это дает сгущающуюся сетку. Предварительно оцениваются производные.

Г.И. Шишкиным определен новый подход к построению разностных сеток, которые равномерны внутри пограничного слоя и вне пограничного слоя, то есть исходный интервал делится на два, на каждом из которых сетка равномерна. В работах Г.И. Шишкина, В.Б. Андреева, И.А. Савина, Н.В. Коптевой показано, что на такой сетке целый ряд разностных схем (включая немонотонную схему центральных разностей) обладает свойством равномерной сходимости, причем чаще с порядком точности $O(N^{-2} \ln N)$. Данный подход позволяет использовать метод Шварца, когда одновременно решаются задачи в пограничном слое и вне его и итерационно согласуются краевые условия.

Для уравнений в частных производных значимость данного подхода усиливается в связи с тем, что в случае параболического пограничного слоя, как показал Г.И. Шишкин, не существует равномерно сходящейся схемы подгонки на равномерной сетке.

Ко второму подходу относятся работы А.М. Ильина, Г.И. Шишкина, К.В. Емельянова, Д. Миллера, Р. Келлога и других авторов. Основная идея данного подхода – выделить погранслойную составляющую решения и строить разностную схему исходя из того, чтобы коэффициенты схемы учитывали погранслойный рост решения. Если малого параметра нет, то схема становится близкой к традиционным, если решение уравнения является погранслойная функция, то разностная схе-

ма на решении такого уравнения становится точной. Преимущество данного подхода в том, что не требуется ограничений на шаги сетки. Недостаток – в том, что функция пограничного слоя должна иметь явный вид и схема к этой функции должна быть подогнана, что не во всех случаях возможно.

Третий подход основан на точной схеме Самарского и интегральном тождестве Марчука. Для дифференциального уравнения выписывается точная схема Самарского, коэффициенты которой являются интегралами решений некоторых задач Коши, поставленных в окрестности узлов сетки. Усечение такой схемы приводит к схеме повышенного порядка точности. На основании этого подхода М.В. Алексеевским, К.В. Емельяновым, Г.И. Шишкиным строились схемы повышенного порядка точности. Данный подход получил распространение и на случай параболического уравнения. Тождество Марчука использовалось в работах В.П. Гаевого и А.Ю. Сечина. В работах И.П. Боглаева равномерно сходящиеся схемы строятся на основе интегральных соотношений. Для этого выделяется главная часть дифференциального оператора, которая обратима в явном виде.

К четвертому подходу относятся работы В.В. Шайдурова, Б.М. Багаева, И.А. Блатова, Л. Тобиска, Ч. Руз, М. Стайнис и других авторов. В работах Б. М. Багаева предлагается функцию пограничного слоя включить в базис для решения задачи методом Галеркина или Ритца. Это приводит к равномерной сходимости метода в энергетической и равномерной нормах. Если функцию погранслоя не удастся выписать в явном виде, то предлагается выделить краевую задачу для такой функции и решить ее переходом к "медленным переменным". В новых переменных используется классический метод типа Галеркина. Метод

Галеркина используется и на специальных сетках, сгущающихся в пограничном слое.

Пятый подход используется в работах И.А. Блатова и В.В. Стрыгина, К. Серла и других авторов. В методе коллокации используется экспоненциальный сплайн, что приводит к равномерной сходимости численного метода. К равномерной точности метода приводит и использование метода коллокации на сгущающихся в погранслоях сетках.

Теперь остановимся на подходах к переносу краевых условий из бесконечности на границу ограниченной области. В ряде работ разностные схемы строятся в неограниченной области, например, в полосе. Такие схемы не эффективны в том смысле, что их невозможно использовать для компьютерных вычислений. Чтобы разностная схема содержала конечное число узлов, можно либо для дифференциальной задачи поставить граничное условие на некоторой искусственной границе, либо редуцировать разностную схему на сетке с бесконечным числом узлов к схеме с конечным числом узлов.

Идея построения решений краевых задач для дифференциальных уравнений путем переноса граничных условий восходит к работам В.С. Владимирова [39] и И.М. Гельфанда ([45], приложение), где для решения краевой задачи для уравнения второго порядка на конечном интервале используется классический вариант метода дифференциальной прогонки. При таком подходе вместо решения исходной задачи необходимо решать три задачи Коши для уравнений первого порядка, которые проще исходной. В ряде работ такой подход используется для решения одномерных задач дифракции, в теории рассеяния и переноса излучения. В этих работах для решения краевых задач используют

ся вспомогательные задачи Коши для переноса краевых условий. Использование указанного подхода заведомо оправдано, когда численное или аналитическое решение задачи Коши проще, чем решение краевой задачи. Операторный метод сноса краевых условий из бесконечности для уравнения Гельмгольца использован М.В.Федорюком. В.П. Маслов с соавторами в [110] обобщают метод дифференциальной прогонки применительно к уравнениям с частными производными. Метод ортогональной прогонки развивался в работах А.А. Абрамова и С.К. Годунова.

Идея переноса граничного условия из особой точки в близкую точку с помощью выделения всего многообразия решений, удовлетворяющих заданному условию, была предложена Абрамовым А.А. для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка с регулярной особенностью [1]. Эта идея была развита в работе Е.С. Биргер и Н.Б. Ляликовой [19] применительно к краевым задачам для систем ОДУ с заданным условием на бесконечности. В работах Конюховой Н.Б. [114], [111], [113] и других рассматриваются нелинейные ОДУ с иррегулярной особенностью, выделяются и исследуются устойчивые многообразия решений. В работе Конюховой Н.Б. и Пак Т.В. [115] исследуются сингулярные задачи Коши с большим параметром для систем нелинейных ОДУ. Строятся разложения решения по параметру, нелинейность задана в виде векторного многочлена по зависимым переменным. Точность асимптотических разложений оценивается при достаточно больших значениях независимой переменной, что связано с вопросом существования и единственности решения вспомогательной задачи Коши. В [116] вводится понятие допустимых граничных условий на бесконечности. Рассматриваются линейные си-

стемы ОДУ первого и второго порядка на полубесконечном интервале, зависящие от параметра. Для системы ОДУ первого порядка показано, как определить сингулярную задачу Коши для выделения устойчивого многообразия, соответствующего допустимому условию. Исследуется зависимость решения сингулярной задачи Коши от параметра. Для переноса допустимого краевого условия из бесконечности система ОДУ второго порядка сводится к системе первого порядка.

В работах К. Балла рассматриваются разностные уравнения с полубесконечным числом узлов. Исследуется асимптотическое поведение решения скалярных и матричных разностных уравнений Риккати. Доказывается, что предельное условие на решение разностного уравнения второго порядка при стремлении индекса к бесконечности эквивалентно некоторому разностному уравнению первого порядка при достаточно больших значениях индекса.

Цель работы. Целью работы является разработка численных методов решения краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старших производных в неограниченной области.

Основные задачи работы:

- разработка и исследование разностных схем для краевых задач с учетом пограничных слоев в решении; схемы могут строиться либо в ограниченной области, либо в исходной неограниченной области, для этого случая необходимо разработать метод редукции разностных схем к схемам на сетках с конечным числом узлов;

- разработка метода редукции краевых задач для уравнений с малым параметром при старших производных с неограниченной области (прямой или полосы) к ограниченной с использованием известных под-

ходов.

- исследование влияния погрешностей переноса краевого условия из бесконечности на решение редуцированных задач и на решение применяемых разностных схем;

- применение разрабатываемого метода к численному моделированию распространения примесей в атмосфере.

Научная новизна.

1. Предложен метод построения разностных схем для нелинейных сингулярно возмущенных уравнений второго порядка на конечном интервале. Метод основан на приближении коэффициентов дифференциальной задачи и получении точных разностных соотношений для возмущенной задачи.

- построена разностная схема для системы нелинейных дифференциальных уравнений и обоснована ее равномерная сходимость при различных ограничениях на якобиан;

- построена разностная схема для уравнения с сильной нелинейностью и доказана ее равномерная сходимость с первым порядком;

- построена схема второго порядка точности для нелинейного уравнения типа реакция-диффузия;

- построена разностная схема для стационарного уравнения Бюргера;

- построена разностная схема для нелинейного уравнения со степенным пограничным слоем;

- для монотонной схемы Самарского в случае смешанного краевого условия и отсутствия выраженного пограничного слоя предложен способ аппроксимации производной в краевом условии с сохранением точности схемы;

2. Построены разностные схемы для двумерных линейных и нелинейных эллиптических уравнений в полосе и в прямоугольной области:

- Для уравнения с регулярным экспоненциальным пограничным слоем в случае прямоугольной области и краевых условий третьего рода на равномерной сетке построена и обоснована разностная схема.

- Рассмотрено уравнение с экспоненциальными параболическими погранслоями в полубесконечной полосе. Предложен способ редукции задачи к прямоугольной области. Для редуцированной задачи на сгущающейся в погранслоях сетке построена схема второго порядка точности по координатному направлению вдоль слоя. В продольном направлении исследована схема Самарского в случае краевых условий третьего рода.

- Построена разностная схема первого порядка точности для уравнения со степенным пограничным слоем в полосе; предложен способ редукции схемы к конечному числу узлов.

3. Исследован численный метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной на полубесконечном интервале сведением к краевой задаче для конечного интервала или к начальной задаче для уравнения первого порядка. Рассмотрены линейные уравнения, нелинейное автономное уравнение, автономная система нелинейных уравнений. При переносе краевых условий из бесконечности используется известный подход, основанный на выделении устойчивых многообразий. Вспомогательные задачи Коши решаются на основе асимптотических разложений по малому параметру. Проведен анализ влияния погрешностей, обусловленных переносом краевого условия, на решение редуцированных к конечному интервалу задач и на решение применяе-

мых разностных схем; разностные схемы исследованы на равномерную сходимость по параметру. Предложен метод решения краевых задач для уравнений с точечным источником на бесконечном интервале.

4. Разработан метод редукции разностных схем с бесконечным числом узлов к схемам на сетке с конечным числом узлов. Для этого введено и исследовано устойчивое многообразие решений, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности для разностного уравнения. В случае, когда исходная разностная схема вырождается, для выделения устойчивого многообразия предлагается использовать асимптотические разложения. Рассмотрены:

- трехточечные линейные и нелинейные разностные схемы;
- разностная схема для параболического уравнения;
- трехточечная векторная разностная схема, соответствующая сеточной аппроксимации краевой задачи для эллиптического уравнения в полубесконечной полосе.

Практическая значимость. При математическом моделировании различных физических явлений (например, течения вязкой жидкости, перенос примеси в атмосфере) появляются краевые задачи для уравнений с малым параметром при старших производных. Краевые условия в таких задачах могут ставиться для неограниченной области. Важно корректно редуцировать краевые условия к ограниченной области, определить разностную схему для редуцированной задачи с учетом погранслоного поведения решения. Решению этих вопросов посвящено диссертационное исследование.

Результаты исследований применяются при проведении совместной хоздоговорной работы между Институтом информационных технологий и прикладной математики СО РАН (новое название ОФИМ СО

РАН) и Омским областным комитетом природы. В соответствии с этим договором в ИИТПМ СО РАН коллективом авторов, включая автора диссертации, с 1991 года создается пакет программ по моделированию переноса примесей в атмосфере Омского региона и поиску источников загрязнений. Пакет программ передан для использования в Омский областной комитет природы.

Результаты исследований применяются и в интеграционной программе СО РАН " Исследование и моделирование процессов переноса и трансформации примесей в атмосфере Сибири."

Апробация результатов. Отдельные результаты работы докладывались:

на семинарах ИИТПМ СО РАН и кафедры математического моделирования Омского государственного университета;

на 4 Международной конференции по пограничным и внутренним слоям: вычислительные и асимптотические методы, Новосибирск, 1986г.;

на Всесоюзной конференции " Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики " ,Новосибирск, 1987;

на Всесоюзном научном совещании " Методы малого параметра " под руководством академика А.Н. Тихонова, п. Эльбрус, 1987;

на Всесоюзной школе " Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики", Кемерово, ИПМ АН СССР, КемГУ, 1988г.;

на Всесоюзной конференции " Вычислительные методы и математическое моделирование, Абакан, КрГУ, 1989г.;

на Всесоюзной школе по вычислительным методам, г. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1991г.;

на 1 всесоюзной конференции " Математическое моделирование физико- химических процессов в энергетических установках", г. Казань, КАИ, ИТПМ СО АН СССР, 1991г. ;

на Всесоюзной конференции " Асимптотические методы теории сингулярно возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач ", Бишкек, 1991г.;

на 3 Всесоюзной школе " Численные методы механики сплошной среды ", Абрау- Дюрсо, 1991, ВЦ СО АН СССР, г. Красноярск, Ростовский университет 1991г.;

на 2 Всероссийской конференции по математическим проблемам экологии, Новосибирск, ИМ СО РАН, 1994г.;

на международной конференции " Математические модели и численные методы механики сплошных сред", Новосибирск, ИВТ СО РАН, 1996г.;

на международной конференции " Математические модели и методы их исследования ", ИВТ СО РАН, ВЦ СО РАН, г. Красноярск, 1997г.;

на международной конференции " Аналитические и вычислительные методы для задач с преобладающей конвекцией и для сингулярно возмущенных задач", Болгария, Лозенец, университет в Руссе, 1998г.

Диссертация в полном объеме обсуждалась:

на семинаре ИИТПМ СО РАН, Омск, 1999,

на семинаре ИВМ СО РАН, Красноярск, 1999,

на семинаре " Методы вычислительной математики "

ИВМ и МГ СО РАН, Новосибирск, 1999,

на семинаре ИММ Уральского отделения РАН, Екатеринбург, 1999,

на объединенном семинаре по вычислительной математике

ИВМ и МГ СО РАН, Новосибирск, 1999.

Публикации результатов. По теме диссертации опубликовано 53 работы, в списке литературы этим публикациям соответствуют номера [29],[30], [53]-[89], [92]- [103], [158], [201].

Основные обозначения. Под C и C_i понимаются положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и шагов разностной сетки.

Определим используемые нормы :

- для функции непрерывного аргумента $q(x)$ интервала I

$$\|q\| = \max |q(x)|, x \in I,,$$

- для вектор-функции $\mathbf{q}(x)$ из N компонент: $\|\mathbf{q}\|_N = \max_{1 \leq i \leq N} \max_{x \in I} |q_i(x)|,$

- для вектора \mathbf{q} : $\|\mathbf{q}\| = \max_i |q_i|,$

- для сеточной вектор-функции \mathbf{q}^h : $\|\mathbf{q}^h\|_{N\Omega} = \max_{1 \leq i \leq N} \max_{x \in \Omega} |q_i^h(x)|.$

Предполагаем, что норма матрицы согласована с векторной нормой.

Пусть $Q^m[0, 1]$ – множество функций интервала $[0, 1]$, имеющих кусочно-непрерывные производные вплоть до порядка m , причем разрывы могут быть только первого рода в заданном конечном множестве внутренних точек (при $m = 0$ сама функция кусочно-непрерывна с разрывами первого рода).

Под неравенством векторов подразумевается покомпонентное неравенство. Для интервала $[0, L]$ определим сетку Ω :

$$\Omega = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h_n, x_0 = 0, x_N = L, \Delta_n = (x_{n-1}, x_n]\}, h = \max_n h_n.$$

Определим разностные аналоги производных на сетке Ω :

$$\Lambda_{x,n}u^h = \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h_n}, \quad \Lambda_{xx,n}u^h = \frac{\Lambda_{x,n+1}u^h - \Lambda_{x,n}u^h}{(h_n + h_{n+1})/2}, \quad \lambda_{\bar{x},n}u^h = \frac{u_{n+1}^h - u_{n-1}^h}{2h}.$$

Пусть $[u]_{\Omega}$ – проекция функции непрерывного аргумента на сетку.

Содержание диссертации. В первой главе рассматриваются краевые задачи для нелинейных обыкновенных сингулярно возмущенных уравнений второго порядка и систем уравнений на конечном интервале. Предложен метод построения равномерно сходящихся разностных схем для таких задач. Метод основан на приближении коэффициентов дифференциального уравнения на каждом сеточном интервале таким образом, чтобы для дифференциального уравнения с возмущенными коэффициентами точное решение имело явный вид. Тогда согласование производных соседних интервалов приводит к конечно-разностной схеме. Если коэффициенты заменены на кусочно - постоянные, то это приводит к разностной схеме первого порядка точности, равномерной по малому параметру. Замена коэффициентов на кусочно- линейные увеличивает трудности в представлении точного решения, но приводит к схеме второго порядка точности. Преимущество данного подхода состоит в том, что при построении схемы не требуется явный вид функции пограничного слоя, который затруднительно получить для нелинейных уравнений. В случае линейной задачи такой подход применялся, например, в работах А.Ю. Сечина и В.П. Гаевого.

В §1 рассматривается краевая задача:

$$T_{\varepsilon}u = -\varepsilon u'' + a(x)u' + f(x, u) = 0, \quad (1)$$

$$u(0) = A, R_{\varepsilon}u = \eta u(1) + \varepsilon \delta u'(1) = B. \quad (2)$$

Предполагается, что $a \in C^1[0, 1]$, $f \in C^1([0, 1] \times R)$,

$$a(x) \geq \alpha > 0, \delta \geq 0, \eta \geq 0, \varepsilon > 0, \frac{\partial f}{\partial u} \geq -\beta, \beta > 0, \alpha^2 - 4\beta\varepsilon > 0. \quad (3)$$

На произвольной неравномерной сетке Ω строится разностная схема для задачи (1)-(2). Пусть u^h – решение построенной схемы.

Теорема 1. Для некоторой постоянной C

$$\| [u]_{\Omega} - u^h \| \leq C \exp(2\beta\alpha^{-1})h.$$

В §2 рассматривается краевая задача для системы нелинейных уравнений:

$$-\varepsilon \mathbf{u}'' + \mathbf{a}(x)\mathbf{u}' + \mathbf{F}(x, \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{A}, \quad R_{\varepsilon} \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(1) + \varepsilon \beta \mathbf{u}'(1) = \mathbf{B}, \quad (4)$$

где $\mathbf{a}(x), \delta, \beta$ - диагональные квадратные матрицы порядка N с диагональными элементами, соответственно, $a_i(x), \delta_i, \beta_i, i = 1, 2, \dots, N$, \mathbf{A}, \mathbf{B} - векторы из N компонент, ε - числовой параметр, $\varepsilon > 0$, \mathbf{F} - заданная вектор-функция. Предполагается, что при всех i $a_i \in C^1[0, 1]$, $F_i \in C^1([0, 1] \times R)$,

$$a_i(x) \geq \alpha_i > 0, \quad \delta_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \delta_i + \beta_i > 0, \quad \alpha_0 = \min_i \alpha_i.$$

Рассматривается два вида ограничений на якобиан $\mathbf{G} = \mathbf{F}'_{\mathbf{u}}$:

$$G_{ii} \geq \eta > 0, \quad \sum_{j \neq i} |G_{ij}| \leq (1 - \sigma)G_{ii}, \quad 0 < \sigma < 1. \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^N G_{ij} \geq -\eta, \quad \eta > 0, \quad \alpha_0^2 - 4\eta\varepsilon \geq \gamma > 0, \quad G_{ij} \leq 0, \quad j \neq i. \quad (6)$$

Ограничения (5) соответствуют условиям строгого диагонального преобладания, особенность ограничений (6) в неположительности недиагональных элементов, что соответствует, например, моделированию химических реакций. Вводится вспомогательная линейная краевая задача:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = -\varepsilon \mathbf{u}'' + \mathbf{a}(x)\mathbf{u}' + \mathbf{G}(x)\mathbf{u} = \mathbf{F}(x), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{A}, \quad R_{\varepsilon} \mathbf{u} = \mathbf{B}, \quad (7)$$

где матрица $\mathbf{a}(x)$ определена выше, $\mathbf{G}(x)$ - матрица порядка $N \times N$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (5). Тогда

$$\max_i \|u_i\| \leq \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\max_i \|F_i\|}{\eta} + \|\mathbf{A}\| + \max_i \left| \frac{B_i}{\delta_i + \alpha_i \beta_i} \right| \right].$$

В случае выполнения условий (6) неочевидно, что для оператора \mathbf{L} справедлив принцип максимума. Получено достаточное условие для выполнения принципа максимума.

Лемма 2. Пусть в (7) $G_{ij}(x) \leq 0$ при $i \neq j$. Пусть найдется вектор-функция $\phi(\mathbf{x})$ с компонентами из $C^2[0, 1]$, такая, что

$$\phi(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \mathbf{L}\phi(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, x \in I, R_\varepsilon \phi > \mathbf{0}.$$

Тогда, если для некоторой вектор-функции $\Psi(x)$ с компонентами из $C^2[0, 1]$

$$\Psi(0) \geq \mathbf{0}, R_\varepsilon \Psi \geq \mathbf{0}, L\Psi(x) \geq \mathbf{0}, x \in I, \quad (8)$$

то $\Psi(x) \geq \mathbf{0}, x \in I$.

Доказано, что при выполнении условий (6) выполняются посылки леммы 2 и принцип максимума для оператора \mathbf{L} имеет место.

Для задачи (4) на произвольной неравномерной сетке строится разностная схема, пусть \mathbf{u}^h – решение этой схемы.

Теорема 2. Пусть для $\mathbf{G}(x, s) = \mathbf{F}'_{\mathbf{u}}(x, s)$ выполнено условие (5) или (6). Тогда

$$\|[\mathbf{u}]_\Omega - \mathbf{u}^h\|_{N\Omega} \leq Ch.$$

Отдельно рассмотрен случай краевого условия $\mathbf{u}'(1) = \mathbf{0}$, когда первая производная решения ограничена, а остальные производные неограниченно растут с уменьшением ε . Целесообразно исследовать схему направленных разностей на равномерную сходимость, так как эта схема проще специальных схем, учитывающих погранслойное поведение решения. Предварительно доказывається, что к линейной задаче

относительно погрешности схемы, при выполнении условий (6), можно применять принцип максимума.

Теорема 3. Пусть для \mathbf{G} справедливы ограничения (5) или (6), \mathbf{u}^h – решение схемы направленных разностей, шаги сетки Ω удовлетворяют ограничению $x_n + h_n \leq 1$. Тогда

$$\|[\mathbf{u}]_{\Omega} - \mathbf{u}^h\|_{N\Omega} \leq C \max_i h_i.$$

Доказана сходимость модифицированного метода Пикара для исследуемых нелинейных разностных схем.

В §3 рассмотрена краевая задача для уравнения типа реакция-диффузия:

$$Lu = \varepsilon u'' - f(x, u) = 0, \quad u(0) = A, \quad u(1) = B. \quad (9)$$

Предполагается достаточная гладкость функции $f(x, u)$,

$\varepsilon > 0, f'_u \geq \beta > 0$. Для нелинейной задачи (9) с учетом кусочно-линейного приближения коэффициентов строится разностная схема на неравномерной сетке, сгущающейся в пограничных слоях. Пусть u^h – решение построенной схемы.

Теорема 4. Справедлива оценка точности:

$$\|u^h - [u]_{\Omega}\| \leq C[Q^{-2} + M^{-2}],$$

где Q – число узлов в пограничном слое, M – вне слоев.

В §4 рассмотрена краевая задача:

$$Lu = \varepsilon u'' + a(x, u)u' - b(x, u) = 0, \quad u(0) = A, \quad u(1) = B. \quad (10)$$

Предполагается, что коэффициенты непрерывно дифференцируемы,

$$a(x, u) \geq \alpha > 0, \quad b_u + a_x \geq \gamma, \quad \gamma \leq 0, \quad \alpha^2 + 4\varepsilon\gamma > 0, \quad \varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0.$$

Для построения разностной схемы вводится сетка, сгущающаяся в пограничном слое. Вне пограничного слоя сетка предполагается равномерной. Схема строится на основе замены коэффициентов кусочно-постоянными. Пусть u^h - решение построенной схемы.

Теорема 5. Для некоторой постоянной C

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq Ch.$$

В §5 рассмотрена краевая задача:

$$Lu(x) = \varepsilon u''(x) + u(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B. \quad (11)$$

Предполагается, что коэффициенты достаточно гладкие,

$b(x) \geq \beta > 0$, $u_0(0) > 0$, где $u_0(x)$ - решение вырожденной задачи. На равномерной сетке строится разностная схема, подогнанная к пограничной функции.

Теорема 6. Для построенной разностной схемы справедлива оценка точности:

$$\|u^h - [u]_\Omega\|_{L_1} \leq Ch.$$

В §6 рассмотрена краевая задача, решение которой имеет степенной пограничный слой:

$$(\varepsilon + x)u'' + a(x)u' - f(x, u) = 0, \quad u(0) = A, \quad u(1) = B.$$

Предполагается, что функции a, f непрерывно дифференцируемы по своим аргументам,

$$\varepsilon > 0, \quad a(0) > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} \geq 0.$$

На равномерной сетке Ω строится разностная схема и доказывается, что для этой схемы справедлива оценка точности:

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq Ch |\ln(h)|.$$

В случае $a(0) > 1$ обосновывается первый порядок точности.

Во второй главе рассматриваются краевые задачи для уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной на полубесконечном и бесконечном интервалах. Рассматривается вопрос переноса краевого условия из бесконечности с учетом наличия малого параметра при старшей производной, анализируются разностные схемы для редуцированных к конечному интервалу задач на равномерную по параметру сходимость и на устойчивость к погрешностям переноса краевых условий. На полубесконечном интервале рассмотрены линейные уравнения, нелинейное автономное уравнение, система нелинейных автономных уравнений с малым параметром при старших производных. Предложен метод решения краевых задач для уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной и точечным источником на бесконечном интервале. При переносе предельного краевого условия из бесконечности используется метод, основанный на выделении устойчивых многообразий, разрабатываемый в работах Абрамова А.А., Конюховой Н.Б. и их учеников.

В §7 рассмотрена краевая задача:

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)u = f(x), \quad (12)$$

$$u(0) = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0. \quad (13)$$

Предполагается достаточная гладкость a , c , f ,

$$D \geq a(x) \geq \alpha > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad B \geq c(x) \geq b > 0,$$

$$f(x) \rightarrow 0, \quad a(x) \rightarrow a_0, \quad c(x) \rightarrow c_0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Для переноса краевого условия из бесконечности выделяется многообразиие решений уравнения (12), для которых выполняется предельное

условие на бесконечности [19]:

$$u'(x) = \gamma(x)u(x) + \beta(x), \quad (14)$$

где $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ являются решениями сингулярных задач Коши:

$$R_\varepsilon \gamma = \varepsilon \gamma' - a(x)\gamma + \varepsilon \gamma^2 - c(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x) = r, \quad (15)$$

r - отрицательный корень уравнения $\varepsilon r^2 - a_0 r - c_0 = 0$,

$$\varepsilon \beta' - [a(x) - \gamma(x)\varepsilon]\beta = f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = 0. \quad (16)$$

Показано, что решения задач (15),(16) существуют и единственны при всех $x > 0$.

Лемма 3. При всех $x > 0$

$$-\frac{2B}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4B\varepsilon}} \leq \gamma(x) \leq -\frac{2b}{D + \sqrt{D^2 + 4b\varepsilon}} < 0.$$

Решение задач (15)-(16) находится на основе асимптотических разложений, поэтому предварительно исследуется устойчивость решения этих задач к возмущению коэффициентов.

Лемма 4. Пусть

$$|a(x) - \tilde{a}(x)| \leq \Delta, \quad |c(x) - \tilde{c}(x)| \leq \Delta \quad \text{для } x \geq L, \quad \forall L > 0.$$

Тогда найдется C : $|\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \leq C\Delta$ для $x \geq L$.

Приближенное решение задачи (15) ищется в виде:

$$\tilde{\gamma}_N(x) = \sum_{n=0}^N \gamma_n(x)\varepsilon^n, \quad (17)$$

где коэффициенты связаны рекуррентным соотношением:

$$\gamma_n(x) = a(x)^{-1} \left[\gamma'_{n-1}(x) + \sum_{i+j=n-1} \gamma_i(x)\gamma_j(x) \right],$$

где $0 \leq i, j \leq n - 1$, $n \geq 1$, $\gamma_0(x) = -c(x)/a(x)$.

Лемма 5. Пусть функции $a(x)$ и $c(x)$ N раз непрерывно дифференцируемы. Тогда для достаточно малых значений ε для некоторой постоянной C при всех $x > 0$

$$|\gamma(x) - \tilde{\gamma}_N(x)| \leq C\varepsilon^{N+1}.$$

Аналогичным образом из (16) на основе асимптотических разложений находится $\beta(x)$.

С учетом соотношения (14) задача (12)-(13) редуцируется к конечному интервалу $[0, L]$:

$$-\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)u = f(x), \quad u(0) = A, \quad u'(L) - \gamma(L)u(L) = \beta(L). \quad (18)$$

Доказано, что решения задач (12)-(13) и (18) совпадают на интервале $[0, L]$. Значения $\gamma(L)$ и $\beta(L)$ из задач (15),(16) могут быть найдены приближенно, поэтому исследуется устойчивость решения задачи (18) к возмущению коэффициентов в краевом условии.

Теорема 7. Пусть $\tilde{u}(x)$ — решение задачи (18) в случае возмущенных значений $\tilde{\gamma}(L)$, $\tilde{\beta}(L)$. Пусть

$$\tilde{\gamma}(L) \leq 0, \quad |\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)| \leq \Delta_1, \quad |\beta(L) - \tilde{\beta}(L)| \leq \Delta_2.$$

Тогда при всех $x \in [0, L]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \varepsilon \alpha^{-1} \{ \Delta_2 + \Delta_1 |u(L)| \} \exp[\alpha \varepsilon^{-1} (x - L)].$$

Таким образом, если коэффициенты γ и β найдены с некоторой погрешностью, то эта погрешность при наличии малого параметра существенно уменьшается.

Далее исходная краевая задача (12)-(13) сводится к задаче Коши:

$$u'(x) - \gamma(x)u(x) = \beta(x), \quad u(0) = A. \quad (19)$$

Решения задач (12)-(13) и (19) совпадают. Доказано, что решение задачи (19) устойчиво к возмущению коэффициентов $\gamma(x)$ и $\beta(x)$.

В §8 аналогичным образом рассмотрена краевая задача для уравнения без первой производной.

В §9 рассмотрен вопрос редукции к конечному интервалу краевой задачи для нелинейного автономного уравнения:

$$-\varepsilon u'' + tu' + g(u) = 0, \quad u(0) = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = B. \quad (20)$$

В §10 рассмотрена краевая задача на конечном интервале:

$$\begin{aligned} -\varepsilon u'' + a(x)u' + f(x, u) &= 0, \\ u(0) = A, \quad R_\varepsilon u = u'(L_0) + \Theta(u(L_0)) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

На коэффициенты задачи (21) наложены ограничения таким образом, что (21) обобщает задачи, полученные в §7–§9 после редукции к конечному интервалу. Особенность задачи (21) в нелинейности и наличии малого параметра при старшей производной. Доказывается, что решение задачи (21) существует и единственно, первая производная решения равномерно ограничена. По этой причине исследуется сходимость схемы направленных разностей, которая проще специальных разностных схем, учитывающих пограничный слой.

Теорема 9. Пусть $h \leq h_0$. Тогда найдется C :

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq Ch. \quad (22)$$

При переносе краевого условия из бесконечности функция $\Theta(v)$ вычисляется приближенно. Доказано, что схема направленных разностей устойчива к погрешностям в Θ .

Лемма 6. Пусть функция $\tilde{\Theta}(v)$ непрерывно дифференцируема, причем $\tilde{\Theta}'(v) \geq -\beta_0$. Пусть \tilde{u}^h - решение схемы с возмущенной функцией $\tilde{\Theta}$. Тогда если $|\Theta(u_N^h) - \tilde{\Theta}(u_N^h)| \leq \Delta$, то при всех $x_n \in \Omega$

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq \Delta \eta^{-1} (4\varepsilon + 2\alpha h) \exp[\alpha(2\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L)]. \quad (23)$$

В §11 рассмотрена третья краевая задача для нелинейного уравнения на конечном интервале. Такая задача появляется при редукции краевой задачи с бесконечного интервала к конечному. Во внутренних узлах равномерной сетки применяется монотонная схема Самарского. Предлагается односторонняя аппроксимация производной в краевом условии на трехточечном шаблоне. При этом сохраняется второй порядок аппроксимации разностной схемы, но нарушается свойство диагонального преобладания разностного оператора. Доказывается, что принцип максимума для разностного оператора при такой аппроксимации краевого условия остается справедливым. На основе принципа максимума доказывается равномерная сходимость монотонной схемы Самарского в случае равномерной сетки и краевых условий третьего рода.

Предварительно рассмотрена трехточечная разностная схема:

$$L_n^h u^h = A_n u_{n+1}^h - B_n u_n^h + C_n u_{n-1}^h = f_n^h, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$u_0^h = A, \quad R^h u^h = \eta u_N^h + \delta[3u_N^h - 4u_{N-1}^h + u_{N-2}^h]/(2h) = B. \quad (24)$$

Предполагается, что при всех n $A_n > 0$, $C_n > 0$.

Лемма 7. Пусть существует сеточная функция ϕ^h :

$$\phi^h > 0, \quad L_n^h \phi^h < 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\frac{A_{N-1}}{C_{N-1}} \phi_N^h - 4\phi_{N-1}^h + \phi_{N-2}^h \leq 0, \quad 3\phi_N^h - 4\phi_{N-1}^h + \phi_{N-2}^h > 0. \quad (25)$$

Тогда из условий

$$L_n^h \Psi^h \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad \Psi_0^h \geq 0, \quad R^h \Psi^h \geq 0 \quad (26)$$

следует $\Psi_n^h \geq 0, \quad 0 \leq n < N$.

Рассмотрена краевая задача:

$$\varepsilon u'' - a(x)u' - f(x, u) = 0, \quad u(0) = A, \quad R_\varepsilon u = \eta u(1) + \delta u'(1) = B. \quad (27)$$

Предполагается, что

$$\begin{aligned} a \in C^1[0, 1], \quad f \in C^1([0, 1] \times R), \quad a(x) \geq \alpha > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1], \\ \partial f / \partial u \geq -\beta, \quad \beta > 0, \quad \alpha^2 - 4\beta\varepsilon \geq \gamma > 0, \quad \eta \geq 0, \quad \delta > 0. \end{aligned} \quad (28)$$

На равномерной сетке Ω исследуется разностная схема:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \Lambda_{xx,n} u^h - a(x_n) \Lambda_{x,n} u^h - f(x_n, u_n^h) = 0, \quad \varepsilon_n = \varepsilon [1 + a_n h / (2\varepsilon)]^{-1}, \\ u_0^h = A, \quad \eta u_N^h + \delta [3u_N^h - 4u_{N-1}^h + u_{N-2}^h] / (2h) = B. \end{aligned} \quad (29)$$

Теорема 10. Для схемы (29) справедлива оценка точности:

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq C \frac{h^2}{h + \varepsilon}, \quad h \leq h_0. \quad (30)$$

Для нелинейной разностной схемы обоснована сходимость модифицированного метода Пикара.

В §12 рассмотрена краевая задача для уравнений с малым параметром и точечным источником на бесконечном интервале. Такая задача является модельной при анализе распространения примеси от точечного источника. Точечный источник задается дельта-функцией Дирака. Из-за этого в постановке краевой задачи возникает условие на скачок производной. Итак, рассмотрена краевая задача:

$$\varepsilon u'' - a(x)u' - c(x)u = f(x), \quad x \neq 0,$$

$$\varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q, \quad u(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (31)$$

где

$$a(x) \geq \alpha > 0, \quad c(x) \geq \beta > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad Q > 0,$$

$$a(x) \rightarrow a_i, \quad c(x) \rightarrow c_i, \quad f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad i = 2, 1.$$

Доказано, что в окрестности точечного источника имеет место экспоненциальный пограничный слой. Задача (31) редуцирована к конечному интервалу:

$$\begin{aligned} \varepsilon u'' - a(x)u' - c(x)u &= f(x), \quad x \neq 0, \quad \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q, \\ \varepsilon u'(L_1) - \gamma_1(L_1)u(L_1) &= \beta_1(L_1), \quad u'(L_2) - \gamma_2(L_2)u(L_2) = \beta_2(L_2), \end{aligned} \quad (32)$$

где функции γ_i и β_i являются решениями сингулярных задач Коши. Доказано, что решения задач (31) и (32) совпадают при $x \in [L_1, L_2]$. Функции γ_i и β_i могут быть найдены на основе асимптотических разложений с некоторой погрешностью, поэтому по аналогии с §7 исследуется влияние погрешности при задании этих функций на решение задачи (32). Для задачи (32) на равномерной сетке построена разностная схема, подогнанная к функции, задающей экспоненциальный рост решения в окрестности нуля. Пусть u^h – решение построенной схемы.

Теорема 11. Для некоторой постоянной C

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq Ch.$$

Доказана устойчивость разностной схемы к возмущению коэффициентов γ_i и β_i . Аналогичным образом рассмотрен случай уравнения с точечным источником типа реакция-диффузия.

В §13 рассмотрена краевая задача для системы автономных нелинейных уравнений на полубесконечном интервале. Такая задача явля-

ется модельной при моделировании химических реакций с учетом диффузии. Задача имеет вид:

$$-\varepsilon \mathbf{u}'' + \mathbf{a}\mathbf{u}' + \mathbf{g}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{A}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{u}(x) = \mathbf{B}, \quad (33)$$

где \mathbf{a} - постоянная диагональная квадратная матрица порядка N с диагональными элементами a_i , \mathbf{A}, \mathbf{B} - векторы из N компонент, ε - числовой параметр, $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ - известная вектор-функция. Пусть $\mathbf{G}(\mathbf{v})$ - матрица Якоби вектор - функции $\mathbf{g}(\mathbf{v})$. Предполагается, что

$$m_0 \geq a_i \geq m > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \mathbf{g}(\mathbf{B}) = 0, \quad G_{i,j}(\mathbf{v}) \leq 0, \quad i \neq j, \quad \mathbf{v} \in R^N,$$

$$\sum_{j=1}^N G_{i,j}(\mathbf{v}) \geq -\beta, \quad \beta > 0, \quad m^2 - 4\beta\varepsilon \geq \sigma > 0, \quad \sum_{j=1}^N G_{i,j}(\mathbf{B}) \geq \sigma_i > 0. \quad (34)$$

Доказано, что при выполнении условий (34) решение задачи (33) единственно, причем неотрицательно, если $\mathbf{A} \geq 0$, $\mathbf{B} \geq 0$, $\mathbf{g}(\mathbf{0}) \leq 0$. Свойство неотрицательности решения существенно, например, при моделировании химических реакций. Исследовано поведение решения при больших значениях x .

Лемма 8. Найдется L такое, что при всех i и $x \geq L$

$$|u_i(x) - B_i| \leq |u_i(L) - B_i| \exp\{r_i(x - L)\}, \quad r_i = -\sigma_i \{a_i + \sqrt{a_i^2 + 2\sigma_i\varepsilon}\}^{-1}.$$

В соответствии с подходом [3] выделено многообразие решений системы (33), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности:

$$\mathbf{u}'(x) = \gamma(\mathbf{u}(x) - \mathbf{B}) + \mathbf{F}(\mathbf{u}(x)), \quad (35)$$

где матрица γ является решением квадратного уравнения

$$-\varepsilon\gamma^2 + \mathbf{a}\gamma + \mathbf{G}(\mathbf{B}) = 0, \quad (36)$$

причем спектр этой матрицы расположен в левой полуплоскости. Вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ является решением задачи Ляпунова:

$$\varepsilon \mathbf{F}'(\mathbf{u})[\gamma(\mathbf{u} - \mathbf{B}) + \mathbf{F}(\mathbf{u})] - (\mathbf{a} - \varepsilon\gamma)\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{G}(\mathbf{B})(\mathbf{u} - \mathbf{B}), \mathbf{F}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}.$$

В соответствии с [113], [128] для достаточно малых значений $\|\mathbf{u} - \mathbf{B}\|$ решение этой задачи существует и единственно. Решение задачи Ляпунова предлагается находить на основе асимптотических разложений. Пусть

$$\tilde{\mathbf{F}}^m(\mathbf{u}) = \sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k(\mathbf{u})\varepsilon^k.$$

Для коэффициентов асимптотического ряда получена рекуррентная формула. Предварительно доказана лемма.

Лемма 9 Пусть $S \mathbf{z} = \varepsilon \mathbf{z}' - \mathbf{Mz}$,

матрица \mathbf{M} имеет строгое диагональное преобладание:

$$M_{ii}(1 - \eta) \geq \sum_{j \neq i} |M_{ij}|, \quad 0 < \eta < 1, \quad M_{ii} \geq \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда для произвольной дифференцируемой вектор - функции $\mathbf{z}(x)$, имеющей предел на бесконечности, справедлива оценка:

$$\|\mathbf{z}\|_N \leq \eta^{-1} \{ \alpha^{-1} \|S\mathbf{z}\|_N + \max_i \lim_{x \rightarrow \infty} |z_i(x)| \}.$$

Лемма 10 Пусть $u(x)$ – решение задачи (33). Тогда при достаточно малых значениях ε для некоторой постоянной C :

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{u}(x)) - \tilde{\mathbf{F}}^m(\mathbf{u}(x))\|_N \leq C\varepsilon^{m+1}.$$

Предложен асимптотический подход к решению матричного уравнения (36). С учетом соотношения (35) задача (33) редуцирована к краевой задаче для конечного интервала. Исследовано влияние погрешности, обусловленной редукцией задачи, на решение редуцированной задачи.

В третьей главе рассматриваются скалярные и векторные разностные схемы с бесконечным числом узлов. Подход предыдущей главы к переносу краевых условий из бесконечности распространен на случай разностных уравнений. В случае трехточечной разностной схемы многообразие решений, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности, задается в виде разностного уравнения первого порядка. Коэффициенты этого уравнения находятся из вспомогательных двухточечных задач с предельным условием на бесконечности. При переходе к конечному числу узлов это разностное уравнение первого порядка при некотором $n = N$ принимается в качестве правого краевого условия. Отдельно рассматривается случай, когда разностная схема вырождается при стремлении некоторого параметра к нулю.

В §14 рассмотрена линейная трехточечная разностная схема:

$$A_n u_{n-1}^h - C_n u_n^h + B_n u_{n+1}^h = F_n, \quad n > 0, \quad (37)$$

$$u_0^h = G, \quad u_n^h \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Предполагается, что при всех n

$$A_n > 0, B_n > 0, C_n \geq A_n + B_n + \Delta, \quad \Delta > 0,$$

$$A_n \rightarrow A^0, B_n \rightarrow B^0, C_n \rightarrow C^0, F_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Многообразие решений разностного уравнения (37), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности, зададим в виде разностного уравнения:

$$u_n^h = \alpha_n u_{n-1}^h + \beta_n, \quad n \geq 1, \quad (40)$$

где коэффициенты α_n и β_n являются решением двухточечных разност-

ных схем с предельным условием на бесконечности:

$$\alpha_n = \frac{A_n}{C_n - B_n \alpha_{n+1}}, \quad \alpha_n \rightarrow \alpha^0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \alpha^0 = \frac{2A^0}{C^0 + \sqrt{C^0 C^0 - 4A^0 B^0}}, \quad (41)$$

$$\beta_n = \frac{B_n \beta_{n+1} - F_n}{C_n - B_n \alpha_{n+1}}, \quad \beta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Доказывается, что решения задач (41),(42) существуют и единственны при всех $n > 0$. На основе соотношения (40) схема (37)-(38) редуцируется к конечному числу узлов:

$$\begin{aligned} L_n^h u^h &= A_n u_{n-1}^h - C_n u_n^h + B_n u_{n+1}^h = F_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0^h &= G, \quad u_N^h - \alpha_N u_{N-1}^h = \beta_N. \end{aligned} \quad (43)$$

Доказано, что решения задач (37)-(38) и (43) совпадают при всех $n \leq N$. В отличие от (37)-(38) задача (43) содержит конечное число узлов и ее решение может быть найдено методом прогонки. Доказано, что решение схемы (43) устойчиво к возмущению коэффициентов α_N и β_N .

Лемма 11.. Пусть коэффициенты α_N и β_N возмущены,

$$|\alpha_N - \tilde{\alpha}_N| \leq \Delta_1, \quad 0 \leq \tilde{\alpha}_N < 1, \quad |\beta_N - \tilde{\beta}_N| \leq \Delta_2. \quad (44)$$

Тогда

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq (1 - \tilde{\alpha}_N)^{-1} \{ \Delta_1 |u_{N-1}^h| + \Delta_2 \}, \quad 0 \leq n \leq N.$$

В случае $q = \min_{n < N} A_n / B_n > 1$ выполнится

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq \frac{q}{q - \tilde{\alpha}_N} \{ \Delta_1 |u_{N-1}^h| + \Delta_2 \} q^{n-N}, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Рассматривается способ нахождения α_N и β_N на основе разложения коэффициентов исходной схемы в ряд по обратным степеням n .

Точность в вычислении этих коэффициентов возрастает с увеличением числа удержанных узлов.

Если разностное уравнение (37) вырождается в уравнение первого порядка при стремлении некоторого параметра к нулю, то для нахождения α_n и β_n предлагается использовать асимптотические разложения по параметру. Получены рекуррентные формулы для коэффициентов асимптотических разложений. Доказано, что если ограничиться n слагаемыми асимптотического ряда, то коэффициенты α_n и β_n будут найдены с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

Исследована возможность сведения задачи (37)-(38) к начальной:

$$u_n^h = \alpha_n u_{n-1}^h + \beta_n, \quad n \geq 1, \quad u_0^h = G. \quad (45)$$

Решения задач (37)-(38) и (45) совпадают. Доказана устойчивость схемы (45) к возмущению коэффициентов α_n и β_n , которые из задач (41) и (42) могут находиться приближенно.

В §15 рассмотрен вопрос редукции к конечному числу узлов нелинейной трехточечной схемы с постоянными коэффициентами.

В §16 рассмотрена нелинейная трехточечная схема с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} A_n u_{n-1}^h - C_n u_n^h + B_n u_{n+1}^h &= F(u_n^h) + f_n, \quad n > 0, \\ u_0^h &= G, \quad u_n^h \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (46)$$

При определенных ограничениях на коэффициенты предложен способ редукции этой схемы к схеме с конечным числом узлов.

В §17 рассмотрена трехточечная векторная схема с полубесконечным числом узлов:

$$\mathbf{L}_i \mathbf{U} = \mathbf{C}_i \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad i \geq 1,$$

$$U_0 = R, \quad U_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Предполагается, что при каждом i U_i, F_i, R – векторы из N компонент, C_i, D_i – ненулевые диагональные матрицы порядка N , матрицы G_i являются M – матрицами,

$$C_i \rightarrow C_\infty, \quad G_i \rightarrow G_\infty, \quad D_i \rightarrow D_\infty, \quad F_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

$$\|G_i^{-1}C_i\| + \|G_i^{-1}D_i\| \leq \sigma < 1, \quad C_i \geq D_i \geq 0, \quad Q_i = G_i - C_i - D_i,$$

$$Q_i^{j,j} \geq \sum_{k \neq j} |Q_i^{j,k}| + \Delta, \quad \Delta > 0, \quad i > 0, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Схема (47), в частности, соответствует аппроксимации эллиптического уравнения в полубесконечной полосе. Для схемы (47) определим двухточечное векторное соотношение, задающее многообразие решений разностного уравнения (47), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности:

$$U_i = A_i U_{i-1} + B_i,$$

где матрицы A_i и векторы B_i связаны рекуррентными формулами:

$$A_i = (G_i - D_i A_{i+1})^{-1} C_i, \quad A_i \rightarrow A_\infty, \quad i \rightarrow \infty, \quad (48)$$

$$D_i(B_{i+1} - B_i) - [G_i - D_i - D_i A_{i+1}]B_i = F_i, \quad B_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad (49)$$

матрица A_∞ является решением матричного уравнения:

$$D_\infty A^2 - G_\infty A + C_\infty = 0$$

с нормой, меньшей единицы.

В случае, когда разностное уравнение (47) вырождается при стремлении некоторого параметра к нулю (что случается при сеточной аппроксимации эллиптических сингулярно-возмущенных уравнений),

предложен асимптотический подход для нахождения \mathbf{A}_i и \mathbf{B}_i из (48) и (49). Оценена точность асимптотических разложений.

Редуцированная к конечному числу узлов схема имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{U}_{i+1} &= \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \\ \mathbf{U}_0 &= \mathbf{R}, \quad \mathbf{U}_M - \mathbf{A}_M \mathbf{U}_{M-1} = \mathbf{B}_M, \end{aligned} \quad (50)$$

где матрица \mathbf{A}_M и вектор \mathbf{B}_M являются решениями вспомогательных задач (48),(49).

Теорема 11. Пусть $\tilde{\mathbf{U}}$ – решение схемы (50) в случае возмущенных $\tilde{\mathbf{A}}_M, \tilde{\mathbf{B}}_M$. Пусть

$$\|\tilde{\mathbf{A}}_M - \mathbf{A}_M\| \leq \Delta_1, \quad \|\tilde{\mathbf{B}}_M - \mathbf{B}_M\| \leq \Delta_2, \quad \|\tilde{\mathbf{A}}_M\| < 1.$$

Тогда

$$\max_i \|\tilde{\mathbf{U}}_i - \mathbf{U}_i\| \leq \frac{1}{1 - \|\tilde{\mathbf{A}}_M\|} \{\Delta_1 \|\mathbf{U}_{M-1}\| + \Delta_2\}. \quad (51)$$

В §18 рассмотрена четырехточечная разностная схема, соответствующая аппроксимации параболического уравнения в случае, когда предельные краевые условия по пространственной координате заданы на $\pm\infty$. Предложен способ редукции схемы к схеме на сетке с конечным числом узлов.

В четвертой главе рассматриваются двумерные линейные и нелинейные эллиптические уравнения в прямоугольной области и в полубесконечной полосе. Рассматриваются задачи в неограниченной по продольной координате области или задачи, редуцированные к конечной области, поэтому пограничный слой по продольной координате отсутствует или слабо выражен. По другой координате рассматриваются случаи регулярного экспоненциального и экспоненциального параболического погранслоев. Предлагается способ сведения краевой задачи

с полубесконечной полосы к прямоугольной области. Строятся и исследуются разностные схемы для задач в прямоугольной области.

В §19 рассматривается эллиптическое уравнение с конвективными членами по обеим координатам:

$$-\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + a(x, z) \frac{\partial u}{\partial x} - w(z) \frac{\partial u}{\partial z} + f(x, z, u) = 0 \quad (52)$$

в прямоугольной области G , $G = \{0 < x < L_1, 0 < z < L_2\}$. Краевые условия имеют вид:

$$\begin{aligned} u(x, z) = \phi_i(x, z), \quad (x, z) \in l_i \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_3 u = \phi_3(z), \quad (x, z) \in l_3, \\ u - \varepsilon \beta_4 \frac{\partial u}{\partial z} = \phi_4(x), \quad (x, z) \in l_4. \end{aligned} \quad (53)$$

На коэффициенты задачи накладываются ограничения:

$$\varepsilon > 0, \quad a(x, z) \geq \alpha > 0, \quad w(z) \geq \sigma > 0, \quad \delta_3 \geq 0, \quad \beta_4 \geq 0,$$

$$f'_u \geq \beta > 0, \quad f'_u + 3a'_x \geq \beta > 0, \quad f'_u - 2w'(z) \geq \beta > 0.$$

Предполагается достаточная гладкость коэффициентов и согласованность краевых условий. Предварительно оцениваются производные.

Лемма 12. Для некоторой постоянной C при всех $(x, z) \in \bar{G}$ выполнится:

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(x, z) \right| \leq C [1 + \varepsilon^{1-j} \exp[\varepsilon^{-1} \alpha (x - L_1)]], \quad j = 1, 2, 3$$

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial z^j} u(x, z) \right| \leq C [1 + \varepsilon^{-j} \exp\{-\varepsilon^{-1} \sigma z\}], \quad j = 1, 2, 3.$$

Согласно лемме 12 по x пограничный слой слабо выражен и имеет место экспоненциальный пограничный слой около границы $z = 0$. Для задачи (52)-(53) на равномерной по обеим координатам сетке построена

схема экспоненциальной подгонки по z (с учетом специальной аппроксимации как самого уравнения, так и краевого условия) и обоснована ее равномерная сходимость.

Теорема 12. Пусть u^h - решение построенной схемы. Тогда имеет место оценка точности $\|u^h - [u]_\Omega\| \leq C(h_1 + h_2)$.

Доказано, что в случае краевого условия $u'_z = 0$, $z = 0$, соответствующего, например, отражению субстанции от поверхности, схема направленных разностей (по обеим координатам) обладает свойством равномерной сходимости. Предложен сходящийся метод линеаризации разностной схемы.

В §20 рассмотрена краевая задача для эллиптического уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} - b(x, y)u = f(x, y),$$

$$u(x, y) = \phi_i, (x, y) \in l_i; i = 1, 2, 3, \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, y) = 0 \quad (54)$$

в случае полубесконечной полосы $D = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq 1\}$. Предполагается согласованность краевых условий. Предложен способ сведения задачи (54) к прямоугольной области. В качестве краевого условия на искусственной границе $x = L$ предлагается использовать вырожденное по продольной координате дифференциальное уравнение. Пусть \tilde{u} - решение редуцированной к прямоугольной области задачи.

Лемма 13. При всех $(x, y) \in D_L$

$$|u(x, y) - \tilde{u}(x, y)| \leq \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(L, y) \right\| \exp\{\alpha \varepsilon^{-1}(x - L)\}.$$

Проведена оценка производных решения как исходной, так и редуцированной задач. Согласно полученной оценке решение редуцированной задачи имеет параболические экспоненциальные погранслои у границ прямоугольной области $y = 0$, $y = 1$. В этих слоях используется

сетка, предложенная Н.С. Бахваловым в случае обыкновенного уравнения. По координате x сетка предполагается равномерной, используется схема направленных разностей. Пусть u^h – решение построенной схемы.

Теорема 13. Для некоторой постоянной C

$$\|u^h - [\tilde{u}]_\Omega\| \leq C \left[h_1 + \frac{1}{N_2^2} \right].$$

В §21 рассмотрена краевая задача:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a(x) \frac{\partial u}{\partial x} - b(x, y)u = f(x, y),$$

$$u(x, y) = \phi_i, (x, y) \in l_i, i = 1, 2, 3, \quad Ru = \eta_4(y)u(L, y) + u'_x(L, y) = \phi_4(y).$$

Такая задача со смешанным краевым условием на границе $x = L$ может возникнуть после редукции с полубесконечной полосы. Как и в §20 по координате y используется центрально - разностная аппроксимация на сетке Н.С. Бахвалова, по x предлагается использовать монотонную схему Самарского на равномерной сетке. По аналогии с §11 доказано, что хотя односторонняя аппроксимация на трехточечном шаблоне производной в краевом условии нарушает диагональное преобладание разностной схемы, она сохраняет принцип максимума и не понижает точность схемы Самарского. Пусть u^h – решение построенной схемы.

Теорема 14. Для некоторой постоянной C справедлива оценка:

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq C \left[\frac{h_1^2}{h_1 + \varepsilon} + \frac{1}{N_2^2} \right].$$

В §22 построена и обоснована разностная схема для нелинейного эллиптического уравнения в прямоугольной области. Обоснован модифицированный метод Пикара для линеаризации разностной схемы.

В главе 5 рассматриваются вопросы численного моделирования распространения примесей от источников загрязнений.

В §23 для эллиптического уравнения в полосе рассмотрена краевая задача, решение которой содержит степенной пограничный слой:

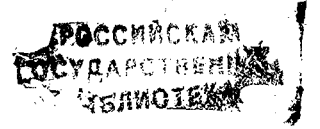
$$\varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + w(y) \frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y)u = f(x, y),$$

$$u(x, 1) = 0, \quad u(x, 0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = 0. \quad (55)$$

Такая задача является модельной при анализе распространения примеси в направлении ветра, когда коэффициент вертикальной диффузии линейным образом зависит от координаты. На равномерной сетке в соответствии с методом прямых (вдоль оси y) и предложенным методом построения схем в главе 1 в полосе строится разностная схема и доказывается ее равномерная по малым параметрам сходимость, с первым порядком точности. Далее схема редуцируется к конечному числу узлов в соответствии с подходом, разработанным в главе 3.

В §24 кратко изложен метод расчета переноса примеси от точечных и площадных источников. Решается начально - краевая задача для параболического уравнения в случае трех измерений, изначально задача ставится в неограниченной области. Пакет программ по расчету на компьютере переноса примесей от источников загрязнений написан в соответствии с хоздоговором между ИИТПМ СО РАН и Омским областным комитетом природы.

Автор благодарит Конюхову Н.Б. за полезные обсуждения и замечания, касающиеся главы 2.



Глава 1.

Разностные схемы для нелинейных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Данная глава посвящена разработке разностных схем для обыкновенных нелинейных сингулярно возмущенных уравнений второго порядка на конечном интервале. Предложен способ построения разностных схем, основанный на замене коэффициентов уравнения на кусочно- постоянные или кусочно- линейные и написании точных разностных соотношений для задачи с возмущенными коэффициентами. В случае линейной задачи такой подход к построению разностной схемы применялся, например, в [148]. Построен ряд новых разностных схем.

§1. Нелинейное сингулярно возмущенное уравнение второго порядка

Рассмотрим исходную краевую задачу :

$$T_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + a(x)u' + f(x, u) = 0, \quad (1.1a)$$

$$u(0) = A, R_\varepsilon u = \eta u(1) + \varepsilon \delta u'(1) = B. \quad (1.1b)$$

Предполагается, что $a \in C^1[0, 1]$, $f \in C^1([0, 1] \times R)$,

$$a(x) \geq \alpha > 0, \delta \geq 0, \eta \geq 0, \delta + \eta > 0, \varepsilon > 0, \quad (1.2a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \geq -\beta, \quad \beta > 0, \quad \alpha^2 - 4\beta\varepsilon > 0. \quad (1.26)$$

Анализ дифференциальной задачи. Пусть L - линейный дифференциальный оператор:

$$LP = -\varepsilon P'' + a(x)P' + b(x)P, \quad x \in (0, 1)$$

с краевыми условиями $P(0), R_\varepsilon P$. Предполагаем, что

$$b, c \in Q^0[0, 1], \quad \varepsilon > 0, \quad \delta \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \delta + \eta > 0.$$

Лемма 1.1. Пусть существует функция $\phi \in C^2[0, 1]$ такая, что

$$\phi(x) > 0, \quad x \in [0, 1], \quad L\phi(x) > 0, \quad x \in (0, 1), \quad R_\varepsilon \phi > 0.$$

Тогда для оператора L справедлив принцип максимума ([145], с. 40), [173] и из условий

$$P \in C^1[0, 1] \cap Q^2[0, 1], \quad P(0) \geq 0, \quad R_\varepsilon P \geq 0, \quad LP(x) \geq 0, \quad x \in (0, 1) \quad (1.3)$$

следует, что $P(x) \geq 0, \quad x \in [0, 1]$.

Утверждение леммы следует из представления функции P в виде произведения $P = \phi y$.

Лемма 1.2. Пусть $p, q \in C^1[0, 1] \cap Q^2[0, 1]$. Тогда справедливы оценки:

$$|p(x) - q(x)| \leq \Phi(x), \quad \Phi(x) = [\alpha^2(\beta\gamma)^{-1} \|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + |p(0) - q(0)|] \times \\ \times \exp[2\beta\alpha^{-1}x] + |R_\varepsilon p - R_\varepsilon q| [\eta + \alpha\delta/2]^{-1} \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x-1)]. \quad (1.4)$$

Доказательство. Определим линейный оператор

$$Lz = -\varepsilon z'' + a(x)z' + [f(x, p) - f(x, q)](p - q)^{-1}z$$

с краевыми условиями $z(0), R_\varepsilon z$. Тогда $Lz = T_\varepsilon p - T_\varepsilon q$, $z = p - q$.

Определим

$$\phi(x) = \exp(2\beta\alpha^{-1}x), \quad r(x) = \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x-1)].$$

Нетрудно убедиться, что

$$L\phi \geq \beta\gamma\alpha^{-2}\phi, \quad Lr \geq \gamma(4\varepsilon)^{-1}r, \quad R_\varepsilon\phi > 0, \quad R_\varepsilon r = \eta + \alpha\delta/2.$$

В соответствии с леммой 1.1, для оператора L справедлив принцип максимума. Определим $\Psi(x) = \Phi(x) \pm z(x)$. Для функции $\Psi(x)$ выполнены условия (1.3) и в силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает лемму.

Из оценки (1.4) следует единственность решения задачи (1.1), построением верхнего и нижнего решений можно убедиться в существовании решения [34]. Определяя $p = u$, $q = 0$ из леммы 1.2 получим оценку решения:

$$\begin{aligned} |u(x)| \leq & [\alpha^2(\beta\gamma)^{-1}||f(x,0)| + |A|] \exp[2\beta\alpha^{-1}x] + \\ & + |B|[\eta + \alpha\delta/2]^{-1} \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x-1)]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что $|u(x)|$ ограничено равномерно по ε , но может экспоненциально расти.

Построение и обоснование разностной схемы. Пусть Ω – произвольная неравномерная сетка исходного интервала. Для построения разностной схемы перейдем от (1.1) к уравнению с кусочно-постоянными коэффициентами, для которого несложно в явном виде выписать точную разностную схему.

Итак, от (1.1) перейдем к уравнению с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$\tilde{T}_\varepsilon V = -\varepsilon V'' + \tilde{a}(x)V' + \tilde{f}(x, V) = 0, \quad V(0) = A, \quad R_\varepsilon V = B, \quad (1.6)$$

где при $x \in \Delta_n$

$$\tilde{a}(x) = a_n = a(x_{n-1}), \quad \tilde{f}(x, V) = f_n = f(x_{n-1}, V(x_{n-1})),$$

a и f соответствуют (1.1). Решение уравнения (1.6) на каждом интервале Δ_n можно выписать в явном виде:

$$V(x) = \gamma_1^{(n)} \exp(a_n \varepsilon^{-1} x) + \gamma_2^{(n)} - f_n a_n^{-1} x, \quad (1.7)$$

где коэффициенты $\gamma_1^{(n)}$ и $\gamma_2^{(n)}$ определяются из условий

$$V_{n-1}^h = V(x_{n-1}), \quad V_n^h = V(x_n).$$

Исходя из требования $V \in C^1[0, 1]$, получим соотношение:

$$\lim_{x \rightarrow x_n - 0} V'(x) = \lim_{x \rightarrow x_n + 0} V'(x), \quad n = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Подставляя сюда выражения для $V(x)$ из (1.7) для интервалов Δ_n, Δ_{n+1} , приходим к конечно-разностной схеме:

$$A_n V_{n-1}^h - B_n V_n^h + D_n V_{n+1}^h = F_n, \quad V_0^h = A, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (1.8a)$$

$$\begin{aligned} \eta V_N^h + a_N \delta [1 - \exp(-a_N h_N \varepsilon^{-1})]^{-1} (V_N^h - V_{N-1}^h) = \\ = B + \delta [\varepsilon a_N^{-1} - h_N [1 - \exp(-a_N h_N \varepsilon^{-1})]^{-1}], \end{aligned} \quad (1.8b)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_n}{1 - \exp(-a_n h_n \varepsilon^{-1})}, \quad D_n = \frac{a_{n+1}}{\exp(a_{n+1} h_{n+1} \varepsilon^{-1}) - 1}, \\ B_n &= A_n + D_n, \quad F_n = f_n a_n^{-1} (h_n A_n - \varepsilon) - f_{n+1} a_{n+1}^{-1} (h_{n+1} D_n - \varepsilon). \end{aligned}$$

Соотношение (1.8b) получено при подстановке $V(x)$ из (1.7) при $n = N$ в краевое условие $R_\varepsilon V = B$.

Согласно построению схема (1.8) является точной на функции $V(x)$, для анализа точности этой схемы остается оценить $\|u - V\|$.

Теорема 1.1. Пусть u и V - соответственно, решения задач (1.1) и (1.6). Найдется C такое, что $\|u - V\| \leq C \exp(2\beta\alpha^{-1})h$.

Доказательство . Сначала покажем, что найдется C такое, что

$$|u'(x)| \leq C[1 + \varepsilon^{-1} \exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x - 1)]]. \quad (1.9)$$

Существует q такое, что $u(1) - u(1 - \varepsilon) = \varepsilon u'(q)$. Согласно (1.5), $|u(x)| \leq C$, поэтому $|u'(q)| \leq C\varepsilon^{-1}$. Интегрируя уравнение (1.1) от q до 1, получим $|u'(1)| \leq C\varepsilon^{-1}$. Теперь уравнение (1.1) запишем в виде

$$\varepsilon(\exp[\varepsilon^{-1}p(x)]u')' = f(x, u) \exp[\varepsilon^{-1}p(x)], \quad p(x) = \int_x^1 a(s)ds.$$

Интегрируя это уравнение от x до 1, получим

$$\varepsilon u'(1) - \varepsilon \exp[\varepsilon^{-1}p(x)]u'(x) = \int_x^1 f(s, u(s)) \exp[\varepsilon^{-1}p(s)]ds.$$

Следовательно,

$$|u'(x)| \leq C \left[\varepsilon^{-1} \exp[-\varepsilon^{-1}p(x)] + \varepsilon^{-1} \int_x^1 \exp \left[\frac{p(s)}{\varepsilon} - \frac{p(x)}{\varepsilon} \right] ds \right],$$

откуда и следует требуемая оценка (1.9).

Оценим $|\tilde{T}_\varepsilon u - \tilde{T}_\varepsilon V|$. Имеем

$$\tilde{T}_\varepsilon u - \tilde{T}_\varepsilon V = [\tilde{a}(x) - a(x)]u' + \tilde{f}(x, u) - f(x, u). \quad (1.10)$$

При $x \in \Delta_n$

$$|\tilde{f}(x, u) - f(x, u)| \leq C \int_{x_{n-1}}^x |u'(s)|ds.$$

Учитывая оценку (1.9), из (1.10) получим

$$|\tilde{T}_\varepsilon u - \tilde{T}_\varepsilon V| \leq Ch[1 + \varepsilon^{-1} \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x - 1)]]. \quad (1.11)$$

Определим линейный оператор

$$\tilde{L}z = -\varepsilon z'' + \tilde{a}(x)z' + G(x, u, V)z$$

с краевыми условиями $z(0), R_\varepsilon z$, где при $x \in \Delta_n$

$$G(x, u, V) = [f(x_{n-1}, u_{n-1}) - f(x_{n-1}, V_{n-1})](u_{n-1} - V_{n-1})^{-1},$$

$$u_{n-1} = u(x_{n-1}), \quad V_{n-1} = V(x_{n-1}).$$

При $x \in \Delta_n$

$$L(u - V) = \tilde{T}_\varepsilon u - \tilde{T}_\varepsilon V + G(x, u, V)[u - u_{n-1} - (V - V_{n-1})]. \quad (1.12)$$

Для $V'(x)$ так же как и для $u'(x)$ справедлива оценка (1.9). Учитывая (1.9), (1.11), из (1.12) получим

$$|\tilde{L}(u - V)| \leq Ch\{1 + \varepsilon^{-1} \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x - 1)]\}. \quad (1.13)$$

Несложно показать, что

$$\tilde{L}\phi \geq \beta\gamma\alpha^{-2}\phi, \quad \tilde{L}r \geq \gamma(4\varepsilon)^{-1}r. \quad (1.14)$$

Учитывая эти неравенства, определяем функцию

$$\Psi(x) = Ch[\phi(x) + r(x)] \pm (u - V).$$

Используя (1.13), (1.14), получаем, что для некоторого C

$$\tilde{L}\Psi(x) \geq 0, \quad x \in (0, 1), \quad \Psi(0) \geq 0, \quad R_\varepsilon\Psi \geq 0.$$

Согласно построению, $\Psi \in C^1[0, 1] \cap Q^2[0, 1]$. Используя лемму 1.1 и применяя принцип максимума к оператору \tilde{L} , получаем $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает теорему.

Схема (1.8) точна на функции $V(x)$, поэтому, в соответствии с доказанной теоремой, она сходится со скоростью $O(h)$ равномерно относительно параметра ε . Разностная схема (1.8) является нелинейной

системой алгебраических уравнений. Методы решения таких систем проанализированы, например, в [137].

Остановимся на результатах численных экспериментов. Рассмотрим краевую задачу:

$$-\varepsilon u'' + u' - \exp(-u) = G(x), \quad u(0) = A, \quad \varepsilon u'(1) = B, \quad (1.15)$$

где $A, B, G(x)$ подбирались таким образом, чтобы решение задачи (1.15) имело вид

$$u(x) = \exp[(x-1)\varepsilon^{-1}] + \ln(1+x).$$

Решение схемы (1.8) находилось методом итераций Пикара. Начальная итерация $V_0^h(x) = 0$ обеспечивала сходимость итерационного процесса. На каждом итерационном шаге решение находилось методом прогонки. В табл. 1.1 в случае равномерной сетки для схемы (1.8) приведена норма погрешности $\delta(h, \varepsilon) = \max |u(x) - V^h(x)|, x \in \Omega$ при различных значениях ε и h .

Таблица 1.1.

h	ε				
	1	1.0E-1	1.0E-2	1.0E-3	1.0E-4
0.1	0.61E-1	0.77E-1	0.11	0.12	0.12
0.02	0.12E-1	0.14E-1	0.17E-1	0.23E-1	0.23E-1
0.01	0.61E-2	0.69E-2	0.76E-2	0.12E-1	0.12E-1

Результаты экспериментов подтверждают, что схема (1.8) сходится равномерно относительно ε , точность схемы - порядка $O(h)$. В табл. 1.2 для сравнения приведены значения $\delta(h, \varepsilon)$ для схемы направленных разностей при различных ε и h .

Таблица 1.2.

h	ε				
	1	1.0E-1	1.0E-2	1.0E-3	1.0E-4
0.1	0.26E-1	0.93E 0	0.99E+1	1.0E+2	1.0E+3
0.02	0.55E-2	0.19E+0	0.20E+1	0.20E+2	0.20E+3
0.01	0.28E-2	0.93E-1	0.10E+1	0.10E+2	0.10E+3

§2. Краевая задача для системы уравнений

Рассмотрим исходную краевую задачу :

$$T_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + a(x)u' + F(x, u) = 0, \quad (2.1)$$

$$u(0) = A, R_\varepsilon u = \delta u(1) + \varepsilon \beta u'(1) = B, \quad (2.2)$$

где $a(x), \delta, \beta$ - диагональные квадратные матрицы порядка N с диагональными элементами ,соответственно, $a_i(x), \delta_i, \beta_i, A, B$ - векторы из N компонент, ε -числовой параметр, $\varepsilon > 0$, F - известная вектор-функция, $u(x)$ - вектор-функция решения. Предполагается, что при всех $i = 1, 2, \dots, N$ $a_i \in C^1[0, 1]$, $F_i \in C^1([0, 1] \times R)$,

$$a_i(x) \geq \alpha_i > 0, \delta_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \delta_i + \beta_i > 0, \alpha_0 = \min_i \alpha_i. \quad (2.3)$$

Дополнительные ограничения на F будем рассматривать отдельно.

Задача (2.1)-(2.2) является модельной, например, при описании переноса примеси с учетом диффузии и химических реакций. Под сеточной вектор-функцией будем подразумевать вектор, компонентами которого являются сеточные функции, определенные на сетке Ω .

Анализ дифференциальной задачи. Рассмотрим вспомогательную линейную краевую задачу :

$$Lu = -\varepsilon u'' + a(x)u' + G(x)u = F(x), \quad u(0) = A, \quad R_\varepsilon u = B, \quad (2.4)$$

где матрица $a(x)$ определена выше, $G(x)$ - квадратная матрица порядка N , $F_i, G_{ij} \in C[0, 1]$, предполагаются справедливыми ограничения (2.3).

Лемма 2.1. Пусть при всех i

$$G_{ii} \geq \eta > 0, \quad \sum_{j \neq i} |G_{ij}| \leq (1 - \sigma)G_{ii}, \quad 0 < \sigma < 1. \quad (2.5)$$

Тогда :

$$\|u\|_N \leq \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\|F\|_N}{\eta} + \|A\| + \max_i \left| \frac{B_i}{\delta_i + \alpha_i \beta_i} \right| \right].$$

Доказательство. Рассмотрим скалярную линейную задачу :

$$L_0 V = -\varepsilon V'' + d(x)V' + b(x)V = f(x), \quad V(0) = A_0, \quad \delta_0 V(1) + \varepsilon \beta_0 V'(1) = B_0,$$

где $b(x) > 0, \varepsilon > 0, \delta_0 \geq 0, \beta_0 \geq 0, \delta_0 + \beta_0 > 0, d(x) \geq d_0 > 0, x \in I$, $b, d, f \in Q^0[0, 1]$. Покажем, что

$$|V(x)| \leq \left\| \frac{f}{b} \right\| + |A_0| + \frac{|B_0|}{\delta_0 + d_0 \beta_0} \exp[d_0 \varepsilon^{-1}(x - 1)]. \quad (2.6)$$

При наложенных ограничениях для оператора L_0 справедлив принцип максимума и если для некоторой функции $\Psi(x) \in C^1[0, 1] \cap Q^2[0, 1]$

$$\Psi(0) \geq 0, \quad \delta_0 \Psi(1) + \varepsilon \beta_0 \Psi'(1) \geq 0, \quad L_0 \Psi(x) \geq 0, \quad x \in I, \quad (2.7)$$

то $\Psi(x) \geq 0$ при всех $x \in I$ [1]. Определим :

$$\Psi(x) = \left\| \frac{f}{b} \right\| + |A_0| + \frac{|B_0|}{\delta_0 + d_0 \beta_0} \exp[d_0 \varepsilon^{-1}(x - 1)] \pm V(x).$$

При таком выборе $\Psi(x)$ выполнены соотношения (2.7) и поэтому $\Psi(x) \geq 0, x \in I$. Это доказывает оценку (2.6).

Уравнение (2.4) для компоненты i запишем в виде:

$$-\varepsilon u_i'' + a_i(x)u_i' + G_{ii}(x)u_i = F_i(x) - \sum_{j \neq i} G_{ij}(x)u_j$$

В силу оценки (2.6) имеем :

$$|u_i(x)| \leq \eta^{-1} \|F_i\| + \left\| G_{ii}^{-1} \sum_{j \neq i} G_{ij} u_j \right\| + |B_i| (\delta_i + \alpha_i \beta_i)^{-1} \exp[\alpha_i \varepsilon^{-1} (x-1)] + |A_i|.$$

Учитывая условия (2.5), приходим к утверждению леммы.

Получим оценку устойчивости при других ограничениях на матрицу $G(x)$.

Лемма 2.2. Пусть в (2.4) $G_{ij}(x) \leq 0$ при $i \neq j$. Пусть найдется вектор-функция $\phi(x)$ с компонентами из $C^2[0, 1]$, такая, что

$$\phi(x) > 0, L\phi(x) > 0, x \in I, R_\varepsilon \phi > 0. \quad (2.8)$$

Тогда, если для некоторой вектор-функции $\Psi(x)$ с компонентами из $C^2[0, 1]$

$$\Psi(0) \geq 0, R_\varepsilon \Psi \geq 0, L\Psi(x) \geq 0, x \in I, \quad (2.9)$$

то $\Psi(x) \geq 0, x \in I$.

Доказательство. Предположим, что какие-то компоненты вектор-функции $\Psi(x)$ оказались меньше нуля. Определим $y : y_i = \Psi_i / \phi_i$. Тогда при некоторых j_0, x_0 будет $y_{j_0}(x_0) = \min y_j(x) < 0$. Покажем, что $x_0 \neq 1$. В силу условий (2.9)

$$[\delta_{j_0} \phi_{j_0}(1) + \varepsilon \beta_{j_0} \phi'_{j_0}(1)] y_{j_0}(1) + \varepsilon \beta_{j_0} \phi_{j_0}(1) y'_{j_0}(1) \geq 0.$$

Исходя из этого соотношения, легко убедиться, что $x_0 < 1$. Следовательно, x_0 - точка локального минимума и поэтому:

$$y_{j_0}(x_0) < 0, y'_{j_0}(x_0) = 0, y''_{j_0}(x_0) \geq 0.$$

Нетрудно убедиться, что

$$L_{j_0} \Psi = -\varepsilon \phi_{j_0} y_{j_0}'' + [-2\varepsilon \phi_{j_0}' + a_{j_0} \phi_{j_0}] y_{j_0}' + y_{j_0} L_{j_0} \phi + \sum_{k=1}^N G_{j_0 k} \phi_k (y_k - y_{j_0}).$$

Учитывая (2.8), получим $L_{j_0} \Psi(x_0) < 0$, что противоречит (2.9). Лемма доказана.

Замечание 1. Лемма 2.2 останется в силе, если предположить, что компоненты вектор-функции $\Psi(x)$ из $C^1[0, 1] \cap Q^2[0, 1]$. При этом если в (2.9) x - точка разрыва второй производной, то условие $L\Psi(x) \geq 0$ должно быть выполнено для правого и левого пределов в этой точке.

Замечание 2. Условие $G_{i,j}(x) \leq 0$ при $i \neq j$ для выполнения принципа максимума является существенным. В этом можно убедиться, рассмотрев краевую задачу:

$$\begin{aligned} -\varepsilon u_1'' + u_1' &= 0, \quad -\varepsilon u_2'' + u_2' + u_1 = 0, \\ u_1(0) = 1, u_2(0) &= 0, u_1'(1) = 0, u_2'(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если определить $\Psi(x) = (u_1(x), u_2(x))$, $\phi(x) = (\exp(x), \exp(x))$, то будут выполнены условия (2.8), (2.9), но при определенных x будет $u_2(x) < 0$.

Лемма 2.3. Пусть для задачи (2.4) в дополнение к условиям (2.3) при всех i выполнены неравенства :

$$\sum_{j=1}^N G_{ij} \geq -\eta, \quad \eta > 0, \quad \alpha_0^2 - 4\eta\varepsilon \geq \gamma > 0, \quad G_{ij} \leq 0, \quad j \neq i. \quad (2.11)$$

Тогда для оператора L из (2.4) справедлив принцип максимума и для решения задачи (2.4) верна оценка устойчивости :

$$\begin{aligned} \|u(x)\| \leq \Gamma(x) &= [\alpha_0^2(\eta\gamma)^{-1} \|F\|_N + \|A\|] \exp[2\eta\alpha_0^{-1}x] + \\ &+ \max_i |B_i(\delta_i + \alpha_0\beta_i/2)^{-1}| \exp[\alpha_0(2\varepsilon)^{-1}(x-1)]. \end{aligned}$$

Доказательство. Определим вектор-функцию $\phi(x)$:

$\phi_i(x) = \exp[2\eta\alpha_0^{-1}x]$. Нетрудно убедиться, что для вектор-функции $\phi(x)$ справедливы соотношения (2.8). Согласно лемме 2.2 для L справедлив принцип максимума. Определим $\Psi(x)$: $\Psi_i(x) = \Gamma(x) \pm u_i(x)$. При таком задании $\Psi(x)$ выполняются неравенства (2.9) и в силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает лемму.

Получим оценку устойчивости для исходной задачи (2.1)-(2.2). Пусть $G(x, u)$ - матрица Якоби функции $F(x, u)$ из (2.1). Будем рассматривать случаи, когда при всех x и $s \in R^N$ для $G(x, s)$ выполнены условия (2.5) или (2.11).

Пусть p, q - две произвольные вектор-функции с компонентами из $C^1[0, 1] \cap Q^2[0, 1]$, $z = p - q$. Используя теорему Лагранжа о среднем значении, из (2.1)-(2.2) получим:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon z &= -\varepsilon z'' + a(x)z' + G(x, \xi(x))z = T_\varepsilon p - T_\varepsilon q, \\ z(0) &= p(0) - q(0), \quad R_\varepsilon z = R_\varepsilon p - R_\varepsilon q. \end{aligned}$$

Пусть выполнены ограничения (2.3),(2.5). Тогда в соответствии с леммой 2.1

$$\begin{aligned} \|p - q\|_N &\leq \sigma^{-1} [\eta^{-1} \|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\|_N + \|p(0) - q(0)\| + \\ &+ \max_i |(R_\varepsilon p - R_\varepsilon q)_i (\delta_i + \alpha_i \beta_i)^{-1}|]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В случае ограничений (2.3),(2.11) согласно лемме 2.3

$$\begin{aligned} \|p(x) - q(x)\| &\leq [\alpha_0^2 (\eta \gamma)^{-1} \|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\|_N + \|p(0) - q(0)\|] \exp[2\eta\alpha_0^{-1}x] + \\ &+ \max_i |(R_\varepsilon p - R_\varepsilon q)_i [\delta_i + \alpha_0 \beta_i / 2]^{-1}| \exp[\alpha_0 (2\varepsilon)^{-1} (x - 1)]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Задавая в (2.12) или (2.13) $p = u, q = 0$, получим оценку устойчивости для решения задачи (2.1)-(2.2):

$$\|u\|_N \leq C [\|F(x, 0)\|_N + \|A\| + \|B\|]. \quad (2.14)$$

Из оценок (2.12) и (2.13) следует единственность решения задачи (2.1), (2.2). Согласно [155] решение задачи (2.1)-(2.2) существует, если найдутся нижнее и верхнее решения $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, для которых

$$T_\varepsilon \tilde{\alpha} \leq 0, T_\varepsilon \tilde{\beta} \geq 0, \tilde{\alpha}(0) \leq A \leq \tilde{\beta}(0), R_\varepsilon \tilde{\alpha} \leq B \leq R_\varepsilon \tilde{\beta}. \quad (2.15)$$

В случае условий (2.11) определим вектор-функцию $\tilde{\alpha}(x)$ с компонентами

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_i(x) = & -\{[\alpha_0^2(\eta\gamma)^{-1}\|F(x,0)\|_N + \|A\|] \exp[2\eta\alpha_0^{-1}x] + \\ & + \max_i |B_i(\delta_i + 0.5\alpha_0\beta_i)^{-1}| \exp[\alpha_0(2\varepsilon)^{-1}(x-1)]\}, \tilde{\beta}(x) = -\tilde{\alpha}(x). \end{aligned}$$

В случае условий (2.5) определим

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_i(x) = & -\sigma^{-1}\{\eta^{-1}\|F(x,0)\|_N + \|A\| + \max_i |B_i(\delta_i + \alpha_0\beta_i)^{-1}| \times \\ & \times \exp[\alpha_0\varepsilon^{-1}(x-1)]\}, \tilde{\beta}(x) = -\tilde{\alpha}(x). \end{aligned}$$

При таком задании $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ будут выполнены условия (2.15), что влечет существование решения задачи (2.1)-(2.2). Остановимся, например, на случае условий (2.11). Докажем, что $T_\varepsilon \tilde{\alpha} \leq 0$. Это следует из того, что для некоторого ξ

$$T_\varepsilon \tilde{\alpha} = -\varepsilon \tilde{\alpha}'' + a(x) \tilde{\alpha}' + G(x, \xi) \tilde{\alpha} + F(x, 0) \leq 0.$$

Нетрудно показать, что в случае выполнения условий (2.3) и (2.11) оператор T_ε обратно монотонен, то есть из условий

$$T_\varepsilon p(x) \geq T_\varepsilon q(x), x \in I, p(0) \geq q(0), R_\varepsilon p \geq R_\varepsilon q$$

следует $p(x) \geq q(x)$, $x \in I$.

Построение разностной схемы. Пусть Ω - произвольная сетка исходного интервала, M - количество шагов сетки. Для построения

разностной схемы перейдем от (2.1) к системе уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$\tilde{T}_\varepsilon V = -\varepsilon V'' + \tilde{a}(x)V' + \tilde{F}(x, V) = 0, \quad V(0) = A, \quad R_\varepsilon V = B, \quad (2.16)$$

где $\tilde{a}(x)$ - диагональная квадратная матрица порядка N с диагональными элементами $\tilde{a}_i(x)$, \tilde{F} - вектор-функция, при $x \in \Delta_n$

$$\tilde{a}(x) = a_n = a(x_{n-1}), \quad \tilde{F}(x, V) = F_n = F(x_{n-1}, V(x_{n-1})),$$

a и F соответствуют (2.1).

Выписывая решение уравнения (2.16) на каждом интервале Δ_n , требуя непрерывности производной на границе интервалов Δ_n и Δ_{n+1} , подставляя найденное решение на последнем интервале в правое краевое условие (2.16), придем к конечно-разностным соотношениям:

$$\begin{aligned} A_n V^h(x_{n-1}) - B_n V^h(x_n) + D_n V^h(x_{n+1}) &= f_n, \quad V^h(x_0) = A, \\ \delta V^h(x_M) + a_M \beta [E - \exp(-h_M \varepsilon^{-1} a_M)]^{-1} (V^h(x_M) - V^h(x_{M-1})) &= \\ = B + \beta [\varepsilon a_M^{-1} - h_M [E - \exp(-h_M \varepsilon^{-1} a_M)]^{-1}] F(x_M), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где E - единичная матрица,

$$A_n = a_n [E - \exp(-h_n \varepsilon^{-1} a_n)]^{-1}, \quad D_n = a_{n+1} [\exp(h_{n+1} \varepsilon^{-1} a_{n+1}) - E]^{-1},$$

$$B_n = A_n + D_n, \quad f_n = a_n^{-1} (h_n A_n - \varepsilon E) F(x_n) - a_{n+1}^{-1} (h_{n+1} D_n - \varepsilon E) F(x_{n+1}).$$

Оценим точность построенной схемы.

Теорема 2.1. Пусть для $G(x, s)$, $s \in R^N$ выполнено условие (2.5) или (2.11). Тогда найдется C , такое что

$$\| [u]_\Omega - V^h \|_{N\Omega} \leq Ch. \quad (2.18)$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы верна оценка (2.14), влекущая ограниченность решения задачи (2.1)-(2.2). Проводя рассуждения по аналогии со случаем одного уравнения в §1, получим:

$$|u'_i(x)| \leq C_2[1 + \varepsilon^{-1} \exp(\alpha_i \varepsilon^{-1}(x-1))], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.19)$$

Учитывая (2.19), нетрудно показать:

$$\|\tilde{T}_\varepsilon u(x) - \tilde{T}_\varepsilon V(x)\| \leq C_3 h [1 + \varepsilon^{-1} \exp(\alpha_0 \varepsilon^{-1}(x-1))]. \quad (2.20)$$

Остановимся на случае условий (2.5). Пусть $z = u - V$. Используя теорему о среднем значении, получим, что при $x \in \Delta_n$, $j = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_j z_j(x) &= -\varepsilon z_j'' + \tilde{a}_j(x) z_j' + G_{jj}(x, \xi_n) z_j = (\tilde{T}_\varepsilon u - \tilde{T}_\varepsilon V)_j - \\ &- \sum_{k \neq j} G_{jk}(x, \xi_n) z_k + \sum_{k=1}^N G_{jk}(x, \xi_n) ((u_k(x) - u_k(x_{n-1})) - (V_k(x) - V_k(x_{n-1}))). \end{aligned}$$

Учитывая, что для $V(x)$, как и для $u(x)$, справедлива оценка (2.19), используя (2.20), при $x \in \Delta_n$ получим:

$$|\tilde{L}_j z_j(x)| \leq C_4 h [1 + \varepsilon^{-1} \exp(\alpha_0 \varepsilon^{-1}(x-1))] + \sum_{k \neq j} |G_{jk}(x, \xi_n) z_k(x)|.$$

Определим функцию:

$$\begin{aligned} \Psi_j(x) &= C_5 h [1 + \exp(\alpha_0 (2\varepsilon)^{-1}(x-1))] + \\ &+ \left\| \sum_{k \neq j} |G_{jk}(x, \xi(x)) z_k(x)| / G_{jj}(x, \xi(x)) \right\| \pm z_j(x). \end{aligned}$$

Тогда можно подобрать C_5 таким образом, что для оператора \tilde{L}_j и функции Ψ_j выполнены условия (2.9). В силу принципа максимума $\Psi_j(x) \geq 0$, следовательно, $\|u - V\|_N \leq Ch$. Учитывая, что по построению $V(x)$ является решением схемы (2.17), придем к оценке (2.18).

Пусть выполнены условия (2.11), $z = u - V$. Тогда :

$$\tilde{L}z = -\varepsilon z'' + \tilde{a}(x) z' + G(x, \xi) z = \tilde{T}_\varepsilon u - \tilde{T}_\varepsilon V +$$

$$+F(x, u) - \tilde{F}(x, u) + \tilde{F}(x, V) - F(x, V).$$

Нетрудно убедиться, что для оператора \tilde{L} с краевыми условиями, соответствующими (2.2), справедлив принцип максимума. Учитывая (2.20), нетрудно показать, что

$$\|\tilde{L}z(x)\| \leq C_6 h [1 + \varepsilon^{-1} \exp(\alpha_0 \varepsilon^{-1}(x-1))].$$

Определим вектор-функцию $\Psi(x)$ с компонентами

$$\Psi_i(x) = C_7 h [\exp(\alpha_0(2\varepsilon)^{-1}(x-1)) + \exp(2\eta\alpha_0^{-1}x)] \pm z_i(x).$$

Можно подобрать C_7 таким образом, что для оператора \tilde{L} и вектор-функции $\Psi(x)$ будут выполнены условия (2.9). В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает теорему.

Случай слабо выраженного погранслоя. Остановимся на случае, когда в (2.2) правое краевое условие имеет вид $u'(1) = 0$. Нетрудно показать, что в этом случае оценка производной (2.19) заменяется на следующую:

$$\left| \frac{d^j}{dx^j} u_i(x) \right| \leq C [1 + \varepsilon^{1-j} \exp(\alpha_0 \varepsilon^{-1}(x-1))], \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.21)$$

Из этой оценки следует, что производные решения не ограничены равномерно, начиная со второй. Целесообразно исследовать на сходимость схему направленных разностей, которая проще схем с экспоненциальными подгонками. Выпишем эту схему:

$$T_n^h u^h = -\varepsilon \Lambda_{xx,n} u^h + a_n \Lambda_{x,n} u^h + F(x_n, u^h(x_n)) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$u^h(x_0) = A, \quad R^h u^h = h_M^{-1} (u^h(x_M) - u^h(x_{M-1})) = 0, \quad (2.22)$$

где u^h - сеточная вектор-функция, $a_n = a(x_n)$, $n = 1, 2, \dots, M-1$.

Лемма 2.4. Пусть в дополнение к (2.3) для матрицы Якоби G выполнены ограничения (2.5). Пусть p^h, q^h - две произвольные сеточные вектор-функции, $z^h = p^h - q^h$. Тогда:

$$\|z^h\|_{N\Omega} \leq \sigma^{-1} \{ \eta^{-1} \|T^h p - T^h q\|_{N,\Omega} + \|z^h(x_0)\| + (2\varepsilon\alpha_0^{-1} + h_M) \|R^h z^h\| \}. \quad (2.23)$$

Доказательство. Вычисляя $T_n^h p^h - T_n^h q^h$ и используя теорему о среднем значении, можно записать:

$$\begin{aligned} L_{ni}^h z^h &= -\varepsilon \Lambda_{xx,n} z_i^h + a_i(x_n) \Lambda_{x,n} z_i^h + G_{ii}(x_n, \xi_n^h) z_i^h(x_n) = \\ &= (T_n^h p^h - T_n^h q^h)_i - \sum_{j \neq i} G_{ij}(x_n, \xi_n^h) z_j^h(x_n), \end{aligned} \quad (2.24)$$

Определим сеточную вектор-функцию Ψ^h с компонентами

$$\begin{aligned} \Psi_i^h(x_n) &= \eta^{-1} \|T^h p^h - T^h q^h\|_{N,\Omega} + \|z^h(x_0)\| + (2\varepsilon\alpha_0^{-1} + h_M) \|R^h z^h\| \times \\ &\times \omega_n + \max_i \max_{x_n \in \Omega} \left| \sum_{j \neq i} G_{ij}(x_n, \xi_n^h) z_j^h(x_n) [G_{ii}(x_n, \xi_n^h)]^{-1} \right| \pm z_i^h(x_n), \end{aligned}$$

где $\omega_M = 1$, при $n < M$

$$\omega_n = \prod_{i=n+1}^M \left(1 + \frac{\alpha_0 h_i}{2\varepsilon} \right)^{-1}.$$

При таком выборе Ψ^h выполняются условия:

$$L^h \Psi^h \geq 0, \quad \Psi^h(x_0) \geq 0, \quad R^h \Psi^h \geq 0.$$

В силу принципа максимума покомпонентно $\Psi^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Из этой леммы следуют единственность и ограниченность решения схемы (2.22). Оценим точность этой схемы.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия (2.3) и для $G(x, s)$, $s \in R^N$ справедливы ограничения (2.5). Пусть шаги сетки Ω удовлетворяют

ограничению $x_n + h_n \leq 1$, $n = 1, 2, \dots, M - 1$. Тогда найдется C :

$$\|[u]_\Omega - u^h\|_{N\Omega} \leq Ch. \quad (2.25)$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - [u]_\Omega$. Используя теорему о среднем значении, получим из (2.22) соотношение для произвольного i :

$$L_{ni}^h z^h = (T_n^h u^h - T_n^h [u]_\Omega)_i - \sum_{j \neq i} G_{ij}(x_n, \xi_n^h) z_j^h(x_n), \quad (2.26)$$

где L_{ni}^h соответствует (2.24). Используя оценки производных (2.21), как и в случае одного уравнения, нетрудно получить:

$$|(T_n^h u^h - T_n^h [u]_\Omega)_i| \leq Ch[1 + S_n^{-1} \exp(\alpha_0 \varepsilon^{-1}(x_{n+1} - 1))], \quad (2.27)$$

где $S_n = \max(h_n, \varepsilon)$, $0 < n < M$, $1 \leq i \leq N$.

Определим сеточные вектор-функции ϕ^h, ψ^h, θ^h с компонентами:

$$\phi_i^h(x_n) = \prod_{i=i}^n \left(1 + \frac{\alpha_0 h_i}{4\varepsilon}\right) / \prod_{i=1}^M \left(1 + \frac{\alpha_0 h_i}{4\varepsilon}\right), \quad \phi_i^h(x_0) = \frac{\phi_i^h(x_1)}{1 + \alpha_0 h_1 / (4\varepsilon)},$$

$$\psi_i^h(x_0) = \Psi_i^h(x_1) / (1 + \alpha_0 h_1 / (4\varepsilon)), \quad n = 1, 2, \dots, M,$$

$$\psi_i^h(x_n) = \phi_i^h(x_n) \left(1 + \frac{\alpha_0 h_M}{4\varepsilon}\right), \quad \theta_i^h(x_n) = \prod_{i=1}^n (1 + 2\eta \alpha_0^{-1} h_i), \quad \theta_i^h(x_0) = 1.$$

Учитывая условия теоремы, нетрудно показать, что для всех узлов x_n покомпонентно

$$L_n^h \phi^h \geq CS_n^{-1} \phi^h(x_n), \quad L_n^h \psi^h \geq CS_n^{-1} \psi^h(x_n), \quad (2.28)$$

$$\psi^h(x_n) \geq \exp[\alpha_0 \varepsilon^{-1}(x_{n+1} - 1)]. \quad (2.29)$$

Определим сеточную вектор-функцию Ψ^h с компонентами:

$$\begin{aligned} \Psi_i^h(x_n) = & C[\phi_i^h(x_n) + \psi_i^h(x_n) + x_n]h + \\ & + \max_i \max_{n \leq M-1} \left| \sum_{j \neq i} G_{ij}(x_n, \xi_n^h) G_{ii}^{-1}(x_n, \xi_n^h) z_j^h(x_n) \right| \pm z_i^h(x_n). \end{aligned}$$

Учитывая соотношение (2.26), неравенства (2.27)-(2.29), для некоторого C получим:

$$L_n^h \Psi^h \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, M-1. \quad (2.30)$$

Покажем, что при соответствующем выборе C

$$\Psi^h(x_0) \geq 0, \quad \Psi^h(x_M) - \Psi^h(x_{M-1}) \geq 0. \quad (2.31)$$

Первое неравенство очевидно. Нетрудно убедиться, что при всех i

$$\psi_i^h(x_M) - \psi_i^h(x_{M-1}) \geq 0, \quad \phi_i^h(x_M) - \phi_i^h(x_{M-1}) \geq C_1 h_M S_M^{-1}, \quad (2.32)$$

где $S_M = \max(h_M, \varepsilon)$. С другой стороны, при всех i

$$|z_i^h(x_M) - z_i^h(x_{M-1})| = |u_i(x_M) - u_i(x_{M-1})|,$$

$$|u_i(x_M) - u_i(x_{M-1})| \leq C_2 h_M, \quad |u_i(x_M) - u_i(x_{M-1})| \leq C_3 h_M^2 \varepsilon^{-1}.$$

Применяя первое из этих неравенств при $\varepsilon \leq h_M$ и второе при $\varepsilon > h_M$, учитывая (2.32), получим (2.31). Итак, неравенства (2.30), (2.31) имеют место и в силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Учитывая условия (2.5), нетрудно заключить, что

$$\max_i \max_{n \leq M-1} |z_i(x_n)| \leq C_4 h.$$

Требуемое неравенство (2.25) будет иметь место, если показать, что при всех i $|u_i(x_M) - u_i^h(x_M)| \leq Ch$. Это следует из того, что

$$|u_i(x_M) - u_i^h(x_M)| \leq |u_i(x_M) - u_i(x_{M-1})| + |u_i(x_{M-1}) - u_i^h(x_{M-1})|.$$

Теорема доказана.

Заметим, что ограничение на сетку Ω будет выполнено, если, например, при всех n $h_n \leq h_M$. Ограничение на Ω можно ослабить до

следующего: $h_n \leq q(1 - x_n)$, где q - положительная постоянная, не зависящая от ε . Нетрудно убедиться, что при этом доказанная теорема останется в силе.

Остановимся на анализе схемы (2.22) в случае ограничений (2.11).

Сначала установим условие, когда для линейного оператора

$$L_{ni}^h z^h = -\varepsilon_n \Lambda_{xx,n} z_i^h + a_i(x_n) \Lambda_{x,n} z_i^h + \sum_{k=1}^N G_{ik} z_k^h(x_n),$$

$$1 \leq i \leq N, 1 \leq n \leq M - 1 \quad (2.33)$$

с краевыми условиями

$$z_i^h(x_0), R_i^h z^h = \delta_i z_i^h(x_M) + \beta_i \Lambda_{x,M} z_i^h \quad (2.34)$$

справедлив принцип максимума. Предполагаем, что ε в (2.33) может быть функцией от узла сетки, что делает справедливой следующую лемму для большего числа разностных операторов (например, для оператора, соответствующего монотонной схеме Самарского [145]).

Лемма 2.5. Предположим, что в (2.33)-(2.34) при всех i

$$\varepsilon_n > 0, a_i(x_n) \geq 0, \delta_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \delta_i + \beta_i > 0, n = 1, 2, \dots, M - 1.$$

Пусть существует сеточная вектор-функция Φ^h такая, что покомпонентно при всех n

$$\Phi^h(x_n) > 0, L_n^h \Phi^h > 0, \Phi^h(x_M) > \Phi^h(x_{M-1}). \quad (2.35)$$

Тогда, если для некоторой сеточной вектор-функции Ψ^h

$$\Psi^h(x_0) \geq 0, L_n^h \Psi^h \geq 0, n = 1, 2, \dots, M - 1, R^h \Psi^h \geq 0, \quad (2.36)$$

то при всех n $\Psi^h(x_n) \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что какая-то компонента сеточной вектор-функции Ψ^h в каком-то узле отрицательна. Представим Ψ^h в виде: $\Psi_i^h(x_n) = \Phi_i^h(x_n)V_i^h(x_n)$. Тогда для некоторой компоненты i и узла x_m выполнится

$$V_i^h(x_m) = \min_j \min_{x_n \in \Omega} V_j^h(x_n) < 0.$$

Покажем, что $m \neq M$. Предположим, что $V_i^h(x_M) < 0$. Из (2.36) следует, что $\Psi_i^h(x_M) \geq \Psi_i^h(x_{M-1})$. Учитывая (2.35), получим $V_i^h(x_M) > V_i^h(x_{M-1})$. Следовательно, $m \neq M$. Минимум сеточной функции V_i^h достигается во внутреннем узле, поэтому

$$V_i^h(x_m) < 0, \quad \Lambda_{x,m}V_i^h \leq 0, \quad \Lambda_{x,m+1}V_i^h \geq 0.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} L_{mi}^h \Psi^h &= a_i(x_m) \Phi_i^h(x_{m-1}) \Lambda_{x,m} V_i^h + V_i^h(x_m) L_{mi}^h \Phi^h - \\ &\quad - \frac{2\varepsilon_m}{h_m + h_{m+1}} \Phi_i^h(x_{m+1}) \Lambda_{x,m+1} V_i^h + \\ &\quad + \frac{2\varepsilon_m}{h_m + h_{m+1}} \Phi_i^h(x_{m-1}) \Lambda_{x,m} V_i^h + \sum_{k=1}^N G_{mk} \Phi_k^h(x_m) (V_k^h(x_m) - V_i^h(x_m)) < 0. \end{aligned}$$

Это противоречит условиям (2.36). Лемма доказана.

Лемма 2.6. Пусть для матрицы Якоби G выполнено условие (2.11),

$$\alpha_0^2 - (8\varepsilon + 2\alpha_0 h)\eta \geq \gamma > 0. \quad (2.37)$$

Пусть T^h и R^h соответствуют схеме (2.22), p^h и q^h - две произвольные сеточные вектор-функции. Тогда при всех n

$$\begin{aligned} \|p^h(x_n) - q^h(x_n)\| &\leq [3\alpha_0^2 \eta^{-1} \gamma^{-1} \|T^h p^h - T^h q^h\|_{N\Omega} + \\ &\quad + \|p^h(x_0) - q^h(x_0)\|] \exp(2\eta \alpha_0^{-1} x_n) + (4\alpha_0^{-1} \varepsilon + h_M) \times \end{aligned}$$

$$\times \|R^h p^h - R^h q^h\| \exp(-\alpha_0(\alpha_0 h + 4\varepsilon)^{-1}(1 - x_n)).$$

Доказательство. Определим $z^h = p^h - q^h$. Тогда:

$$L_n^h z^h = T_n^h p^h - T_n^h q^h, \quad 0 < n < M, \quad (2.38)$$

где L^h задано согласно (2.33) с $\varepsilon_n = \varepsilon$. Учитывая условие (2.37), несложно показать, что при всех $n = 1, 2, \dots, M - 1$ выполнится

$$L_n^h \phi^h \geq \gamma[10S_n]^{-1} \phi_n^h, \quad L_n^h \theta^h \geq \eta\gamma[2\alpha_0^2]^{-1} \theta_n^h, \quad (2.39)$$

где $S_n = \max(\alpha_0 h_n, \varepsilon)$. Согласно лемме 2.5 для оператора L^h справедлив принцип максимума. Покажем, что при всех i

$$\phi_i^h(x_n) \leq \exp(-\alpha_0(\alpha_0 h + 4\varepsilon)^{-1}(1 - x_n)).$$

Это следует из того, что $\phi_i^h(x_M) = 1$, при $n < M$

$$\ln \phi_i^h(x_n) = \sum_{i=n+1}^M \ln \left(1 - \frac{\alpha_0 h_i}{4\varepsilon + \alpha_0 h_i}\right) \leq - \sum_{i=n+1}^M \frac{\alpha_0 h_i}{4\varepsilon + \alpha_0 h_i}.$$

Используя (2.38)-(2.39), на основании принципа максимума придем к утверждению леммы.

Теорема 2.3. Пусть выполнены ограничения (2.3) и для $G(x, s)$ справедливы соотношения (2.11). Пусть выполнены условия (2.37) и шаги сетки Ω удовлетворяют ограничению $x_n + h_n \leq 1$. Тогда для схемы (2.22) справедлива оценка точности: $\|[u]_\Omega - u^h\|_{N\Omega} \leq Ch$.

Доказательство. Для погрешности аппроксимации справедлива оценка (2.27). Определяя $\Psi^h = C[\theta^h + \phi^h + \psi^h]h \pm z^h$, где ϕ^h , ψ^h и θ^h определены в теореме 2.2, учитывая (2.39), используя принцип максимума и подбирая подходящую постоянную C , получим утверждение теоремы.

Рассмотрим вопрос линеаризации схемы (2.22). Предположим, что в дополнение к условиям (2.5) $\eta \leq G_{ii}(x) \leq R$, $\eta/R > 1 - \sigma$. Можно показать, что тогда итерационный процесс:

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon \Lambda_{xx,n} u^{k+1} + a(x_n) \Lambda_{x,n} u^{k+1} + R u^{k+1}(x_n) &= R u^k(x_n) - F(x_n, u^k(x_n)), \\
 u^{k+1}(x_0) = A, \quad u^{k+1}(x_M) - u^{k+1}(x_{M-1}) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

при любом начальном приближении сходится к решению схемы (2.22) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = 2 - \sigma - \eta/R$. На каждом итерационном шаге для нахождения решения можно использовать метод прогонки, который для данной системы уравнений устойчив в силу диагонального преобладания.

Результаты численных экспериментов. Рассмотрена система двух нелинейных уравнений для случаев, когда для матрицы Якоби $G(x, u)$ выполнены условия (2.5) или (2.11). Вычислялась погрешность построенной схемы (2.17) и схемы направленных разностей (2.22) при задании краевых условий первого рода, когда имеется экспоненциальный погранслоный рост решения, и в случае $u'(1) = 0$, когда пограничный слой слабо выражен.

Погрешность $z^h = u^h - [u]_\Omega$ является сеточной вектор-функцией и под ее нормой подразумевается $\|z^h\|_{2\Omega}$, которая определена выше. Решение разностной схемы во всех экспериментах находилось на основе модифицированного метода Пикара. В случае схемы (2.22) этот метод имеет вид (2.40). Итерации продолжались, если не выполнялось $\|u^{k+1} - u^k\|_{2\Omega} < 10^{-8}$. Итерационный метод сходился, если в (2.40) $R \geq 1$ и не сходился при $R = 0$. Сетка Ω предполагалась равномерной.

Сначала рассмотрен случай условий (2.5). Рассматриваемая систе-

ма имеет вид:

$$\begin{aligned} -\varepsilon u_1'' + u_1' + u_1 + 0.5 \exp(-u_2) + f_1(x) &= 0, \\ -\varepsilon u_2'' + 2u_2' + 0.5u_1 + \exp(u_2) + f_2(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ зависят от вида решения.

Остановимся на случае краевых условий первого рода с решением системы уравнений (2.41) вида:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \exp(\varepsilon^{-1}(x - 1)) + \cos(0.5\pi x), \\ u_2(x) &= -\exp(2\varepsilon^{-1}(x - 1) + 1) + \exp(x). \end{aligned} \quad (2.42)$$

В табл. 2.1 приведена норма погрешности схемы (2.17) в зависимости от ε и шага h сетки. Данные этой таблицы подтверждают оценку (2.18). В табл. 2.2 для сравнения приведена норма погрешности схемы (2.22). Вычисления подтверждают, что эта схема не сходится равномерно по ε . Теперь остановимся на случае $u_1'(1) = 0$, $u_2'(1) = 0$. Решение (2.41) задавалось в виде:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 0.5\pi\varepsilon \exp(\varepsilon^{-1}(x - 1)) + \cos(0.5\pi x), \\ u_2(x) &= -0.5\varepsilon \exp(2\varepsilon^{-1}(x - 1) + 1) + \exp(x). \end{aligned} \quad (2.43)$$

В табл. 2.3 приведена норма погрешности схемы (2.22) в зависимости от ε и шага сетки. Результаты вычислений подтверждают равномерную сходимость схемы с оценкой точности (2.25).

Далее был рассмотрен случай условий (2.11) для матрицы Якоби. Исследуемая система имеет вид:

$$\begin{aligned} -\varepsilon u_1'' + u_1' + 0.5u_1 - \exp(u_2) + f_1(x) &= 0, \\ -\varepsilon u_2'' + 2u_2' - u_1 + 0.5\exp(-u_2) + f_2(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где как и ранее $f_1(x)$ и $f_2(x)$ зависят от вида решения.

Сначала остановимся на случае краевых условий первого рода с решением (2.42). В табл. 2.4 приведена норма погрешности схемы (2.17) в зависимости от ε и шага h сетки. Результаты вычислений подтверждают оценку (2.18).

Таблица 2.1.

ε	h			
	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.24E-1	0.12E-1	0.24E-2	0.12E-2
1.0E-1	0.42E-1	0.21E-1	0.44E-2	0.22E-2
1.0E-2	0.44E-1	0.23E-1	0.47E-2	0.23E-2
1.0E-3	0.44E-1	0.23E-1	0.47E-2	0.23E-2

Теперь остановимся на случае $u'_1(1) = 0, u'_2(1) = 0$, когда решение задаем согласно (2.43). В табл. 2.5 приведена норма погрешности схемы (2.22) при различных ε и h . Результаты вычислений подтверждают оценку (2.25) в случае выполнения условий (2.11).

Численные эксперименты в случае нелинейной задачи, когда условия (2.5) или (2.11) выполнены для $G(x, s)$ при всех $s \in R^N$ привели к аналогичным результатам.

Таблица 2.2.

ε	h			
	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.24E-1	0.13E-1	0.27E-2	0.14E-2
1.0E-1	0.38	0.29	0.74E-1	0.38E-1
1.0E-2	0.44E-1	0.18	0.51	0.35
1.0E-3	0.45E-1	0.23E-1	0.12	0.24

Таблица 2.3.

ε	h			
	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.60E-1	0.30E-1	0.60E-2	0.30E-2
1.0E-1	0.18	0.89E-1	0.17E-1	0.85E-2
1.0E-2	0.22	0.11	0.23E-1	0.11E-1
1.0E-3	0.23	0.12	0.24E-1	0.12E-1

Таблица 2.4.

ε	h			
	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.24E-1	0.12E-1	0.24E-2	0.12E-2
1.0E-1	0.12	0.50E-1	0.84E-2	0.41E-2
1.0E-2	0.18	0.99E-1	0.18E-1	0.90E-2
1.0E-3	0.18	0.97E-1	0.20E-1	0.10E-1

Таблица 2.5.

ε	h			
	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	0.86E-1	0.45E-1	0.92E-2	0.46E-2
1.0E-1	0.19	0.94E-1	0.18E-1	0.91E-2
1.0E-2	0.32	0.16	0.34E-1	0.17E-1
1.0E-3	0.33	0.17	0.36E-1	0.18E-1

§3. Схема второго порядка точности для уравнения типа диффузия-реакция

Рассмотрим сингулярно возмущенную граничную задачу

$$Lu = \varepsilon u'' - f(x, u) = 0, u(0) = A, u(1) = B \quad (3.1)$$

в предположении:

$$\varepsilon > 0, f \in C^2(I, R), I = [0, 1], f'_u \geq \beta > 0. \quad (3.2)$$

При ограничениях (3.2) задача (3.1) имеет единственное решение $u(x) \in C^2(I)$, это решение имеет пограничные слои около концов интервала I .

В случае линейной задачи (3.1) вопрос построения разностной схемы, обладающей свойством равномерной сходимости по малому параметру, рассматривался Бахваловым Н.С. [15]. В [199] для нелинейного уравнения (3.1) численное решение было найдено на основе метода экстраполяции Ричардсона на специальной неравномерной сетке. В

[179] после некоторого преобразования задача (3.1) решалась с помощью обычной разностной схемы на равномерной сетке с использованием решения соответствующей вырожденной задачи.

Для нелинейной задачи (3.1) построим схему второго порядка точности, равномерной по параметру ε . В случае нелинейной задачи сходимость схемы обосновывается на неравномерной сетке, сгущающейся в пограничных слоях. Если задача линейна, то сетка может быть равномерной.

Пусть Ω – неравномерная сетка интервала $[0, 1]$, $\Delta_n = [x_n, x_{n+1})$. Для построения разностной схемы для задачи (3.1) на каждом интервале Δ_n от функции $f(x, u)$ перейдем линейной по обоим аргументам. Итак, перейдем от (3.1) к краевой задаче:

$$\tilde{L}V = \varepsilon V'' - \tilde{f}(x, V) = 0, V(0) = A, V(1) = B, \quad (3.3)$$

где при $x \in \Delta_n$

$$\tilde{f}(x, V) = f_n + f'_{x_n}(x - x_n) + f'_{V_n}(V - V_n),$$

$$f_n = f(x_n, V_n), f'_{x_n} = f'_x(x_n, V_n), f'_{V_n} = f'_V(x_n, V_n), V_n = V(x_n).$$

Для каждого интервала Δ_n решение задачи (3.3) имеет явный вид:

$$V_n(x) = V_n^0(x) + \gamma_1^{(n)} \exp[\alpha_n(x - x_n)] + \gamma_2^{(n)} \exp[-\alpha_n(x - x_n)], \quad (3.4)$$

где V_n^0 – частное решение неоднородного уравнения (3.3) :

$$V_n^0(x) = -\beta_n^{-2}(b_n x + d_n) + \beta_n^{-2}(b_n x_n + d_n) \cosh[\alpha_n(x - x_n)] + b_n \beta_n^{-2} \alpha_n^{-1} \sinh[\alpha_n(x - x_n)],$$

где

$$\alpha_n = \beta_n \varepsilon^{-0.5}, \beta_n = (f'_{V_n})^{0.5}, b_n = f'_{x_n}, d_n = f_n - b_n x_n - f'_{V_n} V_n.$$

Выберем $\gamma_1^{(n)}, \gamma_2^{(n)}$ из условий $V_n(x_n) = V_n^h, V_n(x_{n+1}) = V_{n+1}^h$. Условие $V \in C^1[0, 1]$ выполнено, если для $\forall n V'_{n-1}(x_n) = V'_n(x_n)$. Используя (3.4), из этих соотношений получим разностную схему:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_n}{\sinh(\alpha_n h_{n+1})} V_{n+1}^h - \left[\frac{\beta_n}{\sinh(\alpha_n h_{n+1})} + \beta_{n-1} \coth(\alpha_{n-1} h_n) \right] V_n^h + \\ & + \beta_{n-1} \coth(\alpha_{n-1} h_n) V_{n-1}^h = F_n, V_0^h = A, V_N^h = B, n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} F_n = & \frac{f_{n-1}}{\beta_{n-1}} \tanh \frac{\alpha_{n-1} h_n}{2} + \frac{f_n}{\beta_n} \tanh \frac{\alpha_n h_{n+1}}{2} + \\ & + \frac{b_n h_{n+1}}{\beta_n} \left[\frac{1}{\alpha_n h_{n+1}} - \frac{1}{\sinh(\alpha_n h_{n+1})} \right] + \frac{b_{n-1} h_n}{\beta_{n-1}} \times \frac{\alpha_{n-1} h_n \coth(\alpha_{n-1} h_n) - 1}{\alpha_{n-1} h_n}. \end{aligned}$$

Разностная схема (3.5) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений. Решение этой системы ограничено, если предположить, что выполнены некоторые условия на функцию f .

Лемма 3.1. Предположим, что

$$f = f(u), \quad f''(u)u \geq 0. \quad (3.6)$$

Тогда

$$\|V^h\| \leq \max\{|A|, |B|, |f(0)|/\beta\}. \quad (3.7)$$

Доказательство. Перепишем схему (3.5) в виде :

$$\begin{aligned} L_n^h V^h = & \frac{\beta_n}{\sinh(\alpha_n h_{n+1})} V_{n+1}^h - \left[\frac{\beta_n}{\sinh(\alpha_n h_{n+1})} + \right. \\ & \left. + \beta_{n-1} \coth(\alpha_{n-1} h_n) + \frac{f'(\theta_n)}{\beta_n} \tanh \frac{\alpha_n h_{n+1}}{2} \right] V_n^h + \\ & + \left[\beta_{n-1} \coth(\alpha_{n-1} h_n) - \frac{f'(\kappa_n)}{\beta_{n-1}} \tanh \frac{\alpha_{n-1} h_n}{2} \right] V_{n-1}^h = \frac{f(0)}{\beta_{n-1}} \tanh \frac{\alpha_{n-1} h_n}{2} + \\ & + \frac{f(0)}{\beta_n} \tanh \frac{\alpha_n h_{n+1}}{2}, V_0^h = A, V_N^h = B, n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где $\kappa_n \in (0, V_{n-1}^h)$. Используя (3.6), можно доказать, что $\beta_{n-1}^2 \geq f'(\kappa_n)$. Следовательно, справедлив принцип максимума для оператора L^h : если

$$L_n^h \Psi^h \leq 0, \Psi_0^h \geq 0, \Psi_N^h \geq 0, n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.8)$$

то $\Psi_n^h \geq 0, n = 0, 1, \dots, N$. Определим

$$\Psi^h = \max\{|A|, |B|, |f(0)|/\beta\} \pm V^h.$$

Для данного Ψ^h неравенства (3.8) имеют место, следовательно $\Psi^h \geq 0$.

Лемма доказана.

Лемма 3.2. Предположим, что $\|V^h\| \leq C$. Тогда:

$$\|V\| \leq C_1, |V'(x)| \leq C_2 [1 + \varepsilon^{-0.5} (\exp(-\kappa x) + \exp(\kappa(x-1)))], \quad (3.9)$$

где $\kappa = (\beta/\varepsilon)^{0.5}$, V - решение задачи (3.3).

Доказательство. Запишем задачу (3.3) в виде :

$$\varepsilon V'' - a(x)V = g(x), V(0) = A, V(1) = B, \quad (3.10)$$

где для $x \in \Delta_n$ $a(x) = \beta_n^2$, $g(x) = f_n + b_n(x - x_n) - \beta_n^2 V_n^h$. Учитывая,

что $\|V^h\| \leq C$ мы получим $|g(x)| \leq C_3$. Используя неравенство

$\|V\| \leq |A| + |B| + \beta^{-1}\|g\|$, получим $\|V\| \leq C_1$. Используя условие

$|g(x)| \leq C_3$ и привлекая [49], получим (3.9). Лемма доказана.

Пусть Ω - неравномерная сетка интервала I . Строим сгущающуюся сетку в пограничных слоях. Пусть M - число узлов сетки в пограничном слое. Для $n \leq M$ определим

$$x_n = -\kappa^{-1} \ln[1 - (1 - \kappa^{-1})M^{-1}n]. \quad (3.11)$$

Аналогично для $n \geq N - M$

$$x_n = 1 + \kappa^{-1} \ln[1 - (1 - \kappa^{-1})M^{-1}(N - n)]. \quad (3.12)$$

Предполагаем, что сетка Ω равномерна вне пограничных слоев, Q - число равномерных шагов, $Q = N - 2M$.

Теорема 3.1. Пусть Ω удовлетворяет условиям (3.11)-(3.12), V^h - ограниченное решение схемы (3.5), $[u]_\Omega$ - решение задачи (3.1) в узлах сетки. Тогда

$$\|V^h - [u]_\Omega\| \leq C[Q^{-2} + M^{-2}]. \quad (3.13)$$

Доказательство. Пусть $z = u - V$. Тогда

$$\varepsilon z'' - [f(x, u) - f(x, V)](u - V)^{-1}z = f(x, V) - \tilde{f}(x, V).$$

Для $x \in \Delta_n$

$$|f(x, V) - \tilde{f}(x, V)| \leq C[h_{n+1}^2 + |V(x) - V(x_n)|^2].$$

Используя оценку (3.9), получим:

$$\begin{aligned} |V(x) - V(x_n)| &\leq \int_{x_n}^x |V'(s)| ds \leq C_1 h_{n+1} + \\ &+ C_2 \{ \exp[-\kappa x_n] - \exp[-\kappa x_{n+1}] + \exp[\kappa(x_{n+1} - 1)] - \exp[\kappa(x_n - 1)] \}. \end{aligned}$$

Для $n < M$ используем (3.11) и получим:

$$|V(x) - V(x_n)| \leq C_3 [h_{n+1} + M^{-1}].$$

Для $n < M$ $h_{n+1} < M^{-1}$. Следовательно,

$$|V(x) - V(x_n)| \leq CM^{-1}.$$

Случай $n > N - M$ может быть рассмотрен аналогично.

Для $M \leq n \leq N - M$ получим $|V(x) - V(x_n)| \leq CQ^{-1}$. Таким образом,

$$|f(x, V) - \tilde{f}(x, V)| \leq C[M^{-2} + Q^{-2}].$$

Учитывая, что $[V]_{\Omega} = V^h$ и $\|z\| \leq \beta^{-1} \|f(x, V) - \tilde{f}(x, V)\|$, получим (3.13). Теорема доказана.

Рассмотрим случай линейной задачи :

$$Lu = \varepsilon u'' - c(x)u = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \quad (3.14)$$

где $c(x) \geq \beta > 0$, $\varepsilon > 0$, $f, c \in C^2[0, 1]$.

Схема (3.5) для задачи (3.14) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_n}{\sinh z_{n+1}} V_{n+1}^h - \left[\frac{\beta_n}{\sinh z_{n+1}} + \beta_{n-1} \coth z_n + \frac{c_n}{\beta_n} \tanh \frac{z_{n+1}}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{c'_n h_{n+1}}{\beta_n} \left(\frac{1}{z_{n+1}} - \frac{1}{\sinh z_{n+1}} \right) \right] V_n^h + \left[\beta_{n-1} \coth z_n - \frac{c_{n-1}}{\beta_{n-1}} \tanh \frac{z_n}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{c'_{n-1} h_n z_n \coth z_n - 1}{\beta_{n-1} z_n} \right] V_{n-1}^h = \frac{f_{n-1}}{\beta_{n-1}} \tanh \frac{z_n}{2} + \frac{f_n}{\beta_n} \tanh \frac{z_{n+1}}{2} + \\ & \left. + \frac{f'(x_n) h_{n+1}}{\beta_n} \left[\frac{1}{z_{n+1}} - \frac{1}{\sinh z_{n+1}} \right] + \frac{f'_{n-1} h_n z_n \coth z_n - 1}{\beta_{n-1} z_n}, \quad (3.15) \right. \end{aligned}$$

где $c_n = c(x_n)$, $c'_n = c'(x_n)$,

$$\beta_n^2 = c_n, \quad \alpha_n^2 = \beta_n^2 / \varepsilon, \quad z_n = \alpha_{n-1} h_n, \quad f_n = f(x_n), \quad f'_n = f'(x_n).$$

Результаты численных экспериментов. Выпишем граничную задачу в случае линейного уравнения [179]:

$$\varepsilon^2 u'' - u = \cos^2 \pi x + 2(\pi \varepsilon)^2 \cos(2\pi x), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (3.16)$$

Решение задачи (3.16) имеет вид :

$$u(x) = [\exp(-x/\varepsilon) + \exp(-(1-x)/\varepsilon)] / [1 + \exp(-1/\varepsilon)] - \cos^2(\pi x).$$

Пусть Ω - равномерная сетка с шагом h . Представим норму погрешности $([u]_{\Omega} - V^h)$ в зависимости от ε и h в табл. 3.1. В табл. 3.2 представлена норма погрешности для обычной схемы второго порядка

точности. Численные результаты подтверждают преимущество схемы (3.15).

Теперь остановимся на случае нелинейной краевой задачи :

$$\varepsilon u'' - u^3 - u = f(x), \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 1, \quad (3.17)$$

где функция $f(x)$ соответствует решению :

$$u(x) = [\exp(-\varepsilon^{-0.5}x) + \exp(\varepsilon^{-0.5}(x-1))] / [1 + \exp(-\varepsilon^{-0.5})] + \sin(\pi x).$$

Разностная схема (3.5) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений. Для нахождения ее решения используем модифицированный метод Пикара [137]:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_n^{(k)}}{\sinh(\alpha_n^{(k)} h_{n+1})} V_{n+1}^{(k+1)} - \left[\frac{\beta_n^{(k)}}{\sinh(\alpha_n^{(k)} h_{n+1})} + \beta_{n-1}^{(k)} \coth(\alpha_{n-1}^{(k)} h_n) \right] V_n^{(k+1)} + \\ & + \beta_{n-1}^{(k)} \coth(\alpha_{n-1}^{(k)} h_n) V_{n-1}^{(k+1)} - G V_n^{(k+1)} = F_n^{(k)} - G V_n^{(k)}, \\ & V_0^{(k+1)} = A, \quad V_N^{(k+1)} = B, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.18)$$

В качестве начального приближения для итерационного метода брались при всех n $V_n^{(0)} = 1$. Численные эксперименты показали сходимость итерационного метода при $G > 1$. При вычислениях принималось $G = 5$. Итерации заканчивались, если максимум погрешности между решениями соседних итераций не превышал 10^{-5} . На каждом итерационном шаге использовался метод прогонки.

Табл. 3.3 содержит норму погрешности схемы (3.5) в случае задачи (3.17) при различных значениях ε и M , где M - количество шагов сетки в каждом погранслое. Количество равномерных шагов вне погранслоев Q предполагалось таким же, как в погранслоях ($Q = M$). В пограничных слоях узлы сетки выбирались в соответствии с (3.11), (3.12). Данные табл. 3.3 подтверждают справедливость оценки (3.13).

В табл. 3.4 приведена норма погрешности схемы (3.5) в случае равномерной сетки.

Таблица 3.1.

ε	h			
	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	5.9E-2	1.5E-2	6.2E-4	1.5E-4
0.1	3.2E-2	8.2E-3	3.3E-4	8.3E-5
0.01	4.0E-2	9.2E-3	3.3E-4	8.2E-5
0.005	4.3E-2	1.0E-2	3.3E-4	8.3E-5

Таблица 3.2.

ε	h			
	0.1	0.05	0.01	0.005
1.0	3.1E-2	7.6E-3	3.0E-4	7.5E-5
0.1	1.2E-2	3.2E-3	1.3E-4	3.3E-5
0.01	9.7E-3	3.0E-2	1.4E-2	3.7E-3
0.005	2.5E-3	9.8E-3	3.6E-2	1.4E-2

Таблица 3.3.

ε	M			
	3	10	30	100
0.1	0.16E-1	0.17E-2	0.36E-2	0.60E-3
0.1E-1	0.49E-1	0.42E-2	0.29E-2	0.48E-3
0.1E-2	0.18	0.12E-1	0.33E-2	0.56E-3
0.1E-3	0.29	0.19E-1	0.35E-2	0.60E-3
0.1E-4	0.32	0.23E-1	0.36E-2	0.61E-3

Таблица 3.4.

ε	h		
	0.1	0.02	0.01
0.1	0.11E-1	0.33E-3	0.12E-3
0.01	0.71E-1	0.13E-2	0.24E-3
0.001	0.91	0.24E-1	0.38E-2
0.0001	3.3	0.38	0.81E-1

§4. Разностная схема для уравнения с сильной нелинейностью

Рассмотрим краевую задачу :

$$Lu = \varepsilon u'' + a(x, u)u' - b(x, u) = 0, u(0) = A, u(1) = B \quad (4.1)$$

Предполагаем, что $a, b, a_x, a_u, b_x, b_u \in C([0, 1] \times R)$,

$$a(x, u) \geq \alpha > 0, b_u + a_x \geq \gamma, \gamma \leq 0, \alpha^2 + 4\varepsilon\gamma > 0, \varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0. \quad (4.2)$$

Согласно [186], при сделанных предположениях решение задачи (4.1) существует и единственно. Для задачи (4.1) на сгущающейся в пограничном слое сетке построим равномерно сходящуюся схему.

Сетку Ω будем строить исходя из того, чтобы погранслоиная составляющая решения задачи (4.1) на каждом шаге сетки менялась равномерно. Определим погранслоиную область ширины $k\varepsilon$, $k = \alpha^{-1} \ln(\varepsilon^{-1})$, внутри которой сетку строим неравномерной. Пусть для $n = 0, 1, 2, \dots, M$ $x_n = -\varepsilon\alpha^{-1} \ln[1 - (1 - \varepsilon)M^{-1}n]$. При этом

$x_0 = 0, x_M = k\varepsilon$. Вне погранслойной области сетку строим равномерной, число равномерных шагов Q . Пусть Ω - построенная неравномерная сетка исходного интервала. Нетрудно убедиться, что при всех $j < M$ $h_j \leq h_{j+1}$,

$$h_M = \frac{\varepsilon}{\alpha} \ln \left[1 + \frac{1 - \varepsilon}{M\varepsilon} \right], h_M \leq \frac{1 - \varepsilon}{M\alpha}.$$

Определим $h = \max\{Q^{-1}, M^{-1}\}$. Перейдем к построению разностной схемы. От уравнения (4.1) перейдем к уравнению с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$\tilde{L}V = \varepsilon V'' + \tilde{a}(x, V)V' - \tilde{b}(x, V) = 0, \quad V(0) = A, \quad v(1) = B, \quad (4.3)$$

где

$$\tilde{a}(x, V) = a_j = a(x_j, V(x_j)), \tilde{b}(x, V) = b_j = b(x_j, V(x_j))$$

при $x \in \Delta_j$. Решение задачи на каждом интервале Δ_j при заданных краевых условиях $V_{j-1}^h = V(x_{j-1})$, $V_j^h = V(x_j)$ можно выписать в виде

$$V(x) = \gamma_1^{(j)} \exp(-a_j \varepsilon^{-1} x) + \gamma_2^{(j)} + b_j a_j^{-1} x, \quad x \in \Delta_j, \quad (4.4)$$

где постоянные $\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}$ соответствуют краевым условиям.

Отметим, что $V(x) \in C^1[0, 1]$, если при всех $j = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\lim_{x \rightarrow x_j - 0} V'(x) = \lim_{x \rightarrow x_j + 0} V'(x). \quad (4.5)$$

Подставляя в (4.5) выражения для $V(x)$ на интервалах Δ_j, Δ_{j+1} , соответствующие (4.4), приходим к конечно-разностным соотношениям

$$P_j V_{j+1}^h - (P_j + Q_j) V_j^h + Q_j V_{j-1}^h = b_{j+1} a_{j+1}^{-1} (-\varepsilon + P_j h_{j+1}) + b_j a_j^{-1} (\varepsilon - Q_j h_j),$$

$$V_0^h = A, V_N^h = B, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (4.6)$$

где $a_j = a(x_j, V_j^h)$, $b_j = b(x_j, V_j^h)$,

$$P_j = a_{j+1}[1 - \exp(-a_{j+1}\varepsilon^{-1}h_{j+1})]^{-1}, Q_j = a_j[\exp(a_j\varepsilon^{-1}h_j - 1)]^{-1}.$$

В соответствии с построением схема (4.6) является точной на функции $V(x)$. Следовательно, для оценки точности этой схемы достаточно оценить $|u(x) - V(x)|$.

Теорема 4.1. Найдется C , такое, что для всех $x \in [0, 1]$

$$|u(x) - V(x)| \leq Ch \exp\{-2\gamma\alpha^{-1}\}[\alpha^2 + 4\gamma\varepsilon]^{-0.5} \quad (4.7).$$

Доказательство. Сначала докажем, что найдется C_1 :

$$|u'(x)| \leq C_1[1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x)]. \quad (4.8)$$

Найдется точка q : $u(\varepsilon) - u(0) = \varepsilon u'(q)$. Учитывая [186], что $|u(x)| \leq C_2$, получим $|u'(q)| \leq C_3\varepsilon^{-1}$. Интегрируя исходное уравнение (4.1) от 0 до q , получим $|u'(0)| \leq C_4\varepsilon^{-1}$. Уравнение (4.1) представим в виде:

$$\varepsilon(\exp(\varepsilon^{-1}p(x))u')' = b(x, u) \exp(\varepsilon^{-1}p(x)), \quad p(x) = \int_0^x a(s, u(s))ds.$$

Интегрируя последнее уравнение от 0 до x , получим

$$\varepsilon \exp(\varepsilon^{-1}p(x))u'(x) - \varepsilon u'(0) = \int_0^x b(s, u(s)) \exp(\varepsilon^{-1}p(s))ds$$

. Следовательно

$$|u'(x)| \leq C_5[\varepsilon^{-1} \exp(-\varepsilon^{-1}p(x)) + \varepsilon^{-1} \int_0^x \exp(\varepsilon^{-1}(p(s) - p(x)))ds].$$

Отсюда следует требуемая оценка (4.8).

Теперь покажем, что на каждом сеточном интервале коэффициенты a и b меняются на величину порядка $O(h)$:

$$|a(x, u(x)) - a(y, u(y))| \leq C_6h, \quad |b(x, u(x)) - b(y, u(y))| \leq C_6h, \quad (4.9)$$

где $x, y \in \Delta_j, j = 1, 2, \dots, N$. Неравенства в (4.9) проверяются аналогично образом, поэтому остановимся на первом из них. Имеем:

$$\Delta(x, y) = |a(x, u(x)) - a(y, u(y))| \leq$$

$$|a(x, u(x)) - a(x, u(y))| + |a(x, u(y)) - a(y, u(y))| \leq C_7(|u(x) - u(y)| + |x - y|).$$

Полагая для определенности $x \leq y$ и используя оценку (4.8), получим:

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_x^y |u'(s)| ds \leq C_8(h_j + \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{j-1}) - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_j)).$$

Следовательно

$$\Delta(x, y) \leq C_9(h + \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{j-1}) - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_j)) \quad (4.10).$$

В случае $j \leq M$, учитывая выражение для узлов сетки, получим $\Delta(x, y) \leq C_6h$. В случае $j > M$

$$\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_{j-1}) - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_j) \leq \varepsilon[1 - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}h_j)] \leq C_6h.$$

Теперь из (4.10) следует (4.9). В соответствии с [186]

$$|u(x) - V(x)| \leq \theta \int_0^1 |\tilde{L}u(s) - \tilde{L}V(s)| ds \quad (4.11).$$

где $\theta = \exp(-2\gamma\alpha^{-1}[\alpha^2 + 4\gamma\varepsilon]^{-0.5})$. Используя неравенства (4.8), (4.9), из (4.11) получим:

$$|u(x) - V(x)| \leq \theta \int_0^1 |\tilde{L}u(s) - Lu(s)| ds \leq \theta \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} [|a(s, u(s)) - a(x_j, u(x_j))| \times |u'(s)| + |b(s, u(s)) - b(x_j, u(x_j))|] ds \leq C\theta h \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}s)] ds = C\theta h \int_0^1 [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}s)] ds \leq Ch\theta.$$

Теорема доказана.

§5. Разностная схема для стационарного одномерного уравнения Бюргерса

Рассмотрим краевую задачу:

$$Lu(x) = \varepsilon u''(x) + u(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B. \quad (5.1)$$

Предполагаем, что

$$b(x) \geq \beta > 0, \quad 1 \geq \varepsilon > 0, \quad b, b \in C^1[0, 1], \quad u_0(0) = k > 0,$$

где $u_0(x)$ - решение вырожденной задачи с условием $u_0(1) = B$.

Разностные методы решения задачи (5.1) исследовались в [51], [183], [190], [198]. В [51] предполагалось, что $u(x) \geq \alpha > 0$, и решение находилось на основе построения разностной схемы для последовательности линеаризованных задач. В [183] строилась разностная схема, учитывающая экспоненциальный погранслойный рост решения, анализировались вопросы существования и единственности решения схемы. В [198] для квазилинейного уравнения с малым параметром в предположении, что коэффициент при первой производной строго положителен, построена схема и обоснована ее сходимость в норме L_1 .

Построим разностную схему для задачи (5.1) с учетом погранслойного поведения решения. В соответствии с [35] для решения задачи (5.1) справедливо асимптотическое представление

$$u(x) = u_0(x) + V_\varepsilon(x) + \alpha_\varepsilon(x), \quad (5.2)$$

где $|\alpha_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon$, $V_\varepsilon(x)$ - погранслойная функция, удовлетворяющая уравнению и условиям:

$$\varepsilon V_\varepsilon''(x) + (k + V_\varepsilon)V_\varepsilon' = 0, \quad V_\varepsilon(0) = -k, \quad k = u_0(0), \quad k > 0,$$

$$V_\varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ при } x\varepsilon^{-1} \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Функция $V_\varepsilon(x)$ имеет вид: $V_\varepsilon(x) = -k + k \times \text{th}[kx/(2\varepsilon)]$.

Выпишем оценку устойчивости для оператора L [186]:

$$\|u - v\|_1 \leq \beta^{-1} \|Lu - Lv\|_1, \quad \|u\|_1 = \int_0^1 |u(x)| dx. \quad (5.4)$$

где u и v - две произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, совпадающие на концах интервала.

Построим разностную схему на основе подгонки к погранслойной функции. Пусть Ω - равномерная сетка исходного интервала, $N + 1$ - число шагов сетки. Нетрудно убедиться, что точная разностная схема для уравнения (5.3) имеет вид:

$$\varepsilon_n^0 \lambda_{xx,n} V^h + (k + V_n^h) \lambda_{\bar{x},n} V^h = 0, \quad \varepsilon_n^0 = \frac{kh}{2} \coth \left[\frac{kh}{2\varepsilon} \right]. \quad (5.5)$$

С учетом (5.5) выпишем разностную схему для задачи (5.1):

$$L_n^h u^h = \varepsilon_n \lambda_{xx,n} u^h + u_n^h \lambda_{\bar{x},n} u^h - b_n u_n^h = f_n, \quad u_0^h = 0, \quad u_{N+1}^h = B, \quad (5.6)$$

где $b_n = b(x_n)$, $f_n = f(x_n)$,

$$\varepsilon_n = \frac{\phi_\varepsilon(x_n)h}{2} \coth \left[\frac{\phi_\varepsilon(x_n)h}{2\varepsilon} \right],$$

Предполагаем, что $\phi_\varepsilon(x)$ удовлетворяет ограничениям

$$|\phi_\varepsilon(0) - k| \leq C\varepsilon, \quad |\phi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(0)| \leq Cx,$$

$$|u(x)| \leq \phi_\varepsilon(x), \quad |u_n^h| \leq \phi_\varepsilon(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

В качестве $\phi_\varepsilon(x)$ можно выбрать верхнюю границу для решения:

$$\phi_\varepsilon(x) = k + C_0(x + \varepsilon), \quad \text{где } C_0 \geq |u'_0(x)|.$$

Определим две векторные нормы:

$$\|P^h\|_C = \max_{1 \leq j \leq N} |P_j^h|, \quad \|P^h\|_1 = h \sum_{j=1}^N |P_j^h|,$$

Под нормами матриц будем понимать нормы, согласованные с соответствующими векторными нормами, при тех же обозначениях. Определим

$$M = \{P^h \in R^{N+2} : |P_n^h| \leq \phi_\varepsilon(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N\}.$$

Лемма 5.1. Пусть q^h и v^h - две произвольные сеточные функции из M такие, что $q_0^h = v_0^h$, $q_{N+1}^h = v_{N+1}^h$. Тогда при всех $h \leq h_0$ (h_0 не зависит от ε) найдется C такое, что

$$\|q^h - v^h\|_1 \leq C \|L^h q^h - L^h v^h\|_1.$$

Доказательство. Линеаризованный оператор для L^h имеет вид

$$DL_n^h(z^h)P^h = \varepsilon_n \lambda_{xx,n} P^h + z_n^h \lambda_{\bar{x},n} P^h - (b_n - \lambda_{\bar{x},n} z^h) P_n^h,$$

где $z^h, P^h \in R^{N+2}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Теперь определим

$$\Delta L_n^h(q^h, v^h) = \int_0^1 DL_n^h[v^h + s(q^h - v^h)] ds.$$

Тогда

$$L_n^h q^h - L_n^h v^h = \Delta L_n^h(q^h, v^h)(q^h - v^h), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (5.7)$$

Для произвольной сеточной функции P^h имеем:

$$\begin{aligned} \Delta L_n^h(q^h, v^h)P^h &= \varepsilon_n \lambda_{xx,n} P^h + \frac{q_n^h + v_n^h}{2} \lambda_{\bar{x},n} P_n^h - \\ &- \left(b_n - \frac{q_{n+1}^h + v_{n+1}^h}{4h} + \frac{q_{n-1}^h + v_{n-1}^h}{4h} \right) P_n^h, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Далее будем предполагать, что $P_0^h = P_{N+1}^h = 0$.

Пусть Q – матрица порядка $N \times N$, соответствующая разностному оператору $\Delta L_n^h(q^h, v^h)$, $n = 1, 2, \dots, N$. Нетрудно убедиться, что матрица Q имеет диагональное преобладание по столбцам на величину δ , если при всех n будет $b_n - \lambda_{xx}\varepsilon_n \geq \delta > 0$. Этого неравенства можно добиться, ограничив $h \leq h_0$, где h_0 не зависит от ε . Тогда матрица Q^T будет иметь строгое диагональное преобладание по строкам на величину δ , и в соответствии с ([145], с. 41),

$$\|P^h\|_C \leq \delta^{-1} \|Q^T \bar{P}^h\|_C, \quad (5.8)$$

где $\bar{P}^h \in R^N$; $\bar{P}_n^h = P_n^h$ для $n = 1, 2, \dots, N$. Учитывая, что для произвольной невырожденной матрицы G

$$\|G\|_1 = \|G^T\|_C, \quad (G^{-1})^T = (G^T)^{-1},$$

исходя из(5.8), получаем $\|Q^{-1}\|_1 \leq \delta^{-1}$. Следовательно,

$$\|\bar{P}^h\|_1 \leq \delta^{-1} \|Q \bar{P}^h\|_1.$$

Применив это неравенство к (5.7), приняв $P^h = q^h - v^h$, получим утверждение леммы.

Теорема 5.1. Пусть u^h – решение системы (5.6). Тогда

$$\|u^h - [u]_\Omega\|_1 \leq Ch.$$

Доказательство. Согласно (5.2), в решении $u(x)$ можно выделить погранслойную составляющую V_ε :

$$u(x) = V_\varepsilon(x) + P_\varepsilon(x), \quad (5.9)$$

содержащую основной рост решения [35]:

$$\left| \frac{d^j u}{dx^j} \right| \leq C[1 + \varepsilon^{-j} \exp(-\tau \varepsilon^{-1} x)],$$

$$\left| \frac{d^j P_\varepsilon}{dx^j} \right| \leq C[1 + \varepsilon^{1-j} \exp(-\tau \varepsilon^{-1} x)], \quad \tau > 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Выпишем погрешность аппроксимации схемы (5.6):

$$R_n = Lu_n - L_n^h[u]_\Omega = \varepsilon u_n'' + u_n u_n' - \varepsilon_n \lambda_{xx,n}[u]_\Omega - u_n \lambda_{\bar{x},n}[u]_\Omega, \quad u_n = u(x_n).$$

Учитывая соотношения (5.5),(5.2),(5.9), получим:

$$\begin{aligned} R_n &= [\phi_\varepsilon(x_n) - k](V_n' - \lambda_{\bar{x},n}[V]_\Omega) + \alpha_\varepsilon(x_n)(V_n' - \lambda_{\bar{x},n}[V]_\Omega) + u_n(P_n' - \lambda_{\bar{x},n}[P]_\Omega) + \\ &+ (\varepsilon p_n^0 - \varepsilon_n) \lambda_{xx,n}[V]_\Omega + \varepsilon(P_n'' - \lambda_{xx,n}P_\Omega) + (\varepsilon - \varepsilon_n) \lambda_{xx,n}[P]_\Omega, \\ &V_n = V_\varepsilon(x_n), \quad P_n = P_\varepsilon(x_n). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Нетрудно убедиться, что

$$|\varepsilon - \varepsilon_n| \leq Ch, \quad |\varepsilon_n - \varepsilon_n^0| \leq |\phi_\varepsilon(x_n) - k|h/2. \quad (5.11)$$

Согласно [181], для произвольной достаточно гладкой функции $w(x)$ справедливы оценки:

$$\begin{aligned} |\lambda_{xx,n}[w]_\Omega - w_n''| &\leq \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |w'''(s)| ds, \\ h|\lambda_{xx,n}[w]_\Omega|, |\lambda_{xx,n}[w]_\Omega - w_n'| &\leq \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |w''(s)| ds, \quad w_n = w(x_n). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Рассмотрим отдельно случаи $n = 1$ и $n \geq 2$. Пусть $n \geq 2$. Тогда из (5.10) с учетом оценок (5.11),(5.12), представления решения (5.9), получим

$$|R_n| \leq C[(h\eta^{-1}\varepsilon^{-1}x_n + h\eta^{-1}) \exp(-\tau\varepsilon^{-1}x_{n-1}) + h], \quad (5.13)$$

где $\eta = \max(h, \varepsilon)$. Учитывая, что $x_{n-1} \geq x_n/2$ и вновь обозначая $\tau/2$ через τ , принимая во внимание ограниченность функции $t \exp(-t)$ при $t > 0$, из (5.13) получаем

$$|R_n| \leq Ch\eta^{-1} \exp(-\tau\varepsilon^{-1}x_n) + h,$$

В случае $n = 1$, учитывая явный вид функции $V_\varepsilon(x)$, получаем $|R_1| \leq C$.

Итак, во всех узлах сетки получена оценка погрешности аппроксимации. Оценим норму этой погрешности:

$$\begin{aligned} \|R\|_1 &= h \sum_{j=1}^N |R_j| \leq Ch + \frac{Ch^2}{\eta} \sum_{j=2}^N \exp(-\tau\varepsilon^{-1}x_j) \leq \\ &\leq C\{h + h^2\eta^{-1}[1 - \exp(-\tau\varepsilon^{-1}h)]^{-1}\} \leq Ch. \end{aligned}$$

Учитывая, что $R_n = L_n^h u^h - L_n^h[u]_\Omega$, и используя лемму при $h \leq h_0$, получаем утверждение теоремы. В случае $h \geq h_0$ требуемая оценка следует из того, что $\|u^h\|_1 + \|u\|_1 \leq C$. Теорема доказана.

Остановимся на результатах численных экспериментов. Для анализируемых краевых задач в качестве точного решения принималось решение известной схемы [190] на достаточно мелкой сетке, $h = 0.001$. Причем точность такого решения при малых ε контролировалась с помощью асимптотического приближения к решению. Явный вид разностной схемы из [190] применительно к задаче (5.1) следующий:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \lambda_{xx,n} u^h + ((u_{n+1}^h)^2 - (u_n^h)^2)/(2h) - b(x_n)u_n^h &= f(x_n), \\ u_0^h = 0, \quad u_{N+1}^h = B, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Для нахождения решения разностной схемы использовались методы линеаризации Ньютона и Пикара. В качестве начального приближения принимались асимптотическое приближение и решение в виде линии между заданными краевыми условиями. В обоих случаях методы Ньютона и Пикара сходились при всех испытываемых значениях ε и h . Как и следовало ожидать, метод Ньютона сходил быстрее, особенно если в качестве начальной итерации задавать асимптотическое приближение к решению. Например, при $\varepsilon = 0.1$ максимальная погрешность

между двумя соседними итерациями была порядка 10^{-12} через 4-5 итераций.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u'' + uu' - u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 2.$$

В этом случае при задании $\phi_\varepsilon(x)$ следует использовать $k = 1$, $C_0 \geq 1$. В табл. 5.1 приведено сравнение схемы (5.6) при $C_0 = 1$ со схемой (5.14) при различных значениях ε , $h = 0.025$. В табл. 5.1 – табл. 5.3 при каждом значении ε последовательно приведены $\|z^h\|_C$ (верхнее число) и $\|z^h\|_1$ (нижнее число), где $z^h = u^h - [u]_\Omega$, u^h – решение испытываемой схемы, u – точное решение.

Остановимся на примере:

$$\varepsilon u'' + uu' - u = \exp(x), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 5.$$

В табл. 5.2 приведены нормы погрешности при различных ε для схемы (5.14), а также для схемы (5.6) с $C_0 = 1, 2$. Анализ табл. 5.1 и табл. 5.2 показывает, что схема из [190] уступает по точности построенной схеме (5.6). В таблице 5.3 для схемы (5.6) при $C_0 = 1$ приведена норма погрешности при различных ε и h .

Таблица 5.1.

Схема	ε				
	1.0	1.0E-1	1.0E-2	1.0E-3	1.0E-4
(5.14)	0.43E-2	0.11E-1	0.15	0.29E-1	0.76E-2
	0.27E-2	0.30E-2	0.85E-2	0.40E-2	0.34E-2
(5.6), $C_0 = 1$	0.20E-3	0.29E-3	0.55E-2	0.13E-2	0.43E-3
	0.12E-3	0.10E-3	0.30E-3	0.17E-3	0.15E-3

Таблица 5.2.

Схема	ε				
	1.0	1.0E-1	1.0E-2	1.0E-3	1.0E-4
(5.14)	0.21E-1	0.42E	0.17	0.16E-1	0.16E-1
(5.6), $C_0 = 1$	0.12E-1	0.51E-1	0.16E-1	0.82E-2	0.89E-2
	0.13E-2	0.35E-2	0.16E-1	0.25E-1	0.25E-1
(5.6), $C_0 = 2$	0.56E-3	0.12E-2	0.34E-2	0.42E-2	0.42E-2
	0.51E-2	0.49E-1	0.41E-1	0.23E-1	0.21E-1
	0.27E-2	0.45E-2	0.52E-2	0.46E-2	0.45E-2

Таблица 5.3.

h	ε				
	1.0	1.0E-1	1.0E-2	1.0E-3	1.0E-4
0.1	0.47E-2	0.20E-1	0.41E-1	0.50E-1	0.50E-1
	0.23E-2	0.50E-2	0.90E-2	1.0E-2	1.0E-2
0.05	0.13E-2	0.35E-2	0.16E-1	0.25E-1	0.25E-1
	0.50E-3	0.12E-2	0.34E-2	0.42E-2	0.42E-2
0.025	0.54E-3	0.86E-2	0.43E-2	0.12E-1	0.12E-1
	0.24E-3	0.91E-3	0.13E-2	0.18E-2	0.18E-2

§6. Задача со степенным пограничным слоем

Рассмотрим краевую задачу:

$$T_\varepsilon u = (\varepsilon + x)u'' + a(x)u' - f(x, u) = 0, \quad u(0) = A, \quad u(1) = B. \quad (6.1)$$

Предполагаем, что функции a, f непрерывно дифференцируемы по своим аргументам,

$$\varepsilon > 0, a(0) > 0, \frac{\partial f}{\partial u} \geq 0.$$

Получим оценку устойчивости для оператора задачи (6.1).

Лемма 6.1 Пусть $p(x)$ и $q(x)$ - две произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Тогда для некоторой постоянной C справедлива оценка:

$$\|p(x) - q(x)\| \leq C\|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + |p(0) - q(0)| + |p(1) - q(1)|.$$

Доказательство. Пусть $z(x) = p(x) - q(x)$. Тогда $z(x)$ является решением задачи:

$$\begin{aligned} Lz &= (\varepsilon + x)z'' + a(x)z' - c(x)z = g(x), \\ z(0) &= p(0) - q(0), \quad z(1) = p(1) - q(1), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где

$$c(x) = [f(x, p) - f(x, q)]/(p - q), \quad c(x) \geq 0, \quad g(x) = T_\varepsilon p(x) - T_\varepsilon q(x).$$

Для заданного $\alpha : 0 < \alpha < a(0)$ найдется $\delta > 0$, не зависящее от ε такое, что при всех $x \leq \delta$ $a(x) \geq \alpha$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha < 1$. В силу непрерывности для некоторого $\beta > 0$ $a(x) \geq -\beta$. Нетрудно показать, что

$$L\phi(x) \leq -(\beta + 2)x^{\beta+1}, \quad \phi(x) = 1 - x^{\beta+2}. \quad (6.3)$$

Определим

$$V(x) = \begin{cases} M + \alpha^{-1}(1 - x), & \text{если } x \leq \delta, \\ M + \alpha^{-1}(1 - \delta) + M\phi(x) - M\phi(\delta), & \text{если } x > \delta, \end{cases}$$

где

$$M = \alpha^{-1}(\beta + 2)^{-1}\delta^{-\beta-1}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $V(x)$ является непрерывно дифференцируемой на интервале $[0, 1]$, $LV(x) \leq -1$.

Определим

$$\Psi(x) = \|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\|V(x) + |z(0)| + |z(1)| \pm z(x).$$

Тогда выполняются условия:

$$\Psi(0) \geq 0, \quad \Psi(1) \geq 0, \quad L\Psi(x) \leq 0, \quad 0 < x < 1. \quad (6.4)$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает лемму.

Из леммы 6.1 следует единственность и ограниченность решения задачи (6.1), $\|u\| \leq C_1$.

Построение схемы. Для построения разностной схемы перейдем от (6.1) к уравнению с кусочно - постоянными коэффициентами:

$$(\varepsilon + x)\tilde{u}'' + \tilde{a}(x)\tilde{u}' - \tilde{f}(x, \tilde{u}) = 0, \quad \tilde{u}(0) = A, \quad \tilde{u}(1) = B. \quad (6.5)$$

Введем некоторую равномерную сетку, $\Delta_n = (x_{n-1}, x_n]$, $n = 1, 2, \dots, N$.

При $x \in \Delta_n$ определим

$$\tilde{a}(x) = a(x_n), \quad \tilde{f}(x, \tilde{u}(x)) = f(x_n, \tilde{u}(x_n)).$$

Предположим, что нули функции $a(x)$ не совпадают с узлами сетки. Случай совпадения усложняет построение разностной схемы, но не влияет на обоснование равномерной сходимости.

Необходимо еще выделить случай $a(x_n) = 1$. Пусть $a(x_n) \neq 1$. Для задачи (6.5) на интервале Δ_n выпишем точное решение:

$$\tilde{u}(x) = \gamma_1^{(n)} \left(1 + \frac{x}{\varepsilon}\right)^{1-a_n} + \gamma_2^{(n)} + \frac{f_n}{a_n}x, \quad a_n = a(x_n), \quad f_n = f(x_n, u_n^h),$$

где u_n^h – решение задачи (6.5) в узле x_n . Учитывая значения решения на концах интервала Δ_n , найдем значение $\gamma_1^{(n)}$:

$$\gamma_1^{(n)} = \left[u_n^h - u_{n-1}^h - \frac{f_n}{a_n} h \right] \left[\left(1 + \frac{x_n}{\varepsilon} \right)^{1-a_n} - \left(1 + \frac{x_{n-1}}{\varepsilon} \right)^{1-a_n} \right]^{-1}.$$

Выпишем соотношение, соответствующее непрерывности первых производных решения задачи (6.5):

$$\lim_{x \rightarrow x_n - 0} \tilde{u}'(x) = \lim_{x \rightarrow x_n + 0} \tilde{u}'(x).$$

Учтем вид решения задачи (6.5) на каждом сеточном интервале и получим разностную схему:

$$\frac{u_n^h - u_{n-1}^h - f_n a_n^{-1} h}{(1 + x_n \varepsilon^{-1})^{a_n} \left[(1 + x_n \varepsilon^{-1})^{1-a_n} - (1 + x_{n-1} \varepsilon^{-1})^{1-a_n} \right]} - \frac{u_{n+1}^h - u_n^h - f_{n+1} a_{n+1}^{-1} h}{(1 + x_n \varepsilon^{-1})^{a_{n+1}} \left[(1 + x_{n+1} \varepsilon^{-1})^{1-a_n} - (1 + x_n \varepsilon^{-1})^{1-a_n} \right]} = \left(\frac{f_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{f_n}{a_n} \right) \varepsilon.$$

$$u_0^h = A, \quad u_N^h = B, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (6.6)$$

Рассмотрим случай $a(x_n) = 1$. В этом случае решение задачи (6.5) на интервале Δ_n имеет вид:

$$\tilde{u}(x) = \gamma_1^{(n)} \ln(\varepsilon + x) + \gamma_2^{(n)} + f_n x.$$

Вид разностного соотношения для узла x_n зависит от значения $a(x_{n+1})$. В случае $a(x_{n+1}) = 1$ разностное соотношение принимает вид:

$$\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\ln[(\varepsilon + x_{n+1})/(\varepsilon + x_n)]} - \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{\ln[(\varepsilon + x_n)/(\varepsilon + x_{n-1})]} = (f_n - f_{n+1})(\varepsilon + x_n).$$

Рассмотрим случай, когда нули $a(x)$ совпадают с узлами сетки. Предположим, что $a_n = 0$. Можно показать, что в этом случае при $x \in \Delta_n$

$$\tilde{u}(x) = u_n^h - f_n [\theta(\varepsilon + x_n) - \theta(\varepsilon + x)] + \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} (x - x_n) +$$

$$+\frac{f_n}{h}[\theta(\varepsilon + x_n) - \theta(\varepsilon + x_{n-1})](x_n - x), \quad \theta(x) = x \ln(x).$$

Разностное соотношение в узле x_n зависит от того, $a_{n+1} = 0$ или нет. Предположим, что $a_{n+1} = 0$. Условие непрерывности производной в узле x_n приводит к разностному соотношению:

$$u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h = h(f_n - f_{n+1})\theta'(\varepsilon + x_n) + \\ + f_{n+1}[\theta(\varepsilon + x_{n+1}) - \theta(\varepsilon + x_n)] - f_n[\theta(\varepsilon + x_n) - \theta(\varepsilon + x_{n-1})].$$

Это соотношение должно учитываться в (6.6) в случае $a_n = a_{n+1} = 0$. Аналогичным образом могут быть рассмотрены случаи $a_n = 0, a_{n+1} \neq 0$ и, наоборот, $a_n \neq 0, a_{n+1} = 0$. Оценим точность схемы (6.6).

Теорема 6.1. Для некоторой постоянной C при всех n

$$|u_n^h - u(x_n)| \leq Ch |\ln h|.$$

Доказательство. Согласно построению схема (6.6) является точной на решении задачи (6.5), поэтому достаточно оценить $z = u - \tilde{u}$. Нетрудно убедиться, что $z(x)$ является решением краевой задачи:

$$Lz = (\varepsilon + x)z'' + \tilde{a}z' - G(x, u, \tilde{u})z = F(x, u, \tilde{u}), \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad (6.7)$$

где при $x \in \Delta_n$

$$G(x, u, \tilde{u}) = [f(x, u_{n+1}) - f(x, \tilde{u}_{n+1})]/(u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}) \geq 0,$$

$$F(x, u, \tilde{u}) = (\tilde{a} - a)u'(x) + f(x, u) - \tilde{f}(x, u) - G(x, u, \tilde{u})(u - u_{n+1} + \tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}).$$

Докажем, что справедлива оценка:

$$|u'(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon + x}. \quad (6.8)$$

В соответствии с теоремой о среднем значении $u(1) - u(0) = u'(s)$, $0 < s < 1$. Интегрируя уравнение (6.1) от s до x и применяя формулу интегрирования по частям, получим оценку (6.8). Учитывая (6.8), нетрудно показать, что при всех x

$$|Lz(x)| \leq \frac{C_0 h}{\varepsilon + x}. \quad (6.9)$$

Определим барьерную функцию:

$$V(x) = \begin{cases} -\ln(\varepsilon + \alpha x/2), & \text{если } x \leq \delta, \\ -\ln(\varepsilon + \alpha\delta/2) + M\phi(x) - M\phi(\delta), & \text{если } x > \delta, \end{cases}$$

где

$$M = \alpha(2\varepsilon + \alpha\delta)^{-1}(\beta + 2)^{-1}\delta^{-\beta-1}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $V(x)$ является непрерывно дифференцируемой на интервале $[0, 1]$. Можно показать, что при $x \leq \delta$

$$LP(x) \leq -\frac{\alpha}{2(\varepsilon + x)}, \quad P(x) = -\ln(\varepsilon + \frac{\alpha x}{2}). \quad (6.10)$$

Определим функцию

$$\Psi(x) = C_1\{C_2 + V(x)\}h \pm z(x).$$

Учитывая оценки (6.3), (6.9), (6.10), получим, что для некоторых постоянных C_1, C_2 выполняются условия (6.4). Тогда в силу принципа максимума при всех x $\Psi(x) \geq 0$. Итак,

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq C_1[C_2 - \ln(\varepsilon + \frac{\alpha x}{2})]h + Ch.$$

Учитывая, что схема (6.6) является точной на функции $\tilde{u}(x)$, приходим к утверждению теоремы.

Теорема 6.2. Пусть $a(0) > 1$. Тогда для схемы (6.6) справедлива оценка точности:

$$|u_n^h - u(x_n)| \leq Ch, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Доказательство. В силу непрерывности $a(x)$ найдется $\delta > 0$, такое, что $a(x) \geq \alpha > 1$ при всех $x \leq \delta$. Докажем, что

$$|u'(x)| \leq C_0 + C_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + x} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon + x}. \quad (6.11)$$

В случаях $x \geq \delta$ или $\varepsilon \geq \delta$ эта оценка следует из оценки (6.8). Рассмотрим случай $x < \delta$, $\varepsilon < \delta$. Представим уравнение (6.1) в виде:

$$\left(u'(x) \exp \left\{ \int_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon + s} ds \right\} \right)' = \frac{f(x, u)}{\varepsilon + x} \exp \left\{ \int_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon + s} ds \right\}. \quad (6.12)$$

По теореме Лагранжа для некоторого $\eta < \varepsilon$ $u(\varepsilon) - u(0) = u'(\eta)\varepsilon$. Следовательно, $|u'(\eta)| \leq C/\varepsilon$. Интегрируя уравнение (6.12) от 0 до η , получим $|u'(0)| \leq C/\varepsilon$. Интегрируя (6.12) от 0 до x , получим требуемую оценку (6.11). В случае линейного уравнения аналогичные оценки получены в [125].

Оценим правую часть в уравнении (6.7). Оценим сначала $f(x, u) - \tilde{f}(x, u)$. Пусть $x \in \Delta_n$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(x, u(x)) - \tilde{f}(x, u(x))| &= |f(x, u(x)) - f(x_{n+1}, u(x_{n+1}))| \leq \\ &\leq C_0 h + C_0 \int_x^{x_{n+1}} |u'(s)| ds \leq C_0 h + C_0 \int_x^{x_{n+1}} \left[C_0 + C_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + s} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon + s} \right] ds \leq \\ &\leq C_0 h + C_0 h \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + x} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon + x}. \end{aligned}$$

Оценивая аналогичным образом остальные слагаемые в функции F , получим:

$$|Lz(x)| \leq C_0 h + C_0 h \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + x} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon + x}. \quad (6.13)$$

Определим барьерную функцию:

$$V(x) = \begin{cases} (\varepsilon/(\varepsilon + x))^{\alpha-1}, & \text{если } x \leq \delta, \\ (\varepsilon/(\varepsilon + \delta))^{\alpha-1} + M\phi(x) - M\phi(\delta), & \text{если } x > \delta, \end{cases}$$

где

$$M = (\alpha - 1) \frac{1}{\varepsilon + \delta} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \delta} \right)^{\alpha-1} (\beta + 2)^{-1} \delta^{-\beta-1}.$$

Можно показать, что функция $V(x)$ является непрерывно дифференцируемой на интервале $[0, 1]$. Нетрудно показать, что при $x \leq \delta$ для некоторой постоянной C_1

$$LP(x) \leq -\frac{C_1}{\varepsilon + x} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + x} \right)^{\alpha-1}, \quad P(x) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + x} \right)^{\alpha-1}. \quad (6.14)$$

Определим функцию

$$\Psi(x) = C_2 \{C_3 + V(x)\} h \pm z(x).$$

Учитывая оценки (6.3), (6.13), (6.14), получим, что при некоторых постоянных C_2, C_3 выполняются условия (6.4). В силу принципа максимума при всех x $\Psi(x) \geq 0$. Итак, $|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq Ch$. Учитывая, что схема (6.6) является точной на функции $\tilde{u}(x)$, приходим к утверждению теоремы.

Итак, в данной главе предложен способ построения разностных схем для обыкновенных нелинейных сингулярно возмущенных уравнений второго порядка и построен ряд новых разностных схем. В частности, построена разностная схема для системы уравнений при различных ограничениях на якобиан, построена и обоснована схема для уравнения с сильной нелинейностью, для нелинейного уравнения со степенным пограничным слоем, для уравнения типа диффузия-реакция построена схема второго порядка точности.

Глава 2.

Краевые задачи для уравнений второго порядка с малым параметром на бесконечном интервале

В данной главе рассматривается вопрос численного решения уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной и системы таких уравнений на полубесконечном и бесконечном интервалах. Для переноса краевого условия из бесконечности используется известный подход [3], основанный на выделении многообразия решений, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Из условия принадлежности решения этому многообразию следует граничное условие в конечной точке. Учитывается, что исходное уравнение содержит малый параметр при старшей производной, тогда и вспомогательные сингулярные задачи Коши при старшей производной содержат малый параметр, что позволяет решить их на основе асимптотических разложений. На основе принципа максимума исследуется влияние погрешностей в правом краевом условии, обусловленных приближенным решением вспомогательных задач Коши, на решение задачи, получаемой на конечном интервале и на решение применяемых разностных схем. Исследуются разностные схемы для решения редуцированных задач.

§7. Несамосопряженное линейное уравнение

Рассмотрим краевую задачу:

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)u = f(x), \quad u(0) = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0. \quad (7.1)$$

Предполагаем непрерывность a , c , f ,

$$D \geq a(x) \geq \alpha > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad B \geq c(x) \geq b > 0,$$

$$f(x) \rightarrow 0, \quad a(x) \rightarrow a_0, \quad c(x) \rightarrow c_0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ниже покажем, что предельное краевое условие на бесконечности для уравнения (7.1) является допустимым [116], то есть выделяет многообразие решений уравнения (7.1).

На основании принципа максимума можно показать, что если $u(x)$ – решение задачи (7.1), то

$$\|u\| \leq |A| + \left\| \frac{f(x)}{c(x)} \right\|.$$

Остановимся на вопросе переноса краевого условия из бесконечности. В соответствии с [19] следующим уравнением определим многообразие решений уравнения (7.1), для которых выполняется предельное условие на бесконечности:

$$u'(x) = \gamma(x)u(x) + \beta(x), \quad (7.2)$$

где $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ являются решениями сингулярных задач Коши:

$$R_\varepsilon \gamma = \varepsilon \gamma' - a(x)\gamma + \varepsilon \gamma^2 - c(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x) = r, \quad (7.3)$$

где r – отрицательный корень уравнения $\varepsilon r^2 - a_0 r - c_0 = 0$,

$$\varepsilon \beta' - [a(x) - \gamma(x)\varepsilon]\beta = f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = 0. \quad (7.4)$$

Перейдем к анализу свойств решения задачи (7.3). Покажем, что при $\varepsilon < \alpha^2/B$ решение задачи (7.3) существует при всех $x > 0$. Определим метод линеаризации для задачи (7.3):

$$\varepsilon \gamma'_{n+1} - a(x)\gamma_{n+1} + \varepsilon \gamma_n \gamma_{n+1} - c(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \gamma_{n+1}(x) = r, \quad \gamma_0(x) = r. \quad (7.5)$$

На каждом шаге по n решение линейной относительно $\gamma_{n+1}(x)$ задачи (7.5) существует и единственно. Рассуждениями от противного можно показать, что если $\gamma_n(x) \leq 0$, то $\gamma_{n+1}(x) \leq 0$. Используя принцип максимума, нетрудно показать, что при всех n $|\gamma_n(x)| \leq B\alpha^{-1}$. Покажем, что метод линеаризации сходится при $n \rightarrow \infty$. Пусть $z_{n+1} = \gamma_{n+1} - \gamma_n$. Тогда относительно $z_{n+1}(x)$ можно сформировать задачу:

$$\varepsilon z'_{n+1} - [a(x) - \varepsilon \gamma_n] z_{n+1} = \varepsilon \gamma_n z_n, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} z_{n+1}(x) = 0. \quad (7.6)$$

Используя принцип максимума, из этой задачи можно получить:

$$\|z_{n+1}\| \leq \varepsilon \alpha^{-1} \|\gamma_n\| \|z_n\|. \quad (7.7)$$

Следовательно, метод линеаризации (7.5) сходится при $\varepsilon < \alpha^2/B$. Это доказывает существование решения задачи (7.3) при достаточно малых значениях ε и $x > 0$, причем $\gamma(x) \leq 0$. Единственность следует из рассуждений от противного. Задача (7.4) линейна, ее решение существует и единственно.

Лемма 7.1. При всех $x > 0$

$$-\frac{2B}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4B\varepsilon}} \leq \gamma(x) \leq -\frac{2b}{D + \sqrt{D^2 + 4b\varepsilon}} < 0. \quad (7.8)$$

Доказательство. Докажем вторую часть этого неравенства (первая часть доказывается аналогично). Пусть

$$S = -\frac{2b}{D + \sqrt{D^2 + 4b\varepsilon}}.$$

Тогда $\varepsilon S^2 - DS - b = 0$. Пусть $z(x) = S - \gamma(x)$. Тогда

$$Lz = \varepsilon z' - \{a(x) - \varepsilon(S + \gamma(x))\}z = (D - a(x))S + b - c(x) \leq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} z(x) \geq 0.$$

Учитывая, что $S + \gamma(x) < 0$, из рассуждений от противного получим $z(x) \geq 0$, $x < \infty$. Это доказывает лемму.

Остановимся на вопросе приближенного решения задачи (7.3). Покажем, что решение задачи (7.3) устойчиво к возмущению коэффициентов. Перейдем от (7.3) к задаче:

$$\varepsilon\tilde{\gamma}' - \tilde{a}(x)\tilde{\gamma} + \varepsilon\tilde{\gamma}^2 - \tilde{c}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}(x) = \tilde{r}, \quad \varepsilon\tilde{r}^2 - \tilde{a}_0\tilde{r} - \tilde{c}_0 = 0, \quad \tilde{r} < 0. \quad (7.9)$$

Предполагаем, что функции $\tilde{a}(x)$, $\tilde{c}(x)$ непрерывны,

$$\tilde{a}(x) \rightarrow \tilde{a}_0, \quad \tilde{c}(x) \rightarrow \tilde{c}_0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \tilde{D} \geq \tilde{a}(x) \geq \tilde{a} > 0, \quad \tilde{B} \geq \tilde{c}(x) \geq \tilde{b} > 0. \quad (7.10)$$

Лемма 7.2. Пусть $|a(x) - \tilde{a}(x)| \leq \Delta$, $|c(x) - \tilde{c}(x)| \leq \Delta$ для $x \geq L_0$. Тогда найдется C :

$$|\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \leq C\Delta \quad \text{для } x \geq L_0. \quad (7.11)$$

Доказательство. Пусть $z = \gamma - \tilde{\gamma}$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' - [a - \varepsilon(\gamma + \tilde{\gamma})]z = c - \tilde{c} + (a - \tilde{a})\tilde{\gamma}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = r - \tilde{r}.$$

Теперь утверждение леммы можно получить с помощью принципа максимума.

На основании леммы 7.2 для достаточно больших x $\gamma(x)$ можно приближенно найти на основе разложения коэффициентов $a(x)$ и $c(x)$ в ряды по обратным степеням x [19].

Если при достаточно больших x справедливы представления:

$$a(x) \approx \tilde{a}(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^{-i}, \quad c(x) \approx \tilde{c}(x) = \sum_{i=0}^N c_i x^{-i}, \quad (7.12)$$

то $\gamma(x)$ может быть приближенно найдено в виде:

$$\gamma(x) \approx \tilde{\gamma}(x) = \sum_{i=0}^N \gamma_i x^{-i}.$$

Для этого необходимо подставить разложения a , c , γ в (7.3) и получим рекуррентную формулу относительно γ_i . Если для $x \geq L_0$ имеют место разложения (7.12), и при этом

$$|a(x) - \tilde{a}(x)|, \quad |c(x) - \tilde{c}(x)| \leq C/x^{N+1},$$

то в соответствии с леммой 7.2 при $x \geq L_0$ $|\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \leq C_1/L_0^{N+1}$. При переносе таким образом краевого условия из бесконечности предполагается, что длина интервала, к которому редуцируется исходная задача, должна быть достаточно большой.

Для приближенного нахождения $\gamma(x)$ будем использовать малость параметра ε и строить асимптотический ряд по параметру ε . Такое разложение решения будет применимо при всех $x > 0$. Следовательно, интервал, к которому редуцируется исходная задача, не обязательно должен быть достаточно большим, как в случае системы уравнений это предполагается в [19]. Параметр ε должен быть достаточно мал. Итак, решение задачи (7.3) ищем в виде асимптотического ряда:

$$\tilde{\gamma}_N(x) = \sum_{n=0}^N \gamma_n(x) \varepsilon^n. \quad (7.13)$$

Подставляя это разложение в (7.3) и собирая члены при одинаковых степенях ε , получим рекуррентную формулу:

$$\gamma_n(x) = a(x)^{-1} \left[\gamma'_{n-1}(x) + \sum_{i+j=n-1} \gamma_i(x) \gamma_j(x) \right], \quad (7.14)$$

где $0 \leq i, j \leq n-1$, $n \geq 1$,

$$\gamma_0(x) = -c(x)/a(x). \quad (7.15)$$

Лемма 7.3. Пусть функции $a(x)$ и $c(x)$ N раз непрерывно дифференцируемы. Тогда для достаточно малых значений ε для некоторой

постоянной C при всех x

$$|\gamma(x) - \tilde{\gamma}_N(x)| \leq C\varepsilon^{N+1}.$$

Доказательство. Для величины r , соответствующей предельному условию на бесконечности, сделаем разложение в ряд по ε :

$$\tilde{r}_N = \sum_{k=0}^N r_k \varepsilon^k.$$

Подставляя это разложение в уравнение $\varepsilon r^2 - a_0 r - c_0 = 0$ и приводя подобные при одинаковых степенях ε , получим:

$$r_n = a_0^{-1} \left[\sum_{i+j=n-1} r_i r_j \right], \quad r_0 = -\frac{c_0}{a_0}. \quad (7.16)$$

Из сравнения (7.14) и (7.16) следует $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_N(x) = \tilde{r}_N$. В силу того, что производная $r^{(N+1)}(\varepsilon)$ ограничена равномерно по ε ,

$$|r(\varepsilon) - \tilde{r}_N(\varepsilon)| \leq C_0 \varepsilon^{N+1}. \quad (7.17)$$

Определим $z = \gamma - \tilde{\gamma}_N$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' - \{a(x) - \varepsilon(\gamma(x) + \tilde{\gamma}_N(x))\}z = F(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = s,$$

где

$$|F(x)| \leq C_0 \varepsilon^{N+1}, \quad |s| \leq C_0 \varepsilon^{N+1}. \quad (7.18)$$

Для некоторой постоянной C_1 $|\gamma_i(x)| \leq C_1$, $i = 1, 2, \dots, N$. Следовательно, $|\tilde{\gamma}_N(x)| \leq C_1/(1 - \varepsilon)$. Тогда $a(x) - \varepsilon(\gamma(x) + \tilde{\gamma}_N(x)) \geq \alpha/2$ при $\varepsilon \leq \alpha/(\alpha + 2C_1)$. Определим $\Psi(x) = C\varepsilon^{N+1} \pm z(x)$. Тогда с учетом (7.18) для некоторой постоянной C выполняются условия:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) \geq 0, \quad R_\varepsilon \Psi(x) \leq 0, \quad 0 \leq x < \infty.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$, $0 \leq x < \infty$. Это доказывает лемму.

Итак, решение задачи (7.3) может быть найдено с помощью асимптотического разложения (7.13).

Теперь остановимся на вопросе нахождения $\beta(x)$ из (7.4). Нетрудно показать, что

$$\|\beta(x)\| \leq \left\| \frac{f(x)}{a(x)} \right\|.$$

Перейдем от (7.4) к уравнению с возмущенными коэффициентами:

$$\varepsilon \tilde{\beta}' - [\tilde{a}(x) - \tilde{\gamma}(x)\varepsilon]\tilde{\beta} = \tilde{f}(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\beta}(x) = 0.$$

Предполагаем, что $\tilde{a}(x), \tilde{f}(x)$ непрерывны,

$$\tilde{a}(x) \rightarrow a_0, \quad \tilde{\gamma}(x) \rightarrow r, \quad \tilde{f}(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \tilde{a} \geq \tilde{a} > 0, \quad \tilde{\gamma}(x) \leq 0.$$

Пусть для $x \geq L_0$

$$|a(x) - \tilde{a}(x)| \leq \Delta, \quad |f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \Delta, \quad |\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \leq \Delta_1.$$

Покажем, что тогда найдется C :

$$|\beta(x) - \tilde{\beta}(x)| \leq C[\Delta + \Delta_1\varepsilon] \quad \text{для } x \geq L_0. \quad (7.19)$$

Пусть $z = \beta - \tilde{\beta}$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' - [\tilde{a} - \varepsilon \tilde{\gamma}]z = f - \tilde{f} + \beta(a - \tilde{a}) + \beta\varepsilon(\tilde{\gamma} - \gamma), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = 0.$$

Применяя принцип максимума к оператору R_ε , нетрудно получить оценку (7.19).

Таким образом, если функция $\gamma(x)$ найдена с некоторой погрешностью, то это не вызывает увеличения погрешности при расчете $\beta(x)$.

Для нахождения $\beta(x)$ можно использовать малость параметра ε .

Пусть

$$\beta(x) \approx \sum_{n=0}^N \beta_n(x)\varepsilon^n.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (7.4), получим:

$$\beta_{n+1}(x) = \frac{\beta_n'(x) + \gamma(x)\beta_n(x)}{a(x)}, \quad \beta_0(x) = -\frac{f(x)}{a(x)}.$$

Если функции a , c , f N раз непрерывно дифференцируемы, то на основании принципа максимума нетрудно показать, что для некоторой постоянной C при всех x

$$\left| \beta(x) - \sum_{n=0}^N \beta_n(x)\varepsilon^n \right| \leq C\varepsilon^{N+1}.$$

Покажем, что соотношение (7.2) выделяет многообразие решений уравнения (7.1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Из (7.2) следует:

$$u(x) = u(x_0) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \gamma(t) dt \right\} + \int_{x_0}^x \beta(s) \exp \left\{ \int_s^x \gamma(t) dt \right\} ds.$$

Учитывая неравенства (7.8) и условие $\beta(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, теперь несложно получить $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

С учетом уравнения (7.2) от задачи (7.1) можно перейти к задаче на конечном интервале $[0, L_0]$:

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)u = f(x),$$

$$u(0) = A, \quad u'(L_0) - \gamma(L_0)u(L_0) = \beta(L_0). \quad (7.20)$$

Покажем, что решения задач (7.1) и (7.20) совпадают при всех $x \in [0, L_0]$, то есть посредством (7.20) задача (7.1) точным образом редуцируется к произвольному конечному интервалу $[0, L_0]$. Для этого определим начальную задачу:

$$u'(x) - \gamma(x)u(x) = \beta(x), \quad u(0) = A. \quad (7.21)$$

Учитывая, что согласно (7.8) $\gamma(x) \leq -\theta < 0$, и применяя принцип максимума, можно показать, что задача (7.21) имеет единственное решение. Таким образом, задачи (7.1), (7.20) и (7.21) имеют единственное решение. Несложно показать, что решение задачи (7.21) является решением задач (7.1) и (7.20), откуда и следует, что решения задач (7.1) и (7.20) совпадают при всех $x \leq L_0$.

Значения $\gamma(L_0)$ и $\beta(L_0)$ в (7.20) могут быть найдены с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на решение задачи (7.20).

Теорема 7.1. Пусть $\tilde{u}(x)$ — решение задачи (7.20) в случае возмущенных значений $\tilde{\gamma}(L_0)$, $\tilde{\beta}(L_0)$. Пусть

$$\tilde{\gamma}(L_0) \leq 0, \quad |\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)| \leq \Delta_1, \quad |\beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0)| \leq \Delta_2.$$

Тогда при всех $x \in [0, L_0]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \varepsilon \alpha^{-1} \{\Delta_2 + \Delta_1 |u(L_0)|\} \exp[\alpha \varepsilon^{-1} (x - L_0)]. \quad (7.22)$$

Доказательство. Определим $z = u - \tilde{u}$. Тогда $z(x)$ является решением задачи:

$$L_\varepsilon z = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)z(L_0) = \beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0) + (\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0))u(L_0).$$

Определим функцию:

$$\Psi(x) = \{\Delta_2 + \Delta_1 |u(L_0)|\} \varepsilon \alpha^{-1} \exp[\varepsilon^{-1} \alpha (x - L_0)] \pm z(x).$$

Тогда

$$\Psi(0) \geq 0, \quad \Psi'(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)\Psi(L_0) \geq 0, \quad L_\varepsilon \Psi(x) \geq 0, \quad 0 < x < L_0.$$

Из принципа максимума следует $\Psi(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq L_0$. Теорема доказана.

Как говорилось выше, от задачи (7.1) можно перейти к задаче Коши (7.21). Функции $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ в (7.21) из задач (7.3) и (7.4) могут быть найдены с некоторой погрешностью. На основании принципа максимума можно показать, что если при всех x

$$\tilde{\gamma}(x) \leq -\theta, \theta > 0, \quad |\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \leq \Delta, \quad |\beta(x) - \tilde{\beta}(x)| \leq \Delta,$$

то $\|u - \tilde{u}\| \leq \theta^{-1}(1 + \|u\|)\Delta$.

Для решения задачи (7.21) можно использовать один из методов решения задачи Коши [16].

§8. Линейное уравнение без первой производной

Рассмотрим краевую задачу:

$$L_\varepsilon u = \varepsilon^2 u'' - c^2(x)u = f(x), \quad u(0) = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0. \quad (8.1)$$

Предполагаем непрерывность $c(x)$, $f(x)$,

$$\varepsilon \in (0, 1], \quad B \geq c(x) \geq b > 0, \quad f(x) \rightarrow 0, \quad c(x) \rightarrow c_0, \quad x \rightarrow \infty. \quad (8.2)$$

Согласно [109], при наложенных ограничениях существует единственное решение задачи (8.1). На основании принципа максимума нетрудно показать, что

$$\|u\| \leq |A| + \|f(x)/c^2(x)\|. \quad (8.3)$$

Следующим уравнением согласно подходу [3] выделим многообразие решений уравнения (8.1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности:

$$\varepsilon u'(x) = \gamma(x)u(x) + \beta(x), \quad (8.4)$$

где $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ являются решениями сингулярных задач Коши:

$$R_\varepsilon \gamma = \varepsilon \gamma' + \gamma^2 - c^2(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x) = -c_0, \quad (8.5)$$

$$\varepsilon \beta' + \gamma(x) \beta = f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = 0. \quad (8.6)$$

Покажем, что решение задачи (8.5) существует и единственно. Пусть $z(x) = \gamma(x) + c_0$. Можно показать, что $z(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$z(x) = Pz(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\infty [c^2(s) - c_0^2] \exp \left[\int_x^s \varepsilon^{-1} (z(t) - 2c_0) dt \right] ds$$

Для достаточно больших x ($x \geq X$) оператор P является сжимающим, в силу чего решение задачи (8.5) существует и единственно при всех $x \geq X$. На конечном интервале $[0, X]$ решение существует и единственно в силу известных результатов [140].

Покажем, что $\gamma(x) \leq 0$. Введем

$$v(x) = \exp \left\{ \int_0^x \varepsilon^{-1} \gamma(t) dt \right\}. \quad (8.7)$$

Учитывая предельное условие на $\gamma(x)$, можно заключить, что функция $v(x)$ является решением линейной краевой задачи:

$$\varepsilon^2 v'' - c^2(x) v = 0, \quad v(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0. \quad (8.8)$$

В соответствии с (8.7) при $x < \infty$ $\gamma(x) = v'(x)/v(x)$. Из (8.8) следует, что $v(x) > 0$, $v'(x) < 0$, $x < \infty$. Следовательно, $\gamma(x) < 0$ при $x < \infty$.

Лемма 8.1. При всех $x \in (0, \infty)$

$$-B \leq \gamma(x) \leq -b < 0. \quad (8.9)$$

Доказательство. Докажем вторую часть этого неравенства (первая часть доказывается аналогично). Пусть $z(x) = -b - \gamma(x)$. Тогда

$$Lz = \varepsilon z' + \{-b + \gamma(x)\}z = b^2 - c^2(x) \leq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} z(x) \geq 0.$$

В силу того, что $-b + \gamma(x) < 0$, из рассуждений от противного получим $z(x) \geq 0$, $x < \infty$. Это доказывает лемму.

Остановимся на вопросе приближенного решения задачи (8.5). Покажем, что решение задачи (8.5) устойчиво к возмущению $c(x)$. Перейдем от (8.5) к задаче:

$$\varepsilon \tilde{\gamma}' + \tilde{\gamma}^2 - \tilde{c}^2(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}(x) = -\tilde{c}_0. \quad (8.10)$$

Предполагаем непрерывность $\tilde{c}(x)$, $\tilde{c}(x) \rightarrow \tilde{c}_0$, $x \rightarrow \infty$, $\tilde{c}(x) \geq \tilde{b} > 0$.

Лемма 8.2. Пусть

$$|c^2(x) - \tilde{c}^2(x)| \leq \Delta \text{ при } x \geq L_0.$$

Тогда

$$|\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \leq b^{-1} \Delta \text{ при } x \geq L_0.$$

Доказательство. Учитывая, что уравнение (8.10) является аналогом уравнения (8.5) в случае возмущенных коэффициентов в уравнении (8.5), получим $\tilde{\gamma}(x) \leq 0$. Пусть $z = \gamma - \tilde{\gamma}$. Тогда

$$\varepsilon z' + (\gamma(x) + \tilde{\gamma}(x))z = c^2(x) - \tilde{c}^2(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = \tilde{c}_0 - c_0.$$

Используя принцип максимума, получим утверждение леммы.

На основании леммы 8.2 $\gamma(x)$ можно приближенно найти с помощью разложения $\gamma(x)$ в ряд по параметру ε . Пусть

$$\tilde{\gamma}_N(x) = \sum_{n=0}^N \gamma_n(x) \varepsilon^n. \quad (8.11)$$

Подставляя это разложение в (8.5) и собирая члены при одинаковых степенях ε , получим рекуррентную формулу:

$$\gamma_n = - \left\{ \gamma'_{n-1} + \sum_{i+j=n} \gamma_i \gamma_j \right\} / (2\gamma_0), \quad \gamma_0(x) = -c(x), \quad (8.12)$$

где $1 \leq i, j \leq n - 1$, $n \geq 1$.

По аналогии с леммой 7.3 можно доказать, что справедлива

Лемма 8.3. Пусть функция $c(x)$ N раз непрерывно дифференцируема. Тогда для достаточно малых значений ε для некоторой постоянной C при всех x

$$|\gamma(x) - \tilde{\gamma}_N(x)| \leq C\varepsilon^{N+1}.$$

Как и в случае несамосопряженной задачи $\beta(x)$ из (8.6) может быть найдено в виде асимптотического ряда. Из (8.6) следует, что для $x \geq L_0$

$$|\beta(x)| \leq \max_{x \geq L_0} |f(x)|/b.$$

Если искать $\beta(x)$ в виде ряда

$$\tilde{\beta}_N(x) = \sum_{n=0}^N \beta_n(x)\varepsilon^n,$$

то коэффициенты β_n связаны рекуррентным соотношением:

$$\beta_n(x) = -\frac{\beta'_{n-1}(x)}{\gamma(x)}, \quad \beta_0(x) = \frac{f(x)}{\gamma(x)}. \quad (8.13)$$

На основании принципа максимума нетрудно показать, что если функции $f(x)$ и $c(x)$ N раз непрерывно дифференцируемы, то для некоторой постоянной C при всех x

$$|\beta(x) - \tilde{\beta}_N(x)| \leq C\varepsilon^{N+1}.$$

Покажем, что решение задачи (8.6) устойчиво к возмущению $\gamma(x)$.

Пусть $\tilde{\beta}(x)$ – решение задачи (8.6) в случае возмущенной функции $\tilde{\gamma}(x)$. На основании принципа максимума можно показать, что если при $x \geq L_0$

$$\tilde{\gamma}(x) \leq -\tilde{b} < 0, \quad |\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \leq \Delta,$$

то при всех $x \geq L_0$ $|\beta(x) - \tilde{\beta}(x)| \leq \max_{x \geq L_0} |\beta(x)|\tilde{b}^{-1}\Delta$.

С учетом соотношения (8.4) перейдем от (8.1) к задаче на конечном интервале:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u &= \varepsilon^2 u'' - c^2(x)u = f(x), \\ u(0) &= A, \quad \varepsilon u'(L_0) - \gamma(L_0)u(L_0) = \beta(L_0). \end{aligned} \quad (8.14)$$

По аналогии с предыдущим параграфом можно показать, что решения задач (8.1) и (8.14) совпадают всех $0 \leq x \leq L_0$

Значения $\gamma(L_0)$ и $\beta(L_0)$ могут быть найдены с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на решение задачи (8.14). На основании принципа максимума нетрудно убедиться, что справедлива

Теорема 8.1. Пусть $\tilde{u}(x)$ — решение задачи (8.14) в случае возмущенных значений $\tilde{\gamma}(L_0)$, $\tilde{\beta}(L_0)$. Пусть найдется $\tilde{b} > 0$ такое, что

$$\tilde{\gamma}(L_0) \leq -\tilde{b} < 0, \quad |\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)| \leq \Delta, \quad |\beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0)| \leq \Delta.$$

Тогда при всех $x \in [0, L_0]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \tilde{b}^{-1}(1 + \|u\|)\Delta.$$

Остановимся на вопросе численного решения задачи (8.14). По аналогии с [49] можно показать, что в случае $c(x) \in C^2[0, L_0]$ для производных задачи (8.1) справедливы оценки:

$$|u^{(j)}(x)| \leq C\{1 + \varepsilon^{-j} \exp\{-b\varepsilon^{-1}x\}\}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (8.15)$$

Таким образом, решение задачи (8.14) содержит экспоненциальный пограничный слой около границы $x = 0$. Равномерно сходящаяся разностная схема для такой задачи может быть построена либо за счет подгонки схемы к погранслойной функции [105], либо за счет построения в пограничном слое специальной неравномерной сетки [15].

Решение задачи (8.1) может быть найдено и с помощью решения задачи Коши для уравнения (8.4):

$$\varepsilon u'(x) - \gamma(x)u(x) = \beta(x), \quad u(0) = A. \quad (8.16)$$

Для нахождения решения задачи (8.16) можно использовать равномерно сходящуюся схему [49], [25]. Функции $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ в (8.16), как это было определено выше, находятся с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на решение задачи (8.16).

Можно показать, что если при всех x

$$\tilde{\gamma}(x) \leq -\tilde{b}, \quad \tilde{b} > 0, \quad |\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \leq \Delta, \quad |\beta(x) - \tilde{\beta}(x)| \leq \Delta,$$

то $\|u - \tilde{u}\| \leq \tilde{b}^{-1}(1 + \|u\|)\Delta$.

§9. Нелинейное автономное уравнение

Рассмотрим краевую задачу:

$$T_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + mu' + g(u) = 0, \quad (9.1a)$$

$$u(0) = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = B. \quad (9.1b)$$

Предполагаем, что функция $g(s)$ является дважды непрерывно дифференцируемой,

$$\varepsilon \in (0, 1], \quad m > 0, \quad g(B) = 0, \quad g'(B) > 0, \quad |g''(B)| \leq C,$$

$$g'(s) \geq -\beta, \quad s \in R, \quad \beta > 0, \quad m^2 - 4\beta\varepsilon \geq \sigma > 0. \quad (9.2)$$

Согласно [113] предельное условие на бесконечности для уравнения (9.1a), при ограничениях (9.2), является допустимым.

Задача (9.1) с ограничениями (9.2) является модельной, например, при математическом описании переноса пламени в случае одностадийного кинетического механизма и подобия полей температуры и концентрации [91], когда

$$g(T) = K(T - B) \exp(-E/T),$$

где:

T - температура смеси, m - скорость переноса пламени, ε - коэффициент диффузии, A - температура свежей смеси, B - температура горения, K - константа скорости реакции, E - энергия активации.

Получим оценку устойчивости оператора T_ε .

Лемма 9.1. Пусть $p(x)$, $q(x)$ - две произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, ограниченные на бесконечности. Тогда при всех $0 \leq x < \infty$

$$|p(x) - q(x)| \leq \exp(2\beta m^{-1}x)[m^2\beta^{-1}\sigma^{-1}\|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + |p(0) - q(0)|].$$

Доказательство. Пусть $z = p - q$. Тогда

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + mz' + [g(p) - g(q)][p - q]^{-1}z = T_\varepsilon p - T_\varepsilon q.$$

Для $y < \infty$ рассмотрим интервал $[0, y]$. Определим :

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & \exp[2\beta m^{-1}x][m^2\beta^{-1}\sigma^{-1}\|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + |z(0)|] + \\ & + \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - y)]|z(y)| \pm z(x). \end{aligned}$$

При таком задании $\Psi(x)$ выполнится

$$L_\varepsilon \Psi(x) \geq 0, \quad 0 < x < y, \quad \Psi(0) \geq 0, \quad \Psi(y) \geq 0.$$

Учитывая, что для оператора L_ε справедлив принцип максимума, получим $\Psi(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq y$. Устремляя $y \rightarrow \infty$, придем к утверждению леммы.

Принимая $p = u$, $q = 0$, получим:

$$|u(x)| \leq \exp[2\beta m^{-1}x][m^2\beta^{-1}\sigma^{-1}|g(0)| + |A|].$$

В соответствии с этой леммой при выполнении условий (9.2) решение задачи (9.1) может иметь экспоненциальный рост. Исследуем поведение решения при достаточно больших значениях x .

В силу условия $g'(B) > 0$ для заданного $\alpha : g'(B) > \alpha > 0$ найдется $L : g'_u(u(x)) \geq \alpha$ при $x \geq L$.

Лемма 9.2. Решение задачи (9.1) $u(x)$ возрастает при $x \geq L$, если $u(L) \leq B$ и убывает при $u(L) \geq B$.

Доказательство. Пусть $u(L) \leq B$, $z = u - B$. Определим линейный оператор:

$$L_\varepsilon\phi = -\varepsilon\phi'' + m\phi' + [g(z+B) - g(B)]z^{-1}\phi.$$

Если $\phi(L) \leq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$, $L_\varepsilon\phi(x) = 0$, то, как нетрудно убедиться, $\phi(x) \leq 0$ при $x \geq L$. Определяя $\phi = z$, получим $u(x) \leq B$. Используя представление производной:

$$u'(x) = -\varepsilon^{-1} \int_x^\infty [g(u(s)) - g(B)] \exp[m\varepsilon^{-1}(x-s)] ds,$$

получим $u'(x) \geq 0$ при $x \geq L$. Случай $u(L) \geq B$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Используя полученное представление производной, несложно показать, что производная решения задачи (9.1) равномерно ограничена.

Лемма 9.3. При всех $x \geq L$

$$|u(x) - B| \leq |u(L) - B| \exp[r_0(x - L)],$$

где r_0 - отрицательный корень уравнения: $-\varepsilon r^2 + mr + \alpha = 0$.

Доказательство. Пусть $z = u - B$. Определим

$$\Psi(x) = |A - B| \exp[r_0 x] \pm z(x).$$

Тогда

$$\Psi(0) \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = 0, \quad L_\varepsilon \Psi(x) \geq 0, \quad 0 < x < \infty.$$

Вследствие принципа максимума, справедливого для дифференциального оператора L_ε , $\Psi(x) \geq 0$, $0 \leq x < \infty$. Это доказывает лемму.

Итак, получена оценка решения задачи (9.1) и его производной при выполнении условий (9.2). В соответствии с [109],[34] решение этой задачи существует и единственно.

Остановимся на вопросе переноса краевого условия из бесконечности в некоторую точку L_0 .

В соответствии с [114] выделим многообразие решений уравнения (9.1a), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности:

$$u'(x) = r_1(u(x) - B) + \gamma(u(x)), \quad (9.3)$$

где r_1 - отрицательный корень уравнения $-\varepsilon r^2 + mr + g'(B) = 0$,

$\gamma(u)$ - решение задачи:

$$\varepsilon \gamma'(u)[r_1(u - B) + \gamma(u)] = \varepsilon r_2 \gamma(u) + g(u) - g'(B)(u - B),$$

$$\gamma(B) = 0, \quad r_1 + r_2 = m\varepsilon^{-1}. \quad (9.4)$$

Задача на $\gamma(u)$ может быть получена, если учесть соотношение (9.3) в (9.1a). Как это следует из [113], решение задачи (9.4) существует и единственно, $\gamma'(B) = 0$. При этом уравнение (9.3) выделяет многообразие решений уравнения (9.1a), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности.

Решение задачи (9.4) ищем в виде асимптотического ряда:

$$\tilde{\gamma}_N(u) = \sum_{n=0}^N \gamma_n(u) \varepsilon^n. \quad (9.5)$$

Перепишем уравнение (9.4) в виде:

$$r_1 \varepsilon \{ \gamma'(u)(u-B) + \gamma(u) \} + \varepsilon \gamma'(u) \gamma(u) = m \gamma(u) + g(u) - g'(B)(u-B). \quad (9.6)$$

Учтем, что

$$r_1 \varepsilon = (m - S(\varepsilon))/2, \quad S(\varepsilon) = \sqrt{m^2 + 2p\varepsilon}, \quad p = 2g'(B),$$

где

$$S(\varepsilon) = m + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{K_i}{i!} p^i m^{1-2i} \varepsilon^i, \quad K_i = \prod_{n=0}^{i-2} (2n+1), \quad K_1 = 6. \quad (9.7)$$

Подставляя (9.5) в (9.6), учитывая (9.7) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε , при всех $n > 0$ получим:

$$\gamma_n = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma'_i \gamma_{n-1-i} + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{1}{2} \frac{K_i}{i!} \frac{\{2g'(B)\}^i}{m^{2i}} \{ \gamma'_{n-i}(u-B) + \gamma_{n-i} \}, \quad (9.8)$$

причем

$$\gamma_0(u) = \frac{g'(B)(u-B) - g(u)}{m}. \quad (9.9)$$

Лемма 9.4. Пусть функция $g(u)$ $(N+1)$ раз непрерывно дифференцируема. Тогда для некоторой постоянной C при всех x

$$|\gamma(u(x)) - \tilde{\gamma}_N(u(x))| \leq C \varepsilon^{N+1},$$

где $u(x)$ – решение задачи (9.1).

Доказательство. Пусть $z(u(x)) = \gamma(u(x)) - \tilde{\gamma}_N(u(x))$. Тогда $z(u(x))$ является решением задачи:

$$\varepsilon \frac{d}{dx} z(u(x)) - \varepsilon r_2 z(u(x)) = F(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} z(u(x)) = 0, \quad (9.10)$$

где $|F(x)| \leq C_0 \varepsilon^{N+1}$. Из (9.10) следует:

$$z(u(x)) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\infty F(s) \exp[r_2(x-s)] ds.$$

Из этого соотношения получим $|z(u(x))| \leq C_0 m^{-1} \varepsilon^{N+1}$. Лемма доказана.

Уравнение (9.3) позволяет редуцировать задачу (9.1) к конечному интервалу:

$$-\varepsilon u'' + m u' + g(u) = 0,$$

$$u(0) = A, \quad u'(L_0) = r_1[u(L_0) - B] + \gamma(u(L_0)). \quad (9.11)$$

Задача (9.11) поставлена на конечном интервале и может быть решена с применением разностной схемы. Функция $\gamma(u)$ из (9.4) может быть найдена приближенно. Исследуем влияние погрешности в задании $\gamma(u(L_0))$ на решение задачи (9.11).

Теорема 9.1. Пусть \tilde{u} - решение задачи (9.11) в случае возмущенной функции $\tilde{\gamma}(v)$. Пусть функция $\tilde{\gamma}(v)$ непрерывно дифференцируема при всех $v \in R$,

$$-r_1 - \tilde{\gamma}'(v) \geq -\beta_0, \quad v \in R, \quad \beta_0 > 0, \quad m - 2\beta_0\varepsilon \geq \eta > 0.$$

Пусть $|\gamma(u(L_0)) - \tilde{\gamma}(u(L_0))| \leq \Delta$. Тогда при всех $x \in [0, L_0]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq 2\Delta\varepsilon\eta^{-1} \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)].$$

Доказательство. Пусть $z = u - \tilde{u}$. Тогда

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + m z' + [g(u) - g(\tilde{u})](u - \tilde{u})^{-1} z = 0,$$

$$z(0) = 0, \quad D_\varepsilon z = z'(L_0) - (r_1 + \tilde{\gamma}'(\theta))z(L_0) = \gamma(u(L_0)) - \tilde{\gamma}(u(L_0)).$$

Можно показать, что если существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $\phi(x)$ такая, что

$$\phi(x) > 0, D_\varepsilon\phi > 0, L_\varepsilon\phi(x) > 0, 0 < x < L_0,$$

то для оператора L_ε справедлив принцип максимума и из условий

$$\Psi(x) \in C^2[0, L_0], L_\varepsilon\Psi(x) \geq 0, 0 < x < L_0, \Psi(0) \geq 0, D_\varepsilon\Psi \geq 0 \quad (9.12)$$

следует $\Psi(x) \geq 0, 0 \leq x \leq L_0$. Чтобы показать это, нужно представить $\Psi(x)$ в виде произведения $\Psi(x) = \phi(x)V(x)$ и тогда сформулированное утверждение следует из рассуждений от противного.

Учитывая ограничения на $\tilde{\gamma}$, убеждаемся, что в качестве $\phi(x)$ можно выбрать $\phi(x) = \exp(m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0))$. Определим

$$\Psi(x) = 2\Delta\varepsilon\eta^{-1} \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)] \pm z(x).$$

При таком задании $\Psi(x)$ выполняются условия (9.12) и поэтому в силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0, x \in [0, L_0]$. Это доказывает теорему.

Лемма 9.5. При всех $x \geq L$ выполнится:

$$|\gamma(u(x))| \leq C \exp[2r_0(x - L)],$$

где r_0 определено в лемме 9.3.

Доказательство. Учитывая (9.3), (9.4), получим:

$$\varepsilon \frac{d}{dx} \gamma(u(x)) - r_2 \varepsilon \gamma(u(x)) = g(u(x)) - g'(B)(u(x) - B).$$

Из этого уравнения следует:

$$\gamma(u(x)) = -\varepsilon^{-1} \int_x^\infty [g(u(s)) - g'(B)(u(s) - B)] \exp[r_2(x - s)] ds.$$

Следовательно,

$$|\gamma(u(x))| \leq \max_{x \geq L} |g''_u(u(x))| (2r_2\varepsilon)^{-1} (u(x) - B)^2, x \geq L.$$

Учитывая значение r_2 и лемму 9.3, получим утверждение леммы.

Остановимся на случае $\tilde{\gamma}(u) = 0$. Правое краевое условие тогда принимает вид:

$$\tilde{u}'(L_0) = r_1[\tilde{u}(L_0) - B].$$

Из теоремы 9.1 и леммы 9.5 при $L_0 \geq L$ получим оценку точности:

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq C\varepsilon \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0) + 2r_0(L_0 - L)].$$

Проведем анализ, какой может быть погрешность, если при задании правого краевого условия при переходе к конечному интервалу не учитывать поведение решения при достаточно больших x , как это делается при расчете ряда практических задач.

Пусть $\tilde{u}'(L_0) = 0$. Нетрудно показать, что при $L_0 > L$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq C\varepsilon \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0) + r_0(L_0 - L)], \quad 0 \leq x \leq L_0.$$

Пусть $\tilde{u}(L_0) = B$. В этом случае при $L_0 > L$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq C \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0) + r_0(L_0 - L)], \quad 0 \leq x \leq L_0.$$

Из приведенного анализа следует, что наибольшая погрешность при переносе краевого условия будет, если задать условие Дирихле (просто заменить бесконечный интервал конечным). При задании условия Неймана точность увеличивается с уменьшением малого параметра. Если использовать приведенный асимптотический алгоритм построения $\gamma(u)$, то согласно лемме 9.4 и теореме 9.1 перенос краевого условия можно осуществить с заданной точностью.

На основании соотношения (9.3) задачу (9.1) можно свести к задаче Коши для уравнения первого порядка:

$$u'(x) - f(u) = 0, \quad u(0) = A, \quad f(u) = r_1(u - B) + \gamma(u). \quad (9.13)$$

Нетрудно показать, что если

$$r_1 + \tilde{\gamma}'(v) \leq -\theta, \quad v \in R, \quad \theta > 0,$$

$\tilde{u}(x)$ – решение задачи (9.13) с возмущенной функцией $\tilde{\gamma}(u)$, то из того, что при всех x $|\gamma(u(x)) - \tilde{\gamma}(u(x))| \leq \Delta$, следует $\|u - \tilde{u}\| \leq \theta^{-1}\Delta$. Если построить $\tilde{\gamma}(u)$ в виде (9.5), то сформулированные выше условия будут выполнены для достаточно малых значений ε , если для некоторого $b > 0$ $g'(v) \geq b, v \in R$. Задача (9.13) не содержит пограничного слоя и для ее решения можно использовать какой-либо из методов решения задачи Коши [16].

Теперь остановимся на случае нелинейного уравнения без первой производной. Рассмотрим случай нелинейной краевой задачи:

$$\varepsilon^2 u''(x) - g(u) = 0, \quad u(0) = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = B. \quad (9.14)$$

Предполагаем достаточную гладкость функции g ,

$$M^2 \geq g'(s) \geq \beta^2, \quad s \in R, \quad M > 0, \quad \beta > 0, \quad g(B) = 0. \quad (9.15)$$

Такая задача может возникнуть, например, при моделировании процесса диффузионного горения [91]. На основании принципа максимума можно убедиться, что $u(x)$ возрастает при $A < B$ и убывает, если $A > B$. Из (9.14) следует:

$$(\varepsilon u'(x))^2 = F(u) = -2 \int_u^B g(s) ds. \quad (9.16)$$

Таким образом,

$$\varepsilon u'(x) = \sqrt{F(u)}, \quad \text{если } A < B, \quad \varepsilon u'(x) = -\sqrt{F(u)}, \quad \text{если } A > B. \quad (9.17)$$

На основании соотношений (9.17) можно перенести краевое условие из бесконечности. Рассмотрим случай $A < B$ (случай $A > B$ аналогичен).

Задача (9.14) на конечном интервале принимает вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u''(x) - g(u) &= 0, \quad 0 < x < L_0, \\ u(0) = A, \quad \varepsilon u'(L_0) + S(u(L_0)) &= 0, \quad S(u) = -\sqrt{F(u)}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Можно показать, что

$$\frac{M^2}{\beta} \geq S'(v) \geq \frac{\beta^2}{M}, \quad v \leq B. \quad (9.19)$$

Пусть \tilde{u} - решение задачи (9.18) в случае возмущенной функции $\tilde{S}(u)$. Пусть $\tilde{S}'(v) \geq \beta_0$, $v \leq B$. Можно показать, что если

$$|\tilde{S}(u(L_0)) - S(u(L_0))| \leq \Delta,$$

то при всех $x \in [0, L_0]$ выполнится $|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \beta_0^{-1} \Delta$. При построении разностной схемы для задачи (9.18) необходимо учитывать, что решение имеет пограничный слой около границы $x = 0$.

Соотношение (9.16) можно использовать для сведения исходной задачи (9.14) к начальной. Для определенности полагаем $A < B$. Тогда начальная задача имеет вид:

$$\varepsilon u'(x) + S(u) = 0, \quad u(0) = A, \quad (9.20)$$

где $S'(v)$ удовлетворяет оценкам (9.19). Решение задачи (9.20) содержит пограничный слой около начальной точки $x = 0$. Для решения такой задачи можно использовать, например, схему из [25].

Нетрудно убедиться, что если \tilde{u} - решение задачи (9.20) в случае возмущенной функции $\tilde{S}(u)$, $\tilde{S}'(v) \geq \beta_0$, $v \leq B$, то из условия

$$|\tilde{S}(u(x)) - S(u(x))| \leq \Delta, \quad 0 \leq x \leq L_0$$

следует $|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \beta_0^{-1} \Delta$, $0 \leq x \leq L_0$.

**§10. Анализ схемы направленных разностей
для редуцированной задачи**

Итак, рассмотренные на полубесконечном интервале задачи сведены к конечному интервалу. Редуцированные задачи можно решить с применением разностной схемы. В данном параграфе показано, что если редуцированная задача не содержит выраженного пограничного слоя (когда только первая производная решения равномерно по ε ограничена), то можно применять схему направленных разностей, которая будет обладать свойством равномерной сходимости. Особенность редуцированной задачи – в нелинейности уравнения и краевого условия. Исследовано влияние погрешностей в краевом условии, возникающих при редукции краевой задачи, на решение разностной схемы.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{aligned} T_\varepsilon u &= -\varepsilon u'' + a(x)u' + f(u, x) = 0, \\ u(0) &= A, \quad R_\varepsilon u = u'(L_0) + \Theta(u(L_0)) = 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Полагаем, что всюду ниже выполнены условия :

$$\begin{aligned} \varepsilon \in (0, 1], \quad a(x) \geq \alpha > 0, \quad \Theta'(V) \geq -\beta_0, \quad V \in R, \quad \alpha - 2\varepsilon\beta_0 \geq \eta > 0, \\ f'_u \geq -\beta, \quad \alpha^2 - 4\delta\varepsilon \geq \sigma > 0, \quad \beta > 0, \quad \beta_0 > 0, \quad \delta = \max\{\beta, \beta_0, \beta_0\alpha\}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Предполагаем, что функции a, f, Θ дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам. Задача (10.1) с условиями (10.2) обобщает задачи (7.20) и (9.11). Остановимся на свойствах решения задачи (10.1).

Докажем, что для двух произвольных дважды непрерывно дифференцируемых функций $p(x)$ и $q(x)$ справедлива оценка:

$$|p(x) - q(x)| \leq S(x) = \exp(2\delta\alpha^{-1}x)[\alpha^2\delta^{-1}\sigma^{-1}\|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + \\ + |p(0) - q(0)|] + 2\varepsilon\eta^{-1}|R_\varepsilon p - R_\varepsilon q| \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)]. \quad (10.3)$$

Введем $z = p - q$. Тогда

$$L_\varepsilon z(x) = -\varepsilon z''(x) + a(x)z'(x) + [f(p, x) - f(q, x)][p - q]^{-1}z = T_\varepsilon p - T_\varepsilon q, \\ z(0) = p(0) - q(0), \quad D_\varepsilon z = z'(L_0) + \tau z(L_0) = R_\varepsilon p - R_\varepsilon q,$$

где $\tau = \Theta'(s)$ для некоторого s между $p(L_0)$ и $q(L_0)$.

Определим $\Psi(x) = S(x) \pm z(x)$. Тогда для $\Psi(x)$ будут выполнены неравенства (2.9) и на основании принципа максимума получим оценку (10.3).

Из оценки (10.3) следует единственность решения задачи (10.1) и оценка:

$$|u(x)| \leq \exp(2\delta\alpha^{-1}x)[\alpha^2\delta^{-1}\sigma^{-1}\|f(0, x)\| + |A|] + \\ + 2\varepsilon\eta^{-1}|\Theta(0)| \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)].$$

Существование решения задачи (10.1) следует из того, что можно построить верхнее и нижнее решения ([34], стр. 39). Оценим производные решения задачи (10.1).

Лемма 10.1. Найдется C такое, что при всех $x \in [0, L_0]$

$$|u^{(j)}(x)| \leq C[1 + \varepsilon^{1-j} \exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_0)]], \quad j = 1, 2, 3. \quad (10.4)$$

Доказательство. Используя (10.1), нетрудно показать:

$$u'(x) = \exp\left[\int_{L_0}^x \varepsilon^{-1}a(s)ds\right] u'(L_0) - \varepsilon^{-1} \int_x^{L_0} f(u(s), s) \exp\left[\int_s^x \varepsilon^{-1}a(s)ds\right] ds. \quad (10.5)$$

Из краевого условия следует $|u'(L_0)| \leq C$. Тогда из (10.5) получим $|u'(x)| \leq C_1$. Докажем (10.4) при $j = 2$. Пусть $p(x) = u'(x)$. Дифференцируя (10.1), получим:

$$-\varepsilon p''(x) + a(x)p'(x) = F(x, u, u'), \quad |F(x, u, u')| \leq C_2.$$

Следовательно,

$$p'(x) = \exp \left[\int_{L_0}^x \varepsilon^{-1} a(s) ds \right] p'(L_0) + \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{L_0} F(s, u(s), u'(s)) \exp \left[\int_s^x \varepsilon^{-1} a(s) ds \right] ds.$$

Из (10.1) получим $|p'(L_0)| \leq C_3 \varepsilon^{-1}$. Теперь из представления для $p'(x)$ следует (10.4) при $j = 2$. Случай $j = 3$ аналогичен. Лемма доказана.

Согласно лемме 10.1 решение задачи (10.1) может иметь слабо выраженный пограничный слой около конца интервала $x = L_0$, когда производные, начиная со второй, неограниченно растут при $\varepsilon \rightarrow 0$. Целесообразно исследовать схему направленных разностей на равномерную сходимость по параметру ε , так как эта схема проще схем с экспоненциальными подгонками. Аналогичный анализ был проведен в §2 при иных предположениях. Итак, на равномерной сетке Ω с шагом h выпишем схему направленных разностей для задачи (10.1):

$$T_n^h u^h = -\varepsilon \Lambda_{xx,n} u^h + a_n \Lambda_{x,n} u^h + f(u_n^h, x_n) = 0,$$

$$u_0^h = A, \quad R_h u^h = \Lambda_{x,N} u^h + \Theta(u_N^h) = 0. \quad (10.6)$$

Для анализа схемы (10.6) рассмотрим линейный оператор:

$$L_n^h z^h = -\varepsilon \Lambda_{xx,n} z^h + a_n \Lambda_{x,n} z^h + b_n z_n^h \quad (10.7)$$

с крайвыми условиями

$$z_0^h, \quad D_h z^h = \tau z_N^h + \Lambda_{x,N} z^h. \quad (10.8)$$

Заметим, что в формулируемой ниже лемме о принципе максимума допускается $\tau < 0$, что случается при переносе краевого условия из бесконечности.

Лемма 10.2. Пусть в (10.7)-(10.8) $\varepsilon > 0$, $a_n \geq 0$. Тогда если $\exists \phi^h$:

$$\phi_n^h > 0, n = 0, 1, \dots, N, \quad L_n^h \phi^h > 0, n = 1, 2, \dots, N-1, \quad D_h \phi^h > 0, \quad (10.9)$$

то для оператора L^h справедлив принцип максимума, и из условий

$$z_0^h \geq 0, \quad D_h z^h \geq 0, \quad L_n^h z^h \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (10.10)$$

следует $z_n^h \geq 0$ при всех $n = 0, 1, \dots, N$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого n_0 $z_{n_0}^h < 0$ и получим противоречие. Определим сеточную функцию V^h : $z_n^h = V_n^h \phi_n^h$. Тогда $V_{n_0}^h < 0$. Покажем, что V^h имеет локальный отрицательный минимум. Из условия $z_0^h \geq 0$ следует $V_0^h \geq 0$. Для z_N^h справедливо одно из двух:

1). $z_N^h \geq 0$. Тогда $V_N^h \geq 0$. При этом V^h имеет локальный отрицательный минимум.

2). $z_N^h < 0$. Из условия $D_h \phi^h > 0$ следует

$$\tau \phi_N^h V_N^h + \frac{\phi_N^h V_N^h - \phi_{N-1}^h V_N^h}{h} < 0.$$

С другой стороны, из условия $D_h z^h \geq 0$ получим

$$\tau \phi_N^h V_N^h + \frac{\phi_N^h V_N^h - \phi_{N-1}^h V_{N-1}^h}{h} \geq 0.$$

Из этих двух неравенств следует $V_N^h > V_{N-1}^h$.

Тогда для V^h выполняются условия: $V_0^h \geq 0$, $0 > V_N^h > V_{N-1}^h$, откуда следует, что V^h имеет локальный отрицательный минимум.

Пусть минимум достигается в узле x_m . Тогда:

$$V_m^h < 0, \quad \Lambda_{x,m} V^h \leq 0, \quad \Lambda_{x,m+1} V^h \geq 0. \quad (10.11)$$

Нетрудно убедиться, что

$$L_m^h z^h = a_m \phi_{m-1}^h \Lambda_{x,m} V^h + V_m^h L_m^h \phi^h - \varepsilon h^{-1} \phi_{m+1}^h \Lambda_{x,m+1} V^h + \varepsilon h^{-1} \phi_{m-1}^h \Lambda_{x,m} V^h.$$

Учитывая условия (10.9) и (10.11), получим $L_m^h z^h < 0$, что противоречит (10.10). Лемма доказана.

Определим сеточные функции ϕ^h , θ^h , ρ^h :

$$\phi_n^h = \left[1 + \frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right]^{n-N}, \quad \theta_n^h = \left[1 + \frac{2\delta h}{\alpha}\right]^n, \quad \rho_n^h = \left[1 + \frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right]^{n+1-N}. \quad (10.12)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\theta_n^h \leq \exp[2\delta\alpha^{-1}x_n], \quad \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x_n - L_0)] \leq \phi_n^h \leq \exp[\alpha(2\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_0)].$$

Лемма 10.3. Пусть $h \leq h_0 = \min\{\sigma/(4\alpha\beta), \eta/(2\alpha\beta_0)\}$, p^h и q^h - две произвольные сеточные функции. Тогда при всех n :

$$\begin{aligned} |p_n^h - q_n^h| &\leq C[|T^h p^h - T^h q^h| + |p_0^h - q_0^h|] \exp(2\delta\alpha^{-1}x_n) + \\ &+ (4\varepsilon + 2\alpha h)\eta^{-1}|R_h p^h - R_h q^h| \exp[\alpha(2\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_0)]. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Доказательство. Определим $z^h = p^h - q^h$. Тогда :

$$L^h z^h = T^h p^h - T^h q^h, \quad z_0^h = p_0^h - q_0^h, \quad D_h z^h = R_h p^h - R_h q^h, \quad (10.14)$$

где L^h соответствует (10.7) с $b_n = [f(p_n^h, x_n) - f(q_n^h, x_n)]/(p_n^h - q_n^h)$,

D_h - линейный оператор:

$$D_h z^h = [\Theta(p_N^h) - \Theta(q_N^h)][p_N^h - q_N^h]^{-1} z_N^h + \Lambda_{x,N} z^h.$$

Учитывая ограничение $h \leq h_0$, получим при всех n :

$$\begin{aligned} L_n^h \phi^h &\geq \sigma[8\varepsilon + 4\alpha h]^{-1} \phi_n^h, \quad L_n^h \theta^h \geq \delta\sigma[2\alpha^2 + 4\delta\alpha h]^{-1} \theta_n^h, \\ D_h \phi^h &\geq \eta[4\varepsilon + 2\alpha h]^{-1}, \quad D_h \theta^h \geq 0. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Учитывая (10.15) и лемму 9.2, получим, что для оператора L^h справедлив принцип максимума. Определим Ψ^h :

$$\Psi^h = C\{\|T^h p^h - T^h q^h\| + |p_0^h - q_0^h|\}\theta^h + (4\varepsilon + 2\alpha h)\eta^{-1}|R_h p^h - R_h q^h|\phi^h \pm z^h.$$

Учитывая (10.14)-(10.15), можно подобрать C таким образом, чтобы для функции Ψ^h выполнились условия (10.10). Тогда из принципа максимума следует утверждение леммы.

Из (10.13) следуют единственность решения схемы (10.6) и оценка устойчивости:

$$|u_n^h| \leq C_1[\|f(0, x)\| + |A|] \exp\left[\frac{2\delta}{\alpha}x_n\right] + C_2|\Theta(0)|(\varepsilon + h) \exp\left[\frac{\alpha(x_n - L_0)}{2\varepsilon + \alpha h}\right]. \quad (10.16)$$

Существование решения схемы (10.6) следует из наличия верхнего и нижнего решений. Исследуем вопрос равномерной сходимости схемы (10.6).

Теорема 10.1. Пусть $h \leq h_0$, где h_0 определено в лемме 9.3. Найдется C :

$$\|[u]_\Omega - u^h\| \leq Ch, \quad (10.17)$$

где $[u]_\Omega$ - решение задачи (10.1) в узлах сетки Ω .

Доказательство. Определим $z^h = u^h - [u]_\Omega$. Тогда

$$L^h z^h = T^h u^h - T^h [u]_\Omega, \quad (10.18)$$

где L^h соответствует (10.7) при $b_n = [f(u_n^h, x_n) - f(u_n, x_n)]/(u_n^h - u_n)$, $u_n = u(x_n)$. Оценим правую часть (10.18) :

$$T_n^h u^h - T_n^h [u]_\Omega = \varepsilon(u''(x_n) - \Lambda_{xx,n}[u]_\Omega) - a_n(u'(x_n) - \Lambda_{x,n}[u]_\Omega).$$

Используя неравенства [181]:

$$|\Lambda_{xx,n}[u]_\Omega - u''(x_n)| \leq \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |u'''(s)| ds, \quad (10.19)$$

$$|\Lambda_{x,n}[u]_{\Omega} - u'(x_n)| \leq h^{-1} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_s^{x_n} |u''(t)| dt ds, \quad (10.20)$$

и привлекая оценки производных (10.4), получим :

$$|T_n^h u^h - T_n^h[u]_{\Omega}| \leq C_1 h [1 + \theta^{-1} \exp(\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x_{n+1} - L_0))], \quad (10.21)$$

где $\theta = \max(h, \varepsilon)$ Определим Ψ^h :

$$\Psi^h = [C_2 \theta^h + C_3 \rho^h] h \pm z^h.$$

Учитывая, что

$$D_h z^h = \frac{\Theta(u_N^h) - \Theta(u_N)}{u_N^h - u_N} z_N^h + \Lambda_{x,N} z^h = u'_N - \Lambda_{x,N}[u]_{\Omega}$$

и используя соотношения (10.4) и (10.20) , получим

$$|D_h z^h| \leq C_4 h \theta^{-1}. \quad (10.22)$$

Учитывая, что

$$L_n^h \rho^h \geq C_5 \theta^{-1} \rho_n^h, \quad \rho_n^h \geq \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x_{n+1} - L_0)]$$

и привлекая соотношения (10.15) и (10.18), получим, что при некоторых C_2 и C_3 для Ψ^h выполняются неравенства (10.10). В соответствии с принципом максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает $|z_n^h| \leq Ch$ при всех n , кроме случая $n = N$. Остается показать, что $|z_N^h| \leq Ch$. Для этого случая имеем:

$$|z_N^h| \leq |u_N - u_{N-1}| + |u_{N-1} - u_{N-1}^h| + |u_N^h - u_{N-1}^h|.$$

Из краевого условия в (10.6) получим $|u_N^h - u_{N-1}^h| \leq C_6 h$. Пользуясь полученной оценкой для $n < N$, придем к утверждению теоремы.

Схема (10.6) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений. Покажем, что при достаточно хорошем начальном

приближении метод Ньютона является сходящимся, причем сходимость метода равномерна по параметру ε . Итак, определим метод линеаризации :

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon \Lambda_{xx,n} u^{j+1} + a_n \Lambda_{x,n} u^{j+1} + f'_u(u_n^j, x_n) u_n^{j+1} &= f'_u(u_n^j, x_n) u_n^j - f(u_n^j, x_n), \\
 u_0^{j+1} = A, \quad \Theta'(u_N^j) u_N^{j+1} + \Lambda_{x,N} u^{j+1} &= -\Theta(u_N^j) + \Theta'(u_N^j) u_N^j. \quad (10.23)
 \end{aligned}$$

Сеточная функция u^0 предполагается заданной. Определим $z^j = u^h - u^j$.

Тогда

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon \Lambda_{xx,n} z^{j+1} + a_n \Lambda_{x,n} z^{j+1} + f'_u(u_n^j, x_n) z_n^{j+1} &= 0.5 f''_u(\theta_n^j, x_n) (z_n^j)^2, \\
 z_0^{j+1} = 0, \quad \Theta'(u_N^j) z_N^{j+1} + \Lambda_{x,N} z^{j+1} &= -\Theta''(\theta_N^j) (z_N^j)^2 / 2
 \end{aligned}$$

для некоторой сеточной функции θ^j . Пользуясь принципом максимума, нетрудно получить:

$$\|z^{j+1}\| \leq C \|z^j\|^2.$$

Следовательно, при достаточно хорошем начальном приближении итерационный метод (10.23) квадратично сходится.

На каждой итерации система уравнений линейна относительно u^{j+1} , но матрица этой системы, в силу допустимости $f'_u < 0$, может не иметь диагонального преобладания. Для нахождения решения такой системы можно использовать метод немонотонной прогонки [147].

При переносе краевого условия из бесконечности функция $\Theta(u)$ вычисляется приближенно. Покажем, что схема (10.6) устойчива к погрешностям в Θ .

Лемма 9.4. Пусть функция $\tilde{\Theta}(V)$ непрерывно дифференцируема при $V \in R$, причем $\tilde{\Theta}'(V) \geq -\beta_0$. Пусть \tilde{u}^h - решение схемы (10.6) с возмущенной функцией $\tilde{\Theta}$. Тогда если $|\Theta(u_N^h) - \tilde{\Theta}(u_N^h)| \leq \Delta$, то при

всех $x_n \in \Omega$

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq \Delta \eta^{-1} (4\varepsilon + 2\alpha h) \exp[\alpha(2\varepsilon + \alpha h)^{-1} (x_n - L_0)]. \quad (10.24)$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда

$$L_n^h z^h = 0, \quad z_0^h = 0, \quad D_h z^h = \frac{z_N^h - z_{N-1}^h}{h} + \frac{\tilde{\Theta}(u_N^h) - \tilde{\Theta}(\tilde{u}_N^h)}{u_N^h - \tilde{u}_N^h} z_N^h = \tilde{\Theta}(u_N^h) - \Theta(u_N^h),$$

где L^h соответствует (10.7) с $b_n = [f(u_n^h, x_n) - f(\tilde{u}_n^h, x_n)] / (u_n^h - \tilde{u}_n^h)$.

Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_n^h = \Delta \eta^{-1} (4\varepsilon + 2\alpha h) \phi_n^h \pm z_n^h.$$

Тогда для функции Ψ^h выполняются соотношения (10.10) и вследствие принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Из этого следует утверждение леммы.

Остановимся на результатах численных экспериментов.

Сначала была рассмотрена линейная краевая задача:

$$-\varepsilon u''(x) + u'(x) + u(x) - 1 = 0, \quad u(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 1. \quad (10.25)$$

Решение этой задачи выписывалось в явном виде и сравнивалось с решением этого уравнения на конечном интервале при различных подходах к заданию правого краевого условия. Вычислялась максимальная погрешность, возникающая при переходе к конечному интервалу.

В табл.10.1 приведена норма погрешности в зависимости от ε и длины интервала L_0 при задании $u(L_0) = 1$.

В табл.10.2 приведена норма погрешности при задании $u'(L_0) = 0$. Задание правого краевого условия согласно (7.2) с выбором $\gamma(x) = r$, где r соответствует (7.3), приводит к совпадению решения задачи на конечном интервале с решением задачи (10.25).

Теперь остановимся на случае нелинейной краевой задачи. Сначала была рассмотрена нелинейная краевая задача:

$$-\varepsilon u'' + u' + u \exp(u) = 0, \quad u(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0. \quad (10.26)$$

Таблица 10.1.

ε	L_0			
	1	5	10	20
1.0	1.62	0.14	0.62E-2	0.13E-4
1.0E-1	1.20	0.03	0.31E-3	0.33E-7
1.0E-2	1.11	0.02	0.15E-3	0.75E-8
1.0E-3	1.10	0.02	0.14E-3	0.63E-8
1.0E-4	1.10	0.02	0.14E-3	0.62E-8

Таблица 10.2

ε	L_0			
	1	5	10	20
1.0	0.53	0.52E-1	0.23E-2	0.49E-5
1.0E-1	1.0E-1	0.26E-2	0.26E-4	0.28E-8
1.0E-2	1.1E-2	0.21E-3	0.15E-5	0.74E-10
1.0E-3	1.1E-3	0.20E-4	0.14E-6	0.63E-11
1.0E-4	1.1E-4	0.20E-5	0.14E-7	0.62E-12

Задача (10.26) сводилась к конечному интервалу и для решения редуцированной задачи применялась схема направленных разностей.

Численно исследовалось влияние способа задания краевого условия на решение разностной схемы. Шаг разностной сетки принимался постоянным ($h = 0.1$) и за сеточное решение, не искаженное из-за переноса краевого условия из бесконечности, принималось решение на достаточно большом интервале длины L , $L = 100$, при этом $|u(100)|, |u'(100)| < \exp(-50)$. Рассматривались различные способы задания краевого условия:

$M1 : u(L_0) = 0$; $M2 : u'(L_0) = 0$; $M3$: согласно (9.3) с $\gamma(u) = 0$;

$M4$: согласно (9.3) с $\gamma(u)$, соответствующим (9.9).

Схема (10.6) представляет собой систему нелинейных уравнений и для нахождения ее решения использовался модифицированный метод Пикара:

$$-\varepsilon \Lambda_{xx,n} u^{j+1} + a_n \Lambda_{x,n} u^{j+1} + G u_n^{j+1} = G u_n^j - f(u_n^j, x_n),$$

$$u_0^{j+1} = A, \quad \Lambda_{x,N} u^{j+1} + G u_N^{j+1} = G u_N^j - \Theta(u_N^j).$$

При $G \geq 5$ итерационный метод сходился. Итерации заканчивались, если $\|u^{j+1} - u^j\| \leq 10^{-12}$. В табл. 10.3 приведена норма погрешности в зависимости от способа задания краевого условия и длины интервала при $\varepsilon = 1$, в табл. 10.4 - при $\varepsilon = 0.1$. Под погрешностью понимается разность между сеточным решением на данном интервале и на интервале длины $L = 100$. При других ε результаты вычислений аналогичны: точность способов $M2 - M4$ увеличивается с уменьшением $(\varepsilon + h)$ и с увеличением длины интервала, и согласуется с оценкой (10.24). Наименее точен способ $M1$. Более точен способ $M4$. Нелинейность в краевом условии для способа $M4$ не увеличивала количество итераций.

Таблица 10.3.

L_0	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$
1	0.42	0.16	0.29E-1	0.17E-1
5	0.30E-1	0.13E-1	0.31E-3	0.41E-4
10	0.14E-2	0.61E-3	0.74E-5	0.68E-5

Таблица 10.4.

L_0	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$
1	0.26	0.54E-1	0.99E-2	0.12E-2
5	0.64E-2	0.11E-2	0.11E-4	0.54E-5
10	0.78E-4	0.13E-4	0.75E-7	0.74E-7

Затем аналогичным образом была рассмотрена краевая задача:

$$-\varepsilon u'' + u' + (u - 2) \exp(-u^{-1}) = 0, \quad u(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 2. \quad (10.27)$$

Начальное приближение для итерационного метода при всех вычислениях задавалось в виде прямой линии между значениями решения на концах интервала.

В табл. 10.5 приведена норма погрешности в случае задачи (10.27) при $L_0 = 1$ в зависимости от способа задания краевого условия и значения ε .

Таблица 10.5.

ε	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$
1.0	0.71	0.17	0.23E-1	0.17E-1
1.0E-1	0.66	0.59E-1	0.13E-1	0.14E-2
1.0E-2	0.66	0.34E-1	0.87E-2	0.98E-4
1.0E-3	0.66	0.31E-1	0.82E-2	0.88E-5

§11. Монотонная схема Самарского в случае
третьей краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u'' - a(x)u' - f(x, u) = 0, \quad (11.1)$$

$$u(0) = A, \quad R_\varepsilon u = \eta u(1) + \delta u'(1) = B. \quad (11.2)$$

Предполагаем, что

$$a \in C^2[0, 1], \quad f \in C^2([0, 1] \times R), \quad a(x) \geq \alpha > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1],$$
$$\partial f / \partial u \geq -\beta, \quad \beta > 0, \quad \alpha^2 - 4\beta\varepsilon \geq \gamma > 0, \quad \eta \geq 0, \quad \delta > 0. \quad (11.3)$$

Решение задачи (11.1)-(11.2) не содержит выраженного пограничного слоя (первая производная решения ограничена равномерно по параметру ε). Для ее численного решения исследуем монотонную схему Самарского [145], которая монотонна и второго порядка аппроксимации. Применим способ аппроксимации краевого условия, соответствующий порядку аппроксимации дифференциального уравнения. При такой аппроксимации краевого условия матрица разностной схемы потеряет свойство диагонального преобладания. Покажем, что все же к разностному оператору и в этом случае можно применять принцип максимума. Докажем, что анализируемая схема имеет точность $O(h^2/(h + \varepsilon))$. Затем применим эту схему к решению уравнения на полубесконечном интервале. Будет показано, что схема устойчива к погрешностям, возникающим при переносе краевого условия из бесконечности. Предварительно исследуем, когда выполняется принцип максимума для трехточечного разностного оператора с краевым условием, соответствующим аппроксимации производной со вторым порядком.

Анализ монотонности трехточечных разностных схем. Рассмотрим трехточечную разностную схему:

$$L_n^h u^h = A_n u_{n+1}^h - B_n u_n^h + C_n u_{n-1}^h = f_n^h, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (11.4)$$

$$u_0^h = A, \quad R^h u^h = \eta u_N^h + \delta[3u_N^h - 4u_{N-1}^h + u_{N-2}^h]/(2h) = B. \quad (11.5)$$

Предполагаем, что при всех n $A_n > 0$, $C_n > 0$. Сформулируем условие, когда для схемы (11.4)-(11.5) справедлив принцип максимума.

Лемма 11.1. Пусть существует сеточная функция ϕ^h :

$$\phi^h > 0, \quad L_n^h \phi^h < 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\frac{A_{N-1}}{C_{N-1}} \phi_N^h - 4\phi_{N-1}^h + \phi_{N-2}^h \leq 0, \quad 3\phi_N^h - 4\phi_{N-1}^h + \phi_{N-2}^h > 0. \quad (11.6)$$

Тогда из условий

$$L_n^h \Psi^h \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad \Psi_0^h \geq 0, \quad R^h \Psi^h \geq 0 \quad (11.7)$$

следует $\Psi_n^h \geq 0$, $0 \leq n < N$.

Доказательство. Предположим, что при некотором $n < N$ оказалось $\Psi_n^h < 0$ и получим противоречие. Определим V^h : $\Psi_n^h = \phi_n^h V_n^h$.

Пусть

$$V_{n_0}^h = \min_{n < N} V_n^h, \quad V_{n_0}^h < 0.$$

Предположим, что $n_0 = N-1$. Нетрудно показать, что при всех n

$$L_n^h \Psi^h = C_n \phi_{n-1}^h V_{n-1}^h - [-L_n^h \phi^h + C_n \phi_{n-1}^h + A_n \phi_{n+1}^h] V_n^h + A_n \phi_{n+1}^h V_{n+1}^h. \quad (11.8)$$

Учитывая условия (11.6), получим:

$$C_{N-1} \phi_{N-2}^h (V_{N-2}^h - V_{N-1}^h) + A_{N-1} \phi_N^h (V_N^h - V_{N-1}^h) < 0. \quad (11.9)$$

Если $V_{N-1}^h \leq V_N^h$, то в узле с координатой $(N-1)$ — локальный отрицательный минимум сеточной функции V^h . В соответствии с (11.8) будет $L_{N-1}^h \Psi^h > 0$, что противоречит условиям (11.7).

Остается рассмотреть случай $V_{N-1}^h > V_N^h$. Из (11.6)-(11.7) следует:

$$3\phi_N^h V_N^h - 4\phi_{N-1}^h V_N^h + \phi_{N-2}^h V_N^h < 0, \quad 3\phi_N^h V_N^h - 4\phi_{N-1}^h V_{N-1}^h + \phi_{N-2}^h V_{N-2}^h \geq 0,$$

следовательно,

$$4\phi_{N-1}^h (V_N^h - V_{N-1}^h) + \phi_{N-2}^h (V_{N-2}^h - V_N^h) > 0.$$

Это неравенство можно записать в виде:

$$(4\phi_{N-1}^h - \phi_{N-2}^h)(V_N^h - V_{N-1}^h) + \phi_{N-2}^h (V_{N-2}^h - V_{N-1}^h) > 0. \quad (11.10)$$

Из (11.9)-(11.10) получим:

$$(V_{N-2}^h - V_{N-1}^h)[A_{N-1}\phi_N^h - C_{N-1}(4\phi_{N-1}^h - \phi_{N-2}^h)] > 0.$$

Учитывая, что в данном случае $V_{N-1}^h > V_N^h$, получим противоречие с условиями (11.6). Лемма доказана.

Лемма 11.2. Пусть для некоторой сеточной функции ϕ^h выполнены условия (11.6). Тогда для произвольной сеточной функции v^h при всех $n < N$ справедлива оценка:

$$|v_n^h| \leq M\phi_n^h, \quad M = \max \left\{ \max_n \left| \frac{L_n^h v^h}{L_n^h \phi^h} \right|, \frac{|R^h v^h|}{R^h \phi^h}, \frac{|v_0^h|}{\phi_0^h} \right\}.$$

Доказательство. Определим сеточную функцию Ψ^h : $\Psi_n^h = M\phi_n^h \pm v_n^h$.

Тогда, как нетрудно убедиться, для Ψ^h выполняются соотношения (11.7) и в силу леммы 11.1 $\Psi^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Анализ монотонной схемы Самарского. Для задачи (11.1)-(11.2) на равномерной сетке Ω выпишем разностную схему:

$$T_n^h u^h = \varepsilon_n \Lambda_{xx,n} u^h - a_n \Lambda_{x,n} u^h - f(x_n, u_n^h) = 0, \quad (11.11)$$

$$u_0^h = A, \quad R^h u^h = \eta u_N^h + \delta[3u_N^h - 4u_{N-1}^h + u_{N-2}^h]/(2h) = B, \quad (11.12)$$

где $n = 1, 2, \dots, N-1$, $a_n = a(x_n)$,

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{1 + a_n h / (2\varepsilon)}.$$

Лемма 11.3. Пусть $\partial f / \partial u \geq 0$, p^h и q^h - две произвольные сеточные функции. Тогда при всех n

$$\begin{aligned} |p_n^h - q_n^h| &\leq \alpha^{-1} \|T^h p^h - T^h q^h\| + |p_0^h - q_0^h| + \\ &+ \delta^{-1} \alpha^{-1} (\varepsilon + \alpha h) |R^h p^h - R^h q^h| \exp[\alpha(\varepsilon + \alpha h)^{-1} (x_n - 1)]. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $z^h = p^h - q^h$. Из (11.11)-(11.12) получим:

$$L_n^h z^h = \varepsilon_n \Lambda_{xx,n} z^h - a_n \Lambda_{x,n} z^h - \frac{f(x_n, p_n^h) - f(x_n, q_n^h)}{p_n^h - q_n^h} z_n^h = T_n^h p^h - T_n^h q^h,$$

$$z_0^h = p_0^h - q_0^h, \quad R^h z^h = R^h p^h - R^h q^h, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Покажем, что при выполнении условий леммы для оператора L^h справедлив принцип максимума. Определим

$$\phi_n^h = (1 + \varepsilon^{-1} \alpha h)^{n-N}.$$

Докажем, что для функции ϕ^h справедливы соотношения (11.6). Нетрудно убедиться, что $L_n^h \phi^h < 0$. Остановимся на проверке остальных условий. Имеем:

$$\frac{C_{N-1}}{A_{N-1}} > 1 + \frac{\alpha h}{\varepsilon}, \quad 3\phi_N^h - 4\phi_{N-1}^h + \phi_{N-2}^h > \frac{2\alpha h}{\varepsilon + \alpha h} > 0,$$

откуда следует (11.6).

Итак, принцип максимума для L^h имеет место. Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_n^h = \alpha^{-1} \|T^h p^h - T^h q^h\| x_n + |p_0^h - q_0^h| + \alpha^{-1} \delta^{-1} (\varepsilon + \alpha h) |R^h p^h - R^h q^h| \phi_n^h \pm z_n^h.$$

Тогда для функции Ψ^h выполнены условия (11.7) и в силу принципа максимума $\Psi^h \geq 0$. Можно показать:

$$\phi_n^h \leq \exp[\alpha(\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - 1)].$$

Это доказывает лемму.

Из леммы 11.3 следует единственность решения схемы (11.11)-(11.12) и оценка устойчивости:

$$\|u^h\| \leq \alpha^{-1} \max_n |f(x_n, 0)| + |A| + \alpha^{-1} \delta^{-1} (\varepsilon + \alpha h) |B|.$$

Исследуем устойчивость решения схемы (11.11)-(11.12) к возмущению коэффициентов в краевых условиях. От (11.11)-(11.12) перейдем к краевой задаче:

$$T_n^h \tilde{u}^h = 0, \tilde{u}_0^h = \tilde{A}, \tilde{R}^h \tilde{u}^h = \tilde{\eta} \tilde{u}_N^h + \tilde{\delta} [3\tilde{u}_N^h - 4\tilde{u}_{N-1}^h + \tilde{u}_{N-2}^h] / (2h) = \tilde{B}.$$

Лемма 11.4. Пусть $\partial f / \partial u \geq 0$,

$$|\delta - \tilde{\delta}| \leq \Delta, |\eta - \tilde{\eta}| \leq \Delta, |B - \tilde{B}| \leq \Delta, \tilde{\eta} \geq 0, \tilde{\delta} > 0,$$

тогда найдется C , такое, что при всех n

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq C \Delta (\varepsilon + \alpha h) \exp[\alpha(\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - 1)] + |A - \tilde{A}|.$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда для некоторой сеточной функции θ^h

$$\varepsilon_n \Lambda_{xx,n} z^h - a_n \Lambda_{x,n} z^h - \frac{\partial}{\partial u} f(x_n, \theta_n^h) z_n^h = 0, \quad a_n = a(x_n),$$

$$z_0^h = A - \tilde{A}, \tilde{R}^h z^h = B - \tilde{B} + (\eta - \tilde{\eta}) u_N^h + (\delta - \tilde{\delta}) [3u_N^h - 4u_{N-1}^h + u_{N-2}^h] / (2h).$$

Нетрудно показать, что

$$|\tilde{R}^h z^h| \leq C_0 \Delta, \quad C_0 = 1 + |B| \delta^{-1} + (\delta^{-1} \eta + 1) \|u^h\|.$$

Задавая сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_n^h = C\Delta(\varepsilon + \alpha h)(1 + \alpha\varepsilon^{-1}h)^{n-N} + |A - \tilde{A}| \pm z_n^h,$$

используя принцип максимума и подбирая подходящую постоянную C , приходим к утверждению леммы.

Оценим погрешность, возникающую при аппроксимации правого краевого условия согласно (11.12).

Лемма 11.5. Найдется C :

$$I = \left| \frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{2h} - u'(1) \right| \leq C \frac{h^2}{\theta^2}, \quad (11.13)$$

где $u_n = u(x_n)$, $\theta = \max(h, \varepsilon)$.

Доказательство. Учитывая, что для произвольной достаточно гладкой функции $r(x)$ справедливо представление:

$$r(x) = r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - s)r''(s)ds,$$

используя интегрирование по частям, получим:

$$I = \frac{1}{2h} \left| 2 \int_{x_{N-1}}^{x_N} (s - x_{N-1})^2 u'''(s) ds - 0.5 \int_{x_{N-2}}^{x_N} (s - x_{N-2})^2 u'''(s) ds \right|.$$

Следовательно,

$$I \leq S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \frac{1}{h} \left| \int_{x_{N-1}}^{x_N} [(s - x_{N-1})^2 - (s - x_{N-2})^2/4] u'''(s) ds \right|,$$

$$S_2 = \frac{1}{4h} \left| \int_{x_{N-2}}^{x_{N-1}} (s - x_{N-2})^2 u'''(s) ds \right|.$$

Можно показать, что

$$S_1 = \frac{1}{4h} \left| \int_{1-h}^1 [3(s-1)^2 + 4h(s-1)] u'''(s) ds \right|. \quad (11.14)$$

Для решения задачи (11.11)-(11.12), как это показывалось выше, справедливы оценки:

$$\left| \frac{d^j}{dx^j} u(x) \right| \leq C[1 + \varepsilon^{1-j} \exp[\alpha \varepsilon^{-1}(x-1)]], \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (11.15)$$

Учитывая, что в (11.14) множитель при $u'''(s)$ знакопостоянен, подставляя оценку (11.15) в (11.14) и осуществляя интегрирование, несложно показать:

$$S_1 \leq C_1 h^2 / \theta^2.$$

Можно доказать, что аналогичная оценка справедлива для S_2 . Это доказывает лемму.

Остановимся на вопросе равномерной сходимости схемы (11.11)-(11.12).

Теорема 11.1. Пусть $\partial f / \partial u \geq 0$, Тогда для решения схемы (11.11)-(11.12) справедлива оценка точности:

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq C \frac{h^2}{h + \varepsilon}. \quad (11.16)$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - [u]_\Omega$. Для некоторого θ^h

$$L_n^h z^h = \varepsilon_n \Lambda_{xx,n} z^h - a_n \Lambda_{x,n} z^h - \frac{\partial}{\partial u} f(x_n, \theta_n^h) z_n^h = T_n^h u^h - T_n^h [u]_\Omega,$$

$$z_0^h = 0, \quad R^h z^h = \delta(u'(1) - [3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}] / (2h)), \quad u_n = u(x_n). \quad (11.17)$$

По аналогии с линейным случаем [181], несложно убедиться, что для некоторой постоянной C_1 справедлива оценка:

$$|T_n^h [u]_\Omega - T_n^h u^h| \leq \frac{C_1 h}{h + \varepsilon} \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} [\varepsilon^2 |u^{(4)}(x)| + \varepsilon |u^{(3)}(x)| + |u^{(2)}(x)|] dx. \quad (11.18)$$

Учитывая (11.15), из (11.18) получим:

$$|T_n^h [u]_\Omega - T_n^h u^h| \leq C_2 \frac{h^2}{h + \varepsilon} [1 + \theta^{-1} \exp[\alpha \varepsilon^{-1}(x_{n+1} - 1)]]. \quad (11.19)$$

Пусть сеточные функции ϕ^h, ρ^h соответствуют (10.12). Тогда

$$L_n^h \phi^h \leq 0, \quad L_n^h \rho^h \leq -\frac{0.5\alpha^2}{2\varepsilon + \alpha h} \rho_n^h, \quad \rho_n^h \geq \exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x_{n+1} - 1)], \quad (11.20)$$

$$R^h \phi^h \geq \delta\alpha/(2\varepsilon + \alpha h), \quad R^h \rho^h \geq 0. \quad (11.21)$$

Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_n^h = C_3 h^2 \theta^{-1} (\phi_n^h + \rho_n^h + x_n) \pm z_n^h.$$

Учитывая лемму 11.5, соотношения (11.17), (11.19)-(11.21), можно показать, что для некоторой постоянной C_3 для функции Ψ^h выполняются условия (11.7). В силу принципа максимума $\Psi^h \geq 0$. Следовательно, при всех $n < N$

$$|u_n^h - u_n| \leq C \frac{h^2}{h + \varepsilon}.$$

Покажем, что такая же оценка имеет место при $n = N$. Учитывая (11.13), несложно показать:

$$\left| \eta z_N^h + \delta \frac{3z_N^h - 4z_{N-1}^h + z_{N-2}^h}{2h} \right| \leq C \frac{h^2}{\theta^2}.$$

Из этого неравенства следует требуемое при $n = N$. Теорема доказана.

Остановимся теперь на случае, когда производная $\partial f / \partial u$ может быть отрицательной.

Лемма 11.6. Пусть выполнены ограничения (11.3),

$$\alpha^2 - 4\beta(\varepsilon + \alpha h/2) \geq \gamma > 0, \quad (11.22)$$

Пусть p^h и q^h - две произвольные сеточные функции. Тогда при всех n

$$\begin{aligned} |p_n^h - q_n^h| \leq & [2\alpha^2\beta^{-1}\gamma^{-1} \|T^h p^h - T^h q^h\| + |p_0^h - q_0^h|] \exp(2\beta\alpha^{-1}x_n) + \\ & + \delta^{-1}\alpha^{-1}(2\varepsilon + \alpha h) |R^h p^h - R^h q^h| \exp[\alpha(2\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - 1)]. \end{aligned}$$

Доказательство. Определим линейный оператор L^h таким же образом, как и в лемме 11.3. Покажем, что при выполнении условий леммы для оператора L^h справедлив принцип максимума. Определим ϕ^h согласно (11.20), $s_n^h = [1 + 2\beta h\alpha^{-1}]^n$. Тогда при всех n :

$$\begin{aligned} L_n^h \phi^h &\leq -\gamma(4\varepsilon + 2\alpha h)^{-1} \phi_n^h < 0, \quad L_n^h s^h \leq -0.5\beta\gamma\alpha^{-2} s_n^h, \\ s_n^h &\leq \exp[2\beta\alpha^{-1}x_n], \quad R^h s^h \geq 0, \quad R^h \phi^h \geq \delta\alpha[2\varepsilon + \alpha h]^{-1}. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Условия (11.6) при наложенных ограничениях выполнены и для оператора L^h справедлив принцип максимума. Определим функцию Ψ^h :

$$\begin{aligned} \Psi_n^h &= [2\alpha^2\beta^{-1}\gamma^{-1}\|T^h p^h - T^h q^h\| + |p_0^h - q_0^h|]s_n^h + \\ &+ \delta^{-1}\alpha^{-1}(2\varepsilon + \alpha h)|R^h p^h - R^h q^h|\phi_n^h \pm (p_n^h - q_n^h). \end{aligned}$$

Учитывая (11.23), несложно показать, что для функции Ψ^h справедливы соотношения (11.7) и в силу принципа максимума, имеющего место согласно лемме 10.1, $\Psi^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Остановимся на вопросе обоснования сходимости схемы (11.1)-(11.2) в случае выполнения ограничений (11.3).

Теорема 11.2. Пусть выполнены ограничения (11.3), причем шаг сетки удовлетворяет ограничению (11.22). Тогда для решения схемы (11.11)-(11.12) справедлива оценка точности:

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq C \frac{h^2}{h + \varepsilon}.$$

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 10.1, сеточная функция Ψ^h при этом имеет вид:

$$\Psi_n^h = Ch^2\theta^{-1}(\phi_n^h + \rho_n^h + s_n^h) \pm z_n^h.$$

Остановимся на вопросе нахождения решения схемы (11.1)-(11.2). Аппроксимация производной в краевом условии (11.2) нарушает трехдиагональность матрицы системы разностных уравнений. Учитывая (11.1) при $n = N - 1$, исключим u_{N-2}^h в (2.2). Тогда правое краевое условие в (11.2) примет вид:

$$2h\delta^{-1}\eta u_N^h + (3 - A_{N-1}C_{N-1}^{-1})(u_N^h - u_{N-1}^h) = 2h\delta^{-1}B - f(x_{N-1}, u_{N-1}^h)C_{N-1}^{-1}.$$

Определим итерационный метод для нахождения решения схемы (11.1)-(11.2):

$$\begin{aligned} \tilde{L}_n^h u^{k+1} &= \varepsilon_n \Lambda_{xx,n} u^{k+1} - a_n \Lambda_{x,n} u^{k+1} - M u_n^{k+1} = f(x_n, u_n^k) - M u_n^k, \quad u_0^{k+1} = A, \\ \tilde{R}^h u^{k+1} &= 2h\delta^{-1}\eta u_N^{k+1} + (3 - A_{N-1}C_{N-1}^{-1})(u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}) + \\ &+ M C_{N-1}^{-1} u_{N-1}^{k+1} = 2h\delta^{-1}B + C_{N-1}^{-1}(M u_{N-1}^k - f(x_{N-1}, u_{N-1}^k)). \end{aligned} \quad (11.24)$$

Лемма 11.7. Пусть

$$m \leq \frac{\partial f}{\partial u} \leq M.$$

Тогда метод (11.24) сходится и при всех k справедлива оценка:

$$\|u^{k+1} - u^h\| \leq (1 - m/M) \|u^k - u^h\|.$$

Доказательство. Определим $z^k = u^k - u^h$. Тогда для некоторой сеточной функции θ^k :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \Lambda_{xx,n} z^{k+1} - a_n \Lambda_{x,n} z^{k+1} - M z_n^{k+1} &= (f'_u(x_n, \theta_n^k) - M) z_n^k, \quad z_0^{k+1} = 0, \\ 2h\delta^{-1}\eta z_N^{k+1} + (3 - A_{N-1}C_{N-1}^{-1})(z_N^{k+1} - z_{N-1}^{k+1}) &+ M C_{N-1}^{-1} z_{N-1}^{k+1} = \\ &= C_{N-1}^{-1}(M - f'_u(x_{N-1}, \theta_{N-1}^k)) z_{N-1}^k. \end{aligned}$$

Выбирая сеточную функцию Ψ^h с компонентами:

$$\Psi_n^h = (1 - m/M) \|z^k\| \pm z_n^{k+1},$$

убеждаемся, что

$$\tilde{L}_n^h \Psi^h \leq 0, \quad \tilde{R}^h \Psi^h \geq 0, \quad \Psi_0^h \geq 0.$$

В силу принципа максимума, справедливого и в этом случае, $\Psi^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

На каждой итерации u^{k+1} может быть найдено методом прогонки, который в данном случае устойчив [145].

Схема (11.1)-(11.2) может быть использована при решении краевой задачи на полубесконечном интервале.

Рассмотрим краевую задачу для линейного уравнения :

$$Lu = \varepsilon u'' - a(x)u' - c(x)(u - G) = 0, \quad u(0) = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = G. \quad (11.25)$$

Предполагаем, что функции $a(x)$, $c(x)$ непрерывно дифференцируемы,

$$D \geq a(x) \geq \alpha > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1] \quad c(x) \geq \beta > 0, \quad a(x) \rightarrow m, \quad c(x) \rightarrow n, \quad x \rightarrow \infty.$$

Вопрос переноса краевого условия из бесконечности в случае линейной задачи рассматривался в §7.

Можно перейти к конечному интервалу $[0, L_0]$, задав

$$u'(L_0) = \gamma(L_0)(u(L_0) - G), \quad (11.26)$$

где $\gamma(L_0)$ находится из сингулярной задачи Коши (7.3).

Как показано в §7, $\gamma(x) \leq 0$, $|\gamma(x)| \leq \|c\|/\alpha$.

Итак, рассмотрим схему (11.11)-(11.12) применительно к задаче (11.25):

$$\varepsilon_n \Lambda_{xx,n} \tilde{u}^h - a_n \Lambda_{x,n} \tilde{u}^h - c_n (\tilde{u}_n^h - G) = 0, \quad (11.27)$$

$$\tilde{u}_0^h = A, \quad [3\tilde{u}_N^h - 4\tilde{u}_{N-1}^h + \tilde{u}_{N-2}^h]/(2h) = \tilde{\gamma}(L_0)(\tilde{u}_N^h - G). \quad (11.28)$$

Теорема 11.3. Пусть $u(x)$ - решение задачи (11.25), \tilde{u}^h - решение схемы (11.27)-(11.28). Пусть

$$|\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)| \leq \Delta, \quad \tilde{\gamma}(L_0) \leq 0. \quad (11.29)$$

Тогда при всех n

$$|\tilde{u}_n^h - u(x_n)| \leq C\Delta(\varepsilon + \alpha h) \exp[r_0 L_0 + \alpha(\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_0)] + C \frac{h^2}{h + \varepsilon}. \quad (11.30)$$

Доказательство. Пусть u^h - решение схемы (11.27)-(11.28) в случае точного значения $\gamma(L_0)$. Введем $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Нетрудно убедиться, что тогда

$$L_n^h z^h = \varepsilon_n \Lambda_{xx,n} z^h - a_n \Lambda_{x,n} z^h - c_n z_n^h = 0, \quad z_0^h = 0,$$

$$R^h z^h = [3z_N^h - 4z_{N-1}^h + z_{N-2}^h]/(2h) - \tilde{\gamma}(L_0) z_N^h = (\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0))(u_N^h - G).$$

На основании принципа максимума, подбирая подходящую барьерную функцию, можно убедиться, что

$$|u(x) - G| \leq |A - G| \exp[r_0 x],$$

где r_0 - отрицательный корень уравнения $\varepsilon q^2 - Dq - \beta = 0$. Следовательно,

$$|R^h z^h| \leq C\Delta \left[\frac{h^2}{h + \varepsilon} + \exp(r_0 L_0) \right].$$

Задавая сеточную функцию Ψ^h с компонентами:

$$\Psi_n^h = C\Delta(\varepsilon + \alpha h) \left[\frac{h^2}{h + \varepsilon} + \exp[r_0 L_0] \right] (1 + \alpha h \varepsilon^{-1})^{n-N} \pm z_n^h,$$

используя принцип максимума для разностного оператора, получим $\Psi^h \geq 0$. Учитывая, что

$$|u_n^h - u(x_n)| \leq Ch^2(h + \varepsilon)^{-1},$$

получим утверждение теоремы.

Остановимся на результатах численных экспериментов. Рассматриваемая задача имела вид:

$$\varepsilon u'' - u' - \exp[-u] - F(x) = 0, \quad u(0) = \varepsilon \exp(-\varepsilon^{-1}), \quad u'(1) = 1, \quad (11.31)$$

где $F(x)$ соответствует решению

$$u(x) = \varepsilon \exp[\varepsilon^{-1}(x - 1)] + \sin(\pi x/2).$$

Решение схемы (11.11)-(11.12) находилось с помощью итерационного метода (11.24). Для этого метода задавалось $M = 1$, итерации заканчивались, если $\|u^{k+1} - u^k\| \leq 10^{-8}$. При всех вычислениях требовалось не более 15 итераций. В табл. 11.1 приведена определенная выше норма погрешности схемы (11.11)-(11.12) в зависимости от ε и h . Результаты вычислений подтверждают справедливость оценки (11.16).

Таблица 11.1.

ε	h			
	0.1	0.5E-1	0.1E-1	0.5E-2
1.0	0.25E-2	0.13E-3	0.33E-4	0.74E-5
1.0E-1	0.14E-1	0.79E-3	0.21E-3	0.53E-4
1.0E-2	0.66E-1	0.82E-2	0.28E-2	0.83E-3
1.0E-3	0.82E-1	0.16E-1	0.75E-2	0.32E-2
1.0E-4	0.82E-1	0.18E-1	0.89E-2	0.44E-2
1.0E-5	0.82E-1	0.18E-1	0.91E-2	0.45E-2
1.0E-6	0.82E-1	0.18E-1	0.91E-2	0.45E-2

§12. Решение уравнения с малым параметром и точечным источником на бесконечном интервале

При математическом моделировании ряда физических явлений, например, стационарного распространения примеси от точечного источника, возникает краевая задача для уравнения с малыми параметрами при старших производных и источником в виде δ -функции Дирака. Краевые условия для такой задачи ставятся в бесконечно удаленной от источника точке. При этом возникает вопрос, как перенести краевые условия на границу ограниченной области.

Другая проблема – в потере гладкости решения из-за присутствия в уравнении источника в виде δ -функции. В [139] данная проблема решается на основе использования интегрального тождества и построения соотношений баланса для ячеек сеточной области. В [9] предлагается в окрестности источника использовать приближенную аналитическую формулу для решения, а вне этой окрестности использовать конечно-разностную схему, но не исследуется точность данного подхода. В данном параграфе развиваемый выше подход по переносу краевого условия из бесконечности применяется для численного решения уравнения с точечным источником на бесконечном интервале.

Итак, рассмотрим исходную краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon u'' - a(x)u' - c(x)u = f(x), \quad x \neq 0, \quad (12.1)$$

$$L_0 u = \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q, \quad (12.2)$$

$$u(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad u(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (12.3)$$

где

$$D \geq a(x) \geq \alpha > 0, \quad c(x) \geq \beta > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad Q > 0,$$

$$a(x) \rightarrow a_i, c(x) \rightarrow c_i, f(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \pm\infty, i = 2, 1. \quad (12.4)$$

Предполагаем, что функции $a(x), c(x), f(x)$ - непрерывны. Условие на скачок производной соответствует тому, что в точке $x = 0$ находится точечный источник мощности Q , задаваемый дельта -функцией Дирака [131]. Решение $u(x)$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой функцией всюду, кроме точки нуль, где сама функция непрерывна, а ее первая производная имеет разрыв первого рода.

Задача (12.1)-(12.3) является модельной при анализе переноса примеси от точечного источника в направлении ветра [131], при этом:

$u(x)$ - концентрация примеси, ε - коэффициент диффузии, $a(x)$ - скорость ветра, $c(x)$ - коэффициент поглощения примеси, Q - мощность точечного источника, $f(x)$ - несосредоточенный источник или сток примеси.

В данном параграфе из оценки производных решения сделан вывод, что в окрестности источника имеется внутренний экспоненциальный переходной слой. При построении разностной схемы на конечном интервале учтено поведение решения в окрестности источника, строится схема экспоненциальной подгонки.

Нетрудно показать, что для дифференциального оператора, соответствующего задаче (12.1)-(12.3), справедлив принцип максимума и из условий:

$$L\Psi(x) \leq 0, x \neq 0, L_0\Psi(x) \leq 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Psi(x) \geq 0 \quad (12.5)$$

следует $\Psi(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$, для функции $\Psi(x)$, дважды непрерывно дифференцируемой всюду, кроме точки нуль, где сама функция непрерывна, а ее первая производная имеет разрыв первого рода.

Из принципа максимума следует, что решение задачи (12.1)-(12.3)

единственно и в случае $f(x) = 0 \quad u(x) \geq 0$.

Лемма 12.1. При всех x

$$|u(x)| \leq \left\| \frac{f(x)}{c(x)} \right\| + \Phi(x), \quad (12.6)$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} Q\alpha^{-1} \exp(\alpha\varepsilon^{-1}x), & \text{если } x \leq 0, \\ Q\alpha^{-1} \exp(r_0x), & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

$$r_0 = -2\beta / \{D + \sqrt{D^2 + 4\beta\varepsilon}\}, \quad 0 > r_0 > -\beta/D.$$

Доказательство. Определим

$$\Psi(x) = \left\| \frac{f(x)}{c(x)} \right\| + \Phi(x) \pm u(x).$$

Тогда $L_0\Psi(x) \leq 0$. Нетрудно убедиться, что при $x < 0 \quad L\Psi(x) \leq 0$. В случае $x > 0$ имеем:

$$L\Psi(x) \leq Q\alpha^{-1}[\varepsilon r_0^2 - Dr_0 - \beta] \exp(r_0x) = 0.$$

Итак, для функции $\Psi(x)$ выполнены условия (12.5). Из принципа максимума следует утверждение леммы.

Рассмотрим случай $f(x) = 0$. Покажем, что $u(x)$ возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$. Пусть $x > 0$. Представляя уравнение (12.1) в дивергентном виде и интегрируя, получим:

$$u'(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\infty \{c(s)u(s) + f(s)\} \exp \left[\int_s^x \varepsilon^{-1} a(t) dt \right] ds. \quad (12.7)$$

Из этого соотношения следует, что в случае $f(x) = 0 \quad u(x)$ убывает при $x > 0$. Случай $x < 0$ аналогичен.

Лемма 12.2. Пусть функции $a(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы. Найдется постоянная C такая, что для $j = 1, 2, 3, 4$ при всех $x < 0$ справедливы оценки:

$$|u^j(x)| \leq C[1 + \varepsilon^{-j} \exp(\alpha\varepsilon^{-1}x)].$$

Доказательство. Пусть $x < 0$. Представим уравнение (12.1) в виде:

$$(\varepsilon u'(x)P(x))' = \{c(x)u(x) + f(x)\}P(x), \quad P(x) = \exp \left[\int_x^0 \frac{a(s)}{\varepsilon} ds \right]. \quad (12.8)$$

Пусть величина η такова, что $u(0) - u(-\varepsilon) = u'(\eta)\varepsilon$. Из этого уравнения и из того, что функция $u(x)$ ограничена равномерно по ε , следует, что $|u'(\eta)| \leq C\varepsilon^{-1}$. Интегрируя уравнение (12.8) от η до 0, получим $|u'(-0)| \leq C\varepsilon^{-1}$. Интегрируя (12.8) от x до 0, получим требуемую оценку при $j = 1$. Случай других j аналогичен. Лемма доказана.

Лемма 12.3. Пусть функции $a(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы. Тогда найдется постоянная C такая, что для $j = 1, 2, 3, 4$ при всех $x > 0$ справедливы оценки:

$$|u^j(x)| \leq C.$$

Утверждение леммы при $j = 1$ следует из представления производной в виде (12.7). При других j может использоваться аналогичное представление для других производных.

Итак, решение задачи (12.1)-(12.3) имеет внутренний экспоненциальный слой слева от точки $x = 0$ и не имеет больших градиентов по параметру ε правее точки $x = 0$.

Остановимся на вопросе переноса краевых условий из $\pm\infty$. Согласно подходу [3] предельное условие $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0$ выделяет однопараметрическое семейство решений уравнения (12.1) в соответствии с представлением:

$$\varepsilon u'(x) = \gamma_1(x)u(x) + \beta_1(x), \quad x < 0, \quad (12.9)$$

где $\gamma_1(x)$ является решением сингулярной задачи Коши:

$$\varepsilon \gamma' - a(x)\gamma + \gamma^2 - c(x)\varepsilon = 0, \quad \gamma(x) \rightarrow r_1, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (12.10)$$

r_1 - положительный корень уравнения $\gamma^2 - a_1\gamma - c_1\varepsilon = 0$, функция $\beta_1(x)$ является решением сингулярной задачи Коши:

$$\varepsilon\beta_1' + \{\gamma_1(x) - a(x)\}\beta_1 = \varepsilon f(x), \quad \beta_1(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (12.11)$$

Аналогично предельное краевое условие $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ выделяет однопараметрическое семейство решений:

$$u'(x) = \gamma_2(x)u(x) + \beta_2(x), \quad (12.12)$$

где $\gamma_2(x)$ и $\beta_2(x)$ являются решениями сингулярных задач Коши (7.3) и (7.4).

Используя соотношения (12.9) и (12.12) в (12.2) в случае $f(x) = 0$, получим:

$$u(0) = \frac{Q}{\gamma_1(0) - \varepsilon\gamma_2(0)}. \quad (12.13)$$

В §7 показано, что $\gamma_2(x) \leq r_0 < 0$. Остановимся на оценке $\gamma_1(x)$.

Лемма 12.4 . При всех $x \leq 0$

$$\gamma_1(x) \geq \alpha > 0. \quad (12.14)$$

Доказательство. Оцениваемая функция не зависит от $f(x)$, поэтому пусть $f(x) = 0, \beta_1(x) = 0$. Исходя из соотношения (12.9), для этого случая несложно получить:

$$u(x) = u(0) \exp \left[\int_0^x \varepsilon^{-1} \gamma_1(x) dx \right].$$

Из принципа максимума следует, что при $x \leq 0$

$$u(x) \leq u(0) \exp[\alpha\varepsilon^{-1}x]. \quad (12.15)$$

Из последних двух соотношений следует:

$$\int_x^0 [\gamma_1(s) - \alpha] ds \geq 0$$

для произвольного $x \leq 0$. Следовательно, $\gamma_1(0) \geq \alpha$.

Итак, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma_1(x) \geq \alpha$, $\gamma_1(0) \geq \alpha$. Можно показать, что если s - точка локального экстремума функции $\gamma_1(x)$, то $\gamma_1(s) > \alpha$. Итак, $\gamma_1(x) \geq \alpha$. Лемма доказана.

Используя (12.14) в (12.13) в случае $f(x) = 0$, получим:

$$0 < u(0) \leq Q / \{\alpha + |r_0|\varepsilon\}. \quad (12.16)$$

Учитывая соотношения (12.9), (12.12), от задачи (12.1)-(12.3) можно перейти к задаче на конечном интервале, содержащем точку $x = 0$:

$$Lu = \varepsilon u'' - a(x)u' - c(x)u = f(x), \quad x \neq 0,$$

$$L_0 u = \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q,$$

$$\varepsilon u'(L_1) - \gamma_1(L_1)u(L_1) = \beta_1(L_1), \quad u'(L_2) - \gamma_2(L_2)u(L_2) = \beta_2(L_2). \quad (12.17)$$

Можно показать, что вследствие неравенств $\gamma_1(x) > 0$, $\gamma_2(x) < 0$, к дифференциальному оператору задачи (12.17) можно применять принцип максимума. Вследствие этого решение задачи (12.17) единственно.

Докажем, что решения задач (12.1)-(12.3) и (12.17) совпадают при всех $x \in [L_1, L_2]$. Перейдем от (12.1)-(12.3) к задачам:

$$\varepsilon V_1'' - a(x)V_1' - c(x)V_1 = f(x), \quad x < 0, \quad V_1(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad V_1(0) = u(0),$$

$$\varepsilon V_2'' - a(x)V_2' - c(x)V_2 = f(x), \quad x > 0, \quad V_2(0) = u(0), \quad V_2(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

При этом

$$u(x) = \begin{cases} V_1(x), & \text{если } x \leq 0, \\ V_2(x), & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Используя (12.9) и (12.12) определим еще две задачи:

$$\varepsilon p'(x) = \gamma_1(x)p(x) + \beta_1(x), \quad x < 0, \quad p(0) = u(0),$$

$$q'(x) = \gamma_2(x)q(x) + \beta_2(x), \quad x > 0, \quad q(0) = u(0).$$

Решения этих задач существуют и единственны, нетрудно убедиться, что $p(x) = V_1(x)$, $q(x) = V_2(x)$. Следовательно,

$$u(x) = \begin{cases} p(x), & \text{если } x \leq 0, \\ q(x), & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Из этого следует, что если $u(x)$ является решением задачи (12.1)-(12.3), то $u(x)$ удовлетворяет задаче (12.17). Следовательно, решения задач (12.1)-(12.3) при всех $x \in [L_1, L_2]$ совпадают.

Функции γ_i и β_i , как решения соответствующих сингулярных задач Коши, могут быть найдены с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на решение задачи (12.17).

В случае $f(x) = 0$ можно получить более точный результат, поэтому рассмотрим этот случай отдельно. Пусть $\tilde{u}(x)$ - решение задачи (12.17) в случае возмущенных значений $\tilde{\gamma}_i$ и $\tilde{\beta}_i$.

Теорема 12.1. Пусть $f(x) = 0$, $\beta_1(x) = \beta_2(x) = 0$. Пусть

$$|\tilde{\gamma}_1(L_1) - \gamma_1(L_1)| \leq \Delta_1, \quad \tilde{\gamma}_1(L_1) \geq \alpha, \quad |\tilde{\gamma}_2(L_2) - \gamma_2(L_2)| \leq \Delta_2, \quad \tilde{\gamma}_2(L_2) \leq 0.$$

Тогда при всех $x \in [L_1, L_2]$ выполнится

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \Delta_1 \frac{Q}{\alpha^2} \exp[\alpha \varepsilon^{-1} L_1] + \varepsilon \Delta_2 \frac{Q}{\alpha^2} \exp[r_0 L_2 + \alpha \varepsilon^{-1} (x - L_2)]. \quad (12.18)$$

Доказательство. Пусть $z = u - \tilde{u}$. Тогда:

$$Lz(x) = 0, \quad L_0 z(x) = 0,$$

$$-\varepsilon z'(L_1) + \tilde{\gamma}_1 z(L_1) = (\tilde{\gamma}_1 - \gamma_1)u(L_1), \quad z'(L_2) - \tilde{\gamma}_2 z(L_2) = (\gamma_2 - \tilde{\gamma}_2)u(L_2).$$

Определим

$$\Psi(x) = \tilde{\gamma}_1^{-1} \Delta_1 |u(L_1)| + \alpha^{-1} \varepsilon \Delta_2 |u(L_2)| \exp[\varepsilon^{-1} \alpha(x - L_2)] \pm z(x).$$

Нетрудно убедиться, что при всех $x \neq 0$

$$L\Psi(x) \leq 0, \quad L_0\Psi(x) \leq 0, \quad -\varepsilon\Psi'(L_1) + \tilde{\gamma}_1\Psi(L_1) \geq 0, \quad \Psi'(L_2) - \tilde{\gamma}_2\Psi(L_2) \geq 0.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$ при всех x . Учитывая (12.6), получим утверждение теоремы.

Исходя из оценки (12.18), можно проанализировать, как погрешности, возникающие при приближенном решении задач (12.10) и (12.13), уменьшить за счет выбора L_1 и L_2 . Из (12.18) следует, что с уменьшением параметра ε погрешность Δ_2 уменьшается линейным образом, а Δ_1 — экспоненциально.

При численном моделировании распространения примеси от точечного источника в ряде работ в качестве краевых условий задают условие совпадения концентрации примеси с фоновой или условие, что поток концентрации стал нулевым. Проанализируем точность этих подходов в случае модельной задачи (12.1)-(12.3) и $Q > 0, f(x) = 0$ (когда действует только точечный источник).

Итак, рассмотрим различные способы задания краевых условий. С помощью принципа максимума можно показать что при всех $x \in [L_1, L_2]$ в следующих случаях справедливы оценки:

$$1. \tilde{u}(L_1) = 0, \quad \tilde{u}(L_2) = 0.$$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{Q}{\alpha} \exp\left\{\frac{\alpha}{\varepsilon} L_1\right\} + \frac{Q}{\alpha} \exp\left\{r_0 L_2 + \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - L_2)\right\}. \quad (12.19)$$

$$2. \tilde{u}'(L_1) = 0, \quad \tilde{u}'(L_2) = 0.$$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \gamma_1(L_1) \frac{Q}{\alpha^2} \exp\left\{\frac{\alpha}{\varepsilon} L_1\right\} + \varepsilon \|c\| \frac{Q}{\alpha^3} \exp\left\{r_0 L_2 + \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - L_2)\right\}, \quad (12.20)$$

3. $\tilde{u}(L_1) = 0, \tilde{u}'(L_2) = 0$.

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{Q}{\alpha} \exp\left\{\frac{\alpha}{\varepsilon} L_1\right\} + \varepsilon \|c\| \frac{Q}{\alpha^3} \exp\left\{r_0 L_2 + \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - L_2)\right\}. \quad (12.21)$$

Из сравнения (12.19)-(12.21) следует, что если не задавать краевые условия специальным образом, то меньшая погрешность будет при задании нулевого краевого условия Дирихле на левом конце конечного интервала (с "наветренной" стороны) и равенство нулю производной на правом конце интервала.

Рассмотрим случай, когда нет ограничения $f(x) = 0$. По аналогии с теоремой 12.1 можно доказать, что справедлива

Теорема 12.2. Пусть

$$|\tilde{\gamma}_1(L_1) - \gamma_1(L_1)| \leq \Delta_1, |\tilde{\beta}_1(L_1) - \beta_1(L_1)| \leq \Delta_1, \tilde{\gamma}_1(L_1) \geq \alpha,$$

$$|\tilde{\gamma}_2(L_2) - \gamma_2(L_2)| \leq \Delta_2, |\tilde{\beta}_2(L_2) - \beta_2(L_2)| \leq \Delta_2, \tilde{\gamma}_2(L_2) \leq 0.$$

Тогда для некоторой постоянной C при всех $x \in [L_1, L_2]$ выполнится

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq C\{\Delta_1 + \varepsilon \Delta_2 \exp[\alpha \varepsilon^{-1}(x - L_2)]\}. \quad (12.22)$$

Теперь построим приближенные формулы для нахождения $\gamma_1(x)$ и $\beta_1(x)$ из соответствующих сингулярных задач Коши.

Определим

$$\tilde{\gamma}_1(x) = \{a(x) + \sqrt{a(x)^2 + 4c(x)\varepsilon}\}/2. \quad (12.23)$$

Лемма 12.5. Пусть функции $a(x)$, $c(x)$ - непрерывно дифференцируемы. Тогда найдется $C > 0$ такое, что при всех $x \leq 0$

$$|\gamma_1(x) - \tilde{\gamma}_1(x)| \leq C\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $z(x) = \gamma_1(x) - \tilde{\gamma}_1(x)$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' + [\gamma_1(x) + \tilde{\gamma}_1(x) - a(x)]z = -\varepsilon \tilde{\gamma}_1'(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} z(x) = 0.$$

В силу леммы 12.4 $\gamma_1(x) + \tilde{\gamma}_1(x) - a(x) \geq \alpha$. Определим

$$\Psi(x) = \varepsilon \alpha^{-1} \|\tilde{\gamma}'_1(x)\| \pm z(x).$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x) \geq 0, \quad R_\varepsilon \Psi(x) \geq 0, \quad x \in (-\infty, 0].$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$, $x \in (-\infty, 0]$. Следовательно, $|z(x)| \leq \varepsilon \alpha^{-1} \|\tilde{\gamma}'_1(x)\|$. Лемма доказана.

Задача (12.11) при задании $\tilde{\gamma}_1$ в соответствии с (12.23) принимает вид:

$$\begin{aligned} \beta'_1 + d(x)\beta_1 &= f(x), \quad \beta_1(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \\ d(x) &= 2c(x) \{a(x) + \sqrt{a(x)^2 + 4\varepsilon c(x)}\}^{-1}. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Для достаточно больших $|x|$ функция $\beta_1(x)$ из (12.24) может быть определена на основе разложения в ряды по обратным степеням x [19]. Если при $x \ll 0$ справедливы представления:

$$d(x) \approx \sum_{i=0}^N d_i x^{-i}, \quad f(x) \approx \sum_{i=0}^N f_i x^{-i},$$

то $\beta_1(x)$ может быть приближенно найдено в виде:

$$\beta_1(x) \approx \tilde{\beta}_1(x) = \sum_{i=0}^N \beta_i^0 x^{-i}.$$

Для этого необходимо подставить разложения d , f , β_1 в (12.24) и получим рекуррентную формулу относительно β_i^0 . В частности, если $\exists f_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x f(x)$, то $|\beta_1(x)| \leq C/|x|$. Если еще существуют пределы:

$$d_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} d(x), \quad d_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(d(x) - d_0), \quad f_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x f(x) - f_1),$$

то можно определить $\tilde{\beta}_1(x) = f_1/(d_0 x)$ и при этом для некоторой постоянной C $|\beta_1(x) - \tilde{\beta}_1(x)| \leq C/x^2$.

Остановимся на вопросе численного решения задачи (12.17). Согласно лемме 12.2 решение задачи (12.17) имеет внутренний экспоненциальный слой слева от точки $x = 0$. Следовательно, по крайней мере слева от точки $x = 0$, в случае равномерной сетки, целесообразно использовать схему экспоненциальной подгонки. Пусть Ω - равномерная сетка интервала $[L_1, L_2]$:

$$\Omega = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h, x_0 = L_1, x_N = L_2, x_M = 0\}.$$

При аппроксимации $u'(-0)$ учтем экспоненциальный рост решения.

В результате получим разностную схему:

$$\begin{aligned} L_n^h u^h &= \varepsilon_n \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} - a_n \frac{u_{n+1}^h - u_{n-1}^h}{2h} - c_n u_n^h = f(x_n), \\ n &= 1, 2, \dots, N-1, \quad n \neq M, \\ L_M^h u^h &= \varepsilon \frac{u_{M+1}^h - u_M^h}{h} - \tilde{\varepsilon} \frac{u_M^h - u_{M-1}^h}{h} = -Q, \\ L_0^h u^h &= -\varepsilon \frac{u_1^h - u_0^h}{h} + \gamma_1(L_1) u_0^h = -\beta_1(L_1), \\ L_N^h u^h &= \frac{u_N^h - u_{N-1}^h}{h} - \gamma_2(L_2) u_N^h = \beta_2(L_2), \end{aligned} \quad (12.25)$$

где $a_n = a(x_n)$, $c_n = c(x_n)$,

$$\varepsilon_n = \frac{a_n h}{2} \operatorname{cth} \frac{a_n h}{2\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{a_M h}{1 - \exp(-a_M \varepsilon^{-1} h)}. \quad (12.26)$$

Схема (12.25) является обобщением схемы из работы А.М.Ильина [105] на случай краевых условий третьего рода и скачка производной для некоторой внутренней точки.

Теорема 12.3. Пусть $u(x)$ - решение задачи (12.17), $a, c, f \in C^2[L_1, L_2]$, u^h - решение схемы (12.27). Тогда найдется постоянная C такая, что при всех $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ выполнится

$$|u_n^h - u(x_n)| \leq Ch. \quad (12.27)$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - [u]_\Omega$. В соответствии с [181] при $n = 1, 2, \dots, M - 1$ выполнится:

$$|L_n^h z^h| \leq C_1 h [1 + (\varepsilon + h)^{-1} \exp(\alpha(2\varepsilon)^{-1} x_n)]. \quad (12.28)$$

Учитывая ограниченность производных решения при $x > 0$, можно показать, что при $n = M + 1, M + 2, \dots, N - 1$ выполнится:

$$|L_n^h z^h| \leq C_2 h.$$

Нетрудно убедиться, что

$$|L_M^h z^h| \leq C_2 h, \quad |L_0^h z^h| \leq C_2 h, \quad |L_N^h z^h| \leq C_2 h.$$

Определим сеточные функции Φ^h и Ψ^h :

$$\Phi_n^h = \begin{cases} \exp(\alpha(2\varepsilon)^{-1} x_n), & \text{если } n \leq M, \\ 1, & \text{если } n > M. \end{cases}, \quad \Psi_n^h = C_0 h [\Phi_n^h + 1] \pm z_n^h.$$

Учитывая полученные оценки, теперь можно показать, что для некоторой постоянной C_0 выполнится:

$$L_n^h \Psi^h \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad L_0^h \Psi^h \geq 0, \quad L_N^h \Psi^h \geq 0.$$

В силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает теорему.

Докажем устойчивость схемы (12.27) к возмущению $\gamma_1(L_1), \beta_1(L_1)$ и $\gamma_2(L_2), \beta_2(L_2)$. Такой анализ необходим в связи с тем, что эти функции находятся приближенно. Пусть \tilde{u}^h - решение разностной схемы (12.27) в случае возмущенных значений $\tilde{\gamma}_i$ и $\tilde{\beta}_i$.

Теорема 12.4. Пусть $f(x) = 0$, $\beta_1(x) = \beta_2(x) = 0$. Пусть

$$|\tilde{\gamma}_1(L_1) - \gamma_1(L_1)| \leq \Delta_1, \quad \tilde{\gamma}_1(L_1) \geq \alpha, \quad |\tilde{\gamma}_2(L_2) - \gamma_2(L_2)| \leq \Delta_2, \quad \tilde{\gamma}_2(L_2) \leq 0.$$

Тогда для постоянной C , соответствующей оценке сходимости в теореме 12.3, при всех $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ выполнится

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq \Delta_1 \alpha^{-1} \{Q \alpha^{-1} \exp(\alpha \varepsilon^{-1} L_1) + Ch\} + \Delta_2 (2\varepsilon + \alpha h) \alpha^{-1} \times \\ \times \{Q \alpha^{-1} \exp(r_0 L_2) + Ch\} \exp\{\alpha (2\varepsilon + \alpha h)^{-1} (x_n - L_2)\}. \quad (12.29)$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда

$$L_n^h z^h = \varepsilon_n \frac{z_{n+1}^h - 2z_n^h + z_{n-1}^h}{h^2} - a_n \frac{z_{n+1}^h - z_{n-1}^h}{2h} - c_n z_n^h = 0, \quad n \neq M,$$

$$L_M^h z^h = \varepsilon \frac{z_{M+1}^h - z_M^h}{h} - \tilde{\varepsilon} \frac{z_M^h - z_{M-1}^h}{h} = 0,$$

$$L_0^h z^h = -\varepsilon \frac{z_1^h - z_0^h}{h} + \tilde{\gamma}_1(L_1) z_0^h = (\tilde{\gamma}_1 - \gamma_1) u_0^h,$$

$$L_N^h z^h = \frac{z_N^h - z_{N-1}^h}{h} - \tilde{\gamma}_2(L_2) z_N^h = (\gamma_2 - \tilde{\gamma}_2) u_N^h.$$

Определим ϕ^h :

$$\phi_n^h = \left(1 + \frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)^{n-N}.$$

Покажем, что при всех $n = 1, 2, \dots, N-1$

$$L_n^h \phi^h \leq 0. \quad (12.30)$$

Пусть $n \neq M$. Тогда $L_n^h \phi^h$ можно записать в виде:

$$L_n^h \phi^h = \left(\varepsilon_n - \frac{a_n h}{2}\right) \frac{\phi_{n+1}^h - 2\phi_n^h + \phi_{n-1}^h}{h^2} - a_n \frac{\phi_n^h - \phi_{n-1}^h}{h} - c_n \phi_n^h.$$

Нетрудно показать, что при $x > 0$ $x \operatorname{ctth}(x) \leq 1 + x$. Следовательно,

$$\varepsilon_n - \frac{a_n h}{2} \leq \varepsilon.$$

С учетом этого неравенства можно получить:

$$L_n^h \phi^h \leq (4\varepsilon + 2\alpha h)^{-1} (\alpha^2 - 2a_n \alpha) \phi_n^h \leq 0.$$

Пусть $n = M$. Для $x > 0$

$$\frac{x}{1 - \exp(-x)} \geq 1 + \frac{x}{2}.$$

Следовательно,

$$\tilde{\varepsilon} \geq \varepsilon + \frac{a_M h}{2}.$$

Поэтому

$$L_M^h \phi^h \leq \varepsilon \frac{\phi_{M+1}^h - 2\phi_M^h + \phi_{M-1}^h}{h} - \frac{a_M}{2} (\phi_M^h - \phi_{M-1}^h) \leq 0.$$

Итак, при всех $n = 1, 2, \dots, N - 1$ справедливы неравенства (12.30).

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\phi_N^h - \phi_{N-1}^h}{h} - \tilde{\gamma}_2(L_2)\phi_N^h \geq \frac{\alpha}{2\varepsilon + \alpha h}. \quad (12.31)$$

Определим сеточную функцию:

$$\Psi_n^h = \alpha^{-1} \Delta_1 |u_0^h| + \alpha^{-1} (2\varepsilon + \alpha h) \Delta_2 |u_N^h| \phi_n^h \pm z_n^h.$$

Тогда с учетом оценок (12.30), (12.31) получим:

$$L_n^h \Psi^h \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \\ -\varepsilon \frac{\Psi_1^h - \Psi_0^h}{h} + \tilde{\gamma}_1(L_1)\Psi_0^h \geq 0, \quad \frac{\Psi_N^h - \Psi_{N-1}^h}{h} - \tilde{\gamma}_2(L_2)\Psi_N^h \geq 0.$$

В силу принципа максимума $\Psi_n^h \geq 0$ при всех n . Учитывая теорему 12.3 и оценку (12.6), получим утверждение теоремы.

Рассмотрим случай, когда не наложено ограничение $f(x) = 0$. По аналогии с предыдущей теоремой несложно показать, что если

$$|\tilde{\gamma}_1(L_1) - \gamma_1(L_1)| \leq \Delta_1, \quad |\tilde{\beta}_1(L_1) - \beta_1(L_1)| \leq \Delta_1, \quad \tilde{\gamma}_1(L_1) \geq \alpha,$$

$$|\tilde{\gamma}_2(L_2) - \gamma_2(L_2)| \leq \Delta_2, \quad |\tilde{\beta}_2(L_2) - \beta_2(L_2)| \leq \Delta_2, \quad \tilde{\gamma}_2(L_2) \leq 0,$$

то для некоторой постоянной C при всех $x_n \in \Omega$ выполнится

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq C\{\Delta_1 + (\varepsilon + h)\Delta_2 \exp[\alpha(2\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_2)]\}.$$

Если задан источник в виде δ - функции, то можно не переходить к соотношению (12.2) на скачок производной, а ввести для этой функции некоторую аппроксимацию на сетке [18]. Выпишем для такого случая схему экспоненциальной подгонки:

$$\varepsilon_n \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} - a_n \frac{u_{n+1}^h - u_{n-1}^h}{2h} - c_n u_n^h = f(x_n) + F_n^h,$$

$$\varepsilon \frac{u_1^h - u_0^h}{h} - \gamma_1(L_1)u_0^h = \beta_1(L_1), \quad \frac{u_N^h - u_{N-1}^h}{h} - \gamma_2(L_2)u_N^h = \beta_2(L_2), \quad (12.32)$$

где ε_n соответствует (12.28), $a_n = a(x_n)$, $c_n = c(x_n)$, $n = 1, 2, \dots, N-1$,

$$F_n^h = \begin{cases} -Q/h, & \text{если } x_n = 0, \\ 0, & \text{если } x_n \neq 0. \end{cases}$$

С помощью подбора ε_n в (12.32) можно задать монотонную схему Самарского [145] и схему направленных разностей.

Результаты численных экспериментов. Были проведены численные эксперименты для краевой задачи:

$$\varepsilon u'' - u' - u + \delta(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \quad (12.33)$$

где $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака. Точное решение этой задачи выписывается в явном виде ([131], стр. 29):

при $x \leq 0$

$$u(x) = [1 + 4\varepsilon]^{-0.5} \exp[(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})/(2\varepsilon)x],$$

при $x \geq 0$

$$u(x) = [1 + 4\varepsilon]^{-0.5} \exp[-2/(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})x].$$

Сначала задача (12.33) сводилась к интервалу $[-1, 1]$. Численно исследовалась точность схемы (12.25)-(12.26) с учетом способа задания краевых условий. Задавались условия Дирихле (перенос нулевых краевых условий из $\pm\infty$), условия Неймана (аппроксимация условий равенства нулю производных на концах интервала) и специальные краевые условия (учитывающие соотношения (12.9) и (12.12)). В табл. 12.1 приведена норма погрешности в зависимости от ε и способа задания краевых условий при $h = 0.01$. Из табл. 12.1 следует, что наименьшая погрешность – при задании краевых условий с приближенными значениями γ_1 и γ_2 . Значительна погрешность в случае краевых условий Дирихле.

Далее исследовалась точность схемы (12.25) с $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ в зависимости от шага сетки. Задача решалась на интервале $[-5, 5]$. В табл. 12.2 приведена норма погрешности в зависимости от ε и шага сетки.

Данные табл. 12.2 подтверждают равномерную сходимость схемы (12.25) со скоростью $O(h)$. В табл. 12.3 для сравнения при тех же условиях приведена норма погрешности для схемы (12.32). Из табл. 12.3 следует, что если не вводить условие (12.2) на скачок производной при $x = 0$, то точность схемы экспоненциальной подгонки при определенных ε становится хуже. Подтверждается, что если аппроксимировать (12.2) без учета экспоненциального роста решения, то точность схемы существенно снижается.

Теперь сравним различные схемы без учета соотношения (12.2). Остановимся на случае интервала $[-5, 5]$, $h = 0.01$, γ_1, γ_2 соответствуют (12.23) и (12.24). В табл. 12.4 приведена норма погрешности различных схем в зависимости от параметра ε .

Таблица 12.1

ε	способ задания краевых условий		
	Дирихле	Неймана	специальные условия
1.0	0.24	0.25	0.17E-1
1.0E-1	0.34	0.32E-1	0.38E-2
1.0E-2	0.36	0.75E-2	0.41E-2
1.0E-3	0.37	0.55E-2	0.19E-2
1.0E-4	0.37	0.55E-2	0.18E-2
1.0E-5	0.37	0.55E-2	0.18E-2

Таблица 12.2.

ε	шаг сетки		
	0.1	0.05	0.01
1.0	0.14E-1	0.69E-2	0.14E-2
1.0E-1	0.34E-1	0.18E-1	0.38E-2
1.0E-2	0.18E-1	0.11E-1	0.41E-2
1.0E-3	0.18E-1	0.90E-2	0.19E-2
1.0E-4	0.18E-1	0.90E-2	0.18E-2
1.0E-5	0.18E-1	0.90E-2	0.18E-2

Таблица 12.3.

ε	шаг сетки		
	0.1	0.05	0.01
1.0	0.60E-3	0.15E-3	0.61E-4
1.0E-1	0.13E-1	0.32E-2	0.27E-3
1.0E-2	0.72E-1	0.25E-1	0.16E-2
1.0E-3	0.89E-1	0.46E-1	0.79E-2
1.0E-4	0.91E-1	0.47E-1	0.97E-2
1.0E-5	0.91E-1	0.47E-1	0.99E-2

Уравнение без первой производной. Рассмотрим краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon^2 u''(x) - c^2(x)u(x) = f(x), \quad x \neq 0,$$

$$L_0 u = \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q, \quad u(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (12.34)$$

Предполагаем, что $B \geq c(x) \geq \beta > 0$, $\varepsilon > 0$, $Q > 0$,

$$c(x) \rightarrow c_1, \quad f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad c(x) \rightarrow c_2, \quad f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

функции $c(x)$, $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемы. Условие на скачок производной соответствует сосредоточенному источнику мощности Q .

Нетрудно убедиться, что для оператора задачи (12.34) справедлив принцип максимума и справедлива оценка решения:

$$|u(x)| \leq \frac{Q}{2\beta} \exp(-\beta\varepsilon^{-1}|x|) + \frac{\|f(x)\|}{\beta^2}. \quad (12.35)$$

В точке $x = 0$ определены только односторонние производные. Используя принцип максимума можно показать, что при всех $x \neq 0$

$$|u^{(j)}(x)| \leq C[1 + \varepsilon^{-j} \exp(-\beta\varepsilon^{-1}|x|)], \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (12.36)$$

Согласно этой оценке около источника имеет место экспоненциальный пограничный слой.

Таблица 12.4.

ε	Схема направленных разностей	Схема Самарского	Схема экспоненциальной подгонки
1.0	0.84E-3	0.59E-4	0.61E-4
1.0E-1	0.12E-1	0.31E-3	0.27E-3
1.0E-2	0.12	0.29E-1	0.16E-2
1.0E-3	0.89E-1	0.16E-1	0.79E-2
1.0E-4	0.99E-2	0.97E-2	0.97E-2
1.0E-5	0.99E-2	0.99E-2	0.99E-2

По аналогии со случаем несамосопряженного уравнения рассмотрим вопрос переноса краевых условий из $\pm\infty$. Определим соотношения:

$$\varepsilon u'(x) = \gamma_i(x)u(x) + \beta_i(x),$$

где $i = 1$ будет соответствовать переносу краевого условия из $-\infty$, $i = 2$ — из $+\infty$. По аналогии с §8 γ_i и β_i являются решениями сингулярных задач Коши:

$$\varepsilon \gamma_i'(x) + \gamma_i^2(x) - c^2(x) = 0, \quad \varepsilon \beta_i'(x) + \gamma_i(x)\beta_i(x) = f(x). \quad (12.37)$$

Уравнениям (12.37) соответствуют начальные условия:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma_1(x) = c_1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma_2(x) = -c_2, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \beta_i(x) = 0. \quad (12.38)$$

На основании принципа максимума можно показать, что

$$B \geq \gamma_1(x) \geq \beta > 0, \quad -B \leq \gamma_2(x) \leq -\beta < 0.$$

Найдены эти функции могут быть с помощью асимптотических разложений по аналогии с §8.

Таким образом, задача (12.34) сводится к конечному интервалу:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u''(x) - c^2(x)u(x) &= f(x), \quad x \neq 0, \quad \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q, \\ \varepsilon u'(L_1) - \gamma_1(L_1)u(L_1) &= \beta_1(L_1), \quad \varepsilon u'(L_2) - \gamma_2(L_2)u(L_2) = \beta_2(L_2). \end{aligned} \quad (12.39)$$

Решения задач (12.34) и (12.39) на интервале $[L_1, L_2]$ совпадают. Коэффициенты γ_i и β_i из соответствующих задач Коши могут быть найдены приближенно. Можно показать, что решение задачи (12.39) устойчиво к возмущению этих коэффициентов.

Остановимся на вопросе построения разностной схемы для задачи (12.39). В соответствии с оценкой (12.36) решение этой задачи имеет экспоненциальный пограничный слой в окрестности точки $x = 0$. Строим разностную схему на основе подгонки к погранслойному росту решения:

$$\begin{aligned} L_n^h u^h &= \tilde{\varepsilon}^2 \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} - c_n^2 u_n^h = f_n, \quad -N_1 < n < N_2, \quad n \neq 0. \\ L_0^h u^h &= u_1^h - 2u_0^h + u_{-1}^h = -\frac{Q}{c_0} [1 - \exp(-c_0 h \varepsilon^{-1})], \\ L_{-N_1}^h u^h &= \varepsilon \frac{u_{-N_1+1}^h - u_{-N_1}^h}{h} - \gamma_1 u_{-N_1}^h = \beta_1, \\ L_{N_2}^h u^h &= \varepsilon \frac{u_{N_2}^h - u_{N_2-1}^h}{h} - \gamma_2 u_{N_2}^h = \beta_2, \end{aligned} \quad (12.40)$$

где

$$f_n = f(x_n), \quad c_n = c(x_n), \quad x_n = L_1 + (n + N_1)h, \quad n = -N_1, \dots, N_2,$$

$$L_1 = -N_1 h, \quad L_2 = N_2 h, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \tau / \sinh(\tau), \quad \tau = c_0 h / (2\varepsilon).$$

Оценим погрешность схемы (12.40).

Теорема 12.5. Для некоторой постоянной C при всех n

$$|u_n^h - u(x_n)| \leq Ch.$$

Доказательство. Для оператора схемы (12.40) справедлив принцип максимума, в соответствии с которым, для произвольной сеточной функции Ψ^h из условий:

$$L_{-N_1}^h \Psi^h \geq 0, L_{N_2}^h \Psi^h \geq 0, L_n^h \Psi^h \leq 0, n = -N_1 + 1, \dots, N_2 - 1$$

следует, что при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Выделяем составляющую решения $V_{\pm}(x) = C_{\pm} \exp(-c_0 \varepsilon^{-1} |x|)$, $C_{\pm} = -\varepsilon c(0)/u'(\pm 0)$, задающую пограничный рост:

$$u(x) = V_-(x) + p(x), x < 0, u(x) = V_+(x) + p(x), x > 0,$$

$$|p^{(j)}(x)| \leq C[1 + \varepsilon^{-j+1} \exp(-\beta \varepsilon^{-1} |x|)], j = 1, 2, 3, 4. \quad (12.41)$$

Учитывая, что на функциях $V_{\pm}(x)$ аппроксимация является точной, используя известную технику оценивания [181], можно получить

$$|L_n^h \{[u] - u^h\}| \leq C_0 h, n = -N_1, -N_1 + 1, \dots, N_2.$$

Используя принцип максимума, получим утверждение теоремы.

§13. Нелинейная система дифференциальных уравнений

Рассмотрим исходную краевую задачу :

$$T_{\varepsilon} u = -\varepsilon u'' + au' + g(u) = 0, \quad (13.1)$$

$$u(0) = A, \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = B, \quad (13.2)$$

где a - постоянная диагональная квадратная матрица порядка N с диагональными элементами a_i , A, B - векторы из N компонент, ε - числовой параметр, $g(u)$ - известная вектор-функция, $u(x)$ - вектор-функция решения. Предполагается, что функции g^i имеют непрерывные производные до второго порядка по своим аргументам.

Пусть

$$G(v) = \left\{ \frac{\partial g^i(v)}{\partial v_j} \right\}, \quad v \in R^N$$

- матрица Якоби вектор - функции $g(v)$. Предполагаем, что

$$m_0 \geq a_i \geq m > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad g(B) = 0, \quad G_{i,j}(v) \leq 0, \quad i \neq j, \quad v \in R^N, \\ \sum_{j=1}^N G_{i,j}(v) \geq -\beta, \quad \beta > 0, \quad m^2 - 4\beta\varepsilon \geq \sigma > 0, \quad \sum_{j=1}^N G_{i,j}(B) \geq \sigma_i \geq \sigma_0 > 0. \quad (13.3)$$

При выполнении условий (13.3) $G(B)$ является M - матрицей ([40], стр.270), все собственные числа этой матрицы имеют положительные вещественные части.

Анализ решения дифференциальной задачи. Рассмотрим линейный оператор:

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + au' + Mu,$$

где для матрицы M предполагаются справедливыми ограничения:

$$M_{ij} \leq 0 \quad \text{при всех } i \neq j. \quad (13.4)$$

Лемма 13.1. Пусть найдется вектор-функция $\phi(x)$ с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами, такая, что

$$\phi(x) > 0, \quad x \geq 0, \quad L_\varepsilon \phi(x) > 0, \quad x > 0. \quad (13.5)$$

Тогда, если для некоторой вектор-функции $\Psi(x)$ с дважды непрерывно

дифференцируемыми компонентами

$$\Psi(0) \geq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) \geq 0, L_\varepsilon \Psi(x) \geq 0, x > 0, \quad (13.6)$$

то $\Psi(x) \geq 0$ при всех $x \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что какие-то компоненты вектор-функции $\Psi(x)$ оказались меньше нуля. Определим $y : y_i = \Psi_i / \phi_i$. Тогда при некоторых i, x_0 будет $y_i(x_0) < 0$. Учитывая краевые условия в (13.6), заключаем, что функция $y_i(x)$ в некоторой точке имеет локальный отрицательный минимум. Без ограничения общности можно считать, что x_0 – точка локального минимума функции $y_i(x)$. Нетрудно убедиться, что

$$L_\varepsilon^{(i)} \Psi = -\varepsilon \phi_i y_i'' + [-2\varepsilon \phi_i' + a_i \phi_i] y_i' + y_i L_\varepsilon^{(i)} \phi + \sum_{k=1}^N M_{ik} \phi_k (y_k - y_i).$$

Из этого соотношения следует $L_\varepsilon^{(i)} \Psi(x_0) < 0$, что противоречит (13.6).

Лемма доказана.

Определим условия, при выполнении которых для оператора L_ε будет справедлив принцип максимума. Пусть в дополнение к (13.4) при всех i

$$\sum_{j=1}^N M_{i,j} \geq -\beta, \beta > 0, m^2 - 4\beta\varepsilon \geq \sigma > 0. \quad (13.7)$$

Определим вектор-функцию $\phi(x)$ с компонентами: $\phi_i(x) = \exp\{2\beta m^{-1}x\}$.

Для этой функции выполнены условия (13.5). В соответствии с леммой 13.1 для оператора L_ε справедлив принцип максимума.

Учитывая условия (13.3) и лемму 13.1, можно заключить, что решение задачи (13.1)-(13.2) – единственно. Кроме этого, если выполнены соотношения (13.3), то при определенных условиях решение задачи (13.1)-(13.2) не отрицательно. Точнее это можно сформулировать следующим образом.

Пусть

$$u(0) \geq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) \geq 0, g(0) \leq 0. \quad (13.8)$$

Тогда при всех x $u(x) \geq 0$. Докажем это. Учитывая, что $g(u) - g(0) = G(\theta(u))u$, запишем уравнение (13.1) в виде:

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + au' + G(\theta(u))u = -g(0). \quad (13.9)$$

Если выполнены условия (13.8), то в силу принципа максимума при всех x $u(x) \geq 0$.

Получим оценку устойчивости для задачи (13.1)-(13.2).

Лемма 13.2. Найдется постоянная C такая, что при всех $x < \infty$

$$|u(x)| \leq \exp(2\beta m^{-1}x)[m^2\beta^{-1}\sigma^{-1}\|g(0)\| + \|A\|]. \quad (13.10)$$

Доказательство. Учитываем, что уравнение (13.1) представимо в виде (13.9). Рассмотрим уравнение (13.9) на конечном интервале $[0, L]$. Определим покомпонентно вектор - функцию:

$$\begin{aligned} \Psi_i(x) = & \exp[2\beta m^{-1}x][m^2\beta^{-1}\sigma^{-1}\|g(0)\| + \|A\|] + \\ & + \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L)]|u_i(L)| \pm u_i(x). \end{aligned}$$

При таком задании $\Psi(x)$ выполнится

$$L_\varepsilon \Psi(x) \geq 0, 0 < x < L, \Psi(0) \geq 0, \Psi(L) \geq 0.$$

Используя принцип максимума, получим $\Psi(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq L$. Устремляя $L \rightarrow \infty$, придем к утверждению леммы.

Согласно лемме 13.2, при выполнении условий (13.3) решение задачи (13.1)-(13.2) может иметь экспоненциальный рост.

Исследуем поведение решения при больших значениях аргумента. В соответствии с условиями (13.2) и (13.3) для каждого i найдется L_i ,

такое, что

$$\sum_{j=1}^N G_{i,j}(u(x)) \geq \frac{\sigma_i}{2} \text{ при } x \geq L_i.$$

Лемма 13.3. При всех $x \geq L$, $L = \max_i L_i$

$$|u_i(x) - B_i| \leq |u_i(L) - B_i| \exp\{r_i(x - L)\}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (13.11)$$

где $r_i = -\sigma_i \{a_i + \sqrt{a_i^2 + 2\sigma_i \varepsilon}\}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $z(x) = u(x) - B$, $g(z+B) - g(z) = G(\theta(z))z$.

Тогда z является решением краевой задачи:

$$Sz = -\varepsilon z'' + az' + Gz = 0, \quad z(0) = A - B, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = 0.$$

Определим покомпонентно вектор - функцию:

$$\Psi_i(x) = |u_i(L) - B_i| \exp\{r_i(x - L)\} \pm z_i(x).$$

Тогда для каждого i

$$S_i \Psi \geq [-\varepsilon r_i^2 + a_i r_i + 0.5\sigma_i] |u(L_i) - B_i| \exp\{r_i(x - L)\} = 0,$$

$$\Psi(L) \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) \geq 0.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0, x \geq L$. Это доказывает лемму.

Согласно лемме 13.3 при достаточно больших x решение $u(x)$ по каждой компоненте ограничено и экспоненциально приближается к краевому условию.

Из лемм 13.2-13.3 следует, что для некоторой постоянной

$C \quad \|u\|_N \leq C$. Из уравнения (13.1) следует:

$$u'(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\infty \exp\{\varepsilon^{-1}(x-s)a\} g(u(s)) ds.$$

Учитывая, что

$$\|\exp\{\varepsilon^{-1}(x-s)a\}\| \leq \exp\{\varepsilon^{-1}(x-s)m\},$$

для некоторой постоянной C получим

$$\|u'\|_N \leq C. \quad (13.12)$$

Перенос краевого условия из бесконечности. Предварительно рассмотрим матричное квадратное уравнение

$$-\varepsilon\gamma^2 + a\gamma + G(B) = 0. \quad (13.13)$$

Уравнение (13.13) имеет не единственное решение γ . Можно показать, что одно из решений по норме ограничено равномерно по параметру ε . В случае скалярной матрицы a , когда она перестановочна с другими матрицами, это решение можно выписать в явном виде:

$$\gamma = -2G(B)[a + \sqrt{a^2 + 4G(B)\varepsilon}]^{-1}.$$

Пусть γ – решение (13.13) и $\|\gamma\| \leq C$, скалярность матрицы a в общем случае не предполагаем. Определим

$$\gamma_0 = -a^{-1}G(B). \quad (13.14)$$

Покажем, что тогда

$$\|\gamma - \gamma_0\| \leq C_1\varepsilon. \quad (13.15)$$

Это следует из ограниченности $\|\gamma\|$ и того, что $\gamma - \gamma_0 = \varepsilon a^{-1}\gamma^2$. Матрица $-\gamma_0$ является M -матрицей, поэтому все собственные значения матрицы γ_0 лежат в левой полуплоскости ([40], стр. 270).

Покажем, что при достаточно малых значениях ε все собственные значения матрицы γ лежат в левой полуплоскости. В соответствии с теоремой Гершгорина ([40], стр.113) для произвольного собственного значения λ_i матрицы γ

$$|\operatorname{Re} \lambda_i - \gamma_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |\gamma_{ij}|.$$

Учитывая (13.3), можно показать, что при всех i :

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq -m_0^{-1} \sigma_0 + \|\gamma - \gamma_0\|.$$

Учитывая неравенство (13.15), заключаем, что при достаточно малых значениях ε все собственные значения матрицы γ лежат в левой полуплоскости.

Определим асимптотический метод построения матрицы γ :

$$\tilde{\gamma} = \sum_{k=0}^M \gamma^{(k)} \varepsilon^k, \quad \gamma^{(0)} = -a^{-1} G(B). \quad (13.16)$$

Учитывая эти соотношения в (13.13), получим рекуррентную формулу:

$$\gamma^{(k+1)} = a^{-1} \sum_{p+q=k} \gamma^{(p)} \gamma^{(q)}, \quad p, q \geq 0.$$

Таким образом, матрица γ может быть найдена с заданной точностью.

В соответствии с подходом [3], выделим многообразие решений уравнения (13.1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности уравнением первого порядка:

$$u' = \gamma(u - B) + F(u), \quad (13.17)$$

где γ является решением уравнения (13.13), о котором говорилось выше, вектор-функция $F(u)$ является решением задачи:

$$\varepsilon F'(u)[\gamma(u - B) + F(u)] - (a - \varepsilon \gamma) F(u) = g(u) - G(B)(u - B), \quad F(B) = 0. \quad (13.18)$$

В соответствии с [113], [128], решение задачи (13.18) для достаточно малых значений $\|u - B\|$ существует и единственно, $F'(B) = 0$, для достаточно больших значений аргумента ($x \geq X$) уравнение (13.17) выделяет часть решений уравнения (13.1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Если соотношение (13.17) использовать в

качестве правого краевого условия для уравнения (13.1), то необходимо из (13.18) найти $F(u)$. Найдем это решение на основе асимптотических разложений. Пусть

$$\tilde{F}^m(u) = \sum_{k=0}^m F_k(u)\varepsilon^k. \quad (13.19)$$

Подставляя это разложение в (13.18) и собирая члены при одинаковых степенях ε , получим рекуррентную формулу:

$$F_{k+1}(u) = a^{-1} \left[F'_k \gamma(u - B) + \gamma F_k + \sum_{p+q=k} F'_p F_q \right], \quad p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad (13.20)$$

$$F_0(u) = -a^{-1} [g(u) - G(B)(u - B)]. \quad (13.21)$$

Для оценки погрешности асимптотического разложения рассмотрим вспомогательный линейный оператор:

$$Sz = \varepsilon z' - Mz. \quad (13.22)$$

Предполагаем, что матрица M имеет строгое диагональное преобладание:

$$M_{ii}(1 - \eta) \geq \sum_{j \neq i} |M_{ij}|, \quad 0 < \eta < 1, \quad M_{ii} \geq \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (13.23)$$

Лемма 13.4. Пусть выполнены условия (13.23). Тогда для произвольной дифференцируемой вектор - функции $z(x)$, имеющей предел на бесконечности, справедлива оценка:

$$\|z\|_N \leq \eta^{-1} \{ \alpha^{-1} \|Sz\|_N + \max_i \lim_{x \rightarrow \infty} |z_i(x)| \} \quad (13.24)$$

Доказательство. Для произвольного i имеем:

$$T_i z = \varepsilon z'_i - M_{ii} z_i = S_i z + \sum_{j \neq i} M_{ij} z_j.$$

Рассуждениями от противного можно убедиться, что для оператора T_i справедлив принцип максимума, в соответствии с которым для произвольной непрерывно дифференцируемой функции $\Psi(x)$ из условий:

$$T_i \Psi(x) \leq 0, \quad x < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) \geq 0 \quad (13.25)$$

следует $\Psi(x) \geq 0, \quad x < \infty$. Определим

$$\Psi(x) = \frac{\|Sz\|_N}{\alpha} + \frac{\|z\|_N}{M_{ii}} \sum_{j \neq i} |M_{ij}| + \lim_{x \rightarrow \infty} |z(x)| \pm z_i(x).$$

Можно убедиться, что для функции $\Psi(x)$ выполнены условия (13.25). В силу принципа максимума при всех $x < \infty$ $\Psi(x) \geq 0$. Учитывая условия (13.23), получим утверждение леммы.

Лемма 13.5. Пусть $u(x)$ – решение задачи (13.1)-(13.2). Пусть вектор-функция $g(u)$ является достаточно гладкой и соотношения (13.21) имеют место для всех $k < m$. Тогда при достаточно малых значениях ε и $x \geq X$

$$\|F(u(x)) - \tilde{F}^m(u(x))\|_N \leq C\varepsilon^{m+1}. \quad (13.26)$$

Доказательство. Пусть

$$z(x) = F(u(x)) - \tilde{F}^m(u(x)).$$

В силу того, что $\tilde{F}^m(u)$ строится на основе асимптотических разложений для задачи (13.18), $\tilde{F}^m(u)$ является решением задачи:

$$\varepsilon \tilde{F}'(u)[\gamma(u - B) + \tilde{F}(u)] - (a - \varepsilon\gamma)\tilde{F}(u) = g(u) - G(B)(u - B) + S(u),$$

$$\tilde{F}(B) = 0, \quad |S(u)| \leq C_0\varepsilon^{m+1}. \quad (13.27)$$

Учитывая (13.17), (13.18), (13.27) нетрудно убедиться, что вектор-функция $z(x)$ является решением задачи Коши с предельным условием

на бесконечности:

$$Sz(x) = \varepsilon z'(x) - Mz(x) = S(u(x)), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = 0, \quad (13.28)$$

где

$$M = a - \varepsilon\gamma - \varepsilon\tilde{F}'(u).$$

При достаточно малых значениях ε условия (13.23) будут выполнены при $\eta = 0.5$. Теперь утверждение леммы следует из оценки (13.24).

Прежде чем сформировать задачу на конечном интервале, рассмотрим линейный оператор

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + az' + Gz, \quad (13.29)$$

с краевыми условиями

$$z(0), D_\varepsilon z = z'(L_0) + Sz(L_0), \quad (13.30)$$

где G и S матрицы порядка N .

Лемма 13.6. Пусть при всех $i \neq j$ $G_{ij} \leq 0$, $S_{ij} \leq 0$. Пусть существует вектор - функция $\phi(x)$ с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами, такая, что

$$L_\varepsilon \phi(x) > 0, \quad 0 < x < L_0, \quad \phi(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq L_0, \quad D_\varepsilon \phi > 0. \quad (13.31)$$

Тогда если $\Psi(x)$ - вектор - функция с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами, то из условий:

$$L_\varepsilon \Psi(x) \geq 0, \quad 0 < x < L_0, \quad \Psi(0) \geq 0, \quad D_\varepsilon \Psi \geq 0 \quad (13.32)$$

следует $\Psi(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq L_0$.

Доказательство. Определим покомпонентно вектор - функцию y : $y_i(x) = \Psi_i(x)/\phi_i(x)$. Допустим, что для некоторой компоненты i и точки

x_0 оказалось $\Psi_i(x_0) < 0$. Тогда $y_i(x_0) < 0$. Без ограничения общности можно считать, что $y_i(x_0) = \min_j \min_x y_j(x)$. Если $x_0 < L_0$, то получить противоречие можно по аналогии с леммой 13.1. Рассмотрим случай $x_0 = L_0$. В этом случае $y'(x_0) \leq 0$ и поэтому в соответствии с условиями (13.32)

$$\phi'_i(x_0)y_i(x_0) + \sum_{j=1}^N S_{ij}\phi_j(x_0)y_j(x_0) \geq 0.$$

Это неравенство можно записать в виде:

$$y_i(x_0)D_\varepsilon^i\phi + \sum_{j=1}^N S_{ij}\phi_j(x_0)(y_j(x_0) - y_i(x_0)) \geq 0.$$

Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 13.7. Пусть

$$G_{ij} \leq 0, S_{ij} \leq 0, \text{ при всех } i \neq j, \sum_{j=1}^N G_{ij} \geq -\beta, \beta > 0,$$

$$m^2 - 4\beta\varepsilon \geq \sigma > 0, \sum_{j=1}^N S_{ij} \geq -\beta_0, \beta_0 > 0, m - 2\beta_0\varepsilon \geq \sigma_0 > 0. \quad (13.33)$$

Тогда для оператора L_ε из (13.29) с краевыми условиями (13.30) справедлив принцип максимума.

Доказательство. Определим вектор - функцию $\phi(x)$ с компонентами:

$$\phi_i(x) = \exp\{m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)\}.$$

Нетрудно проверить, что для вектор - функции $\phi(x)$ выполнены условия (13.31). Теперь доказательство следует из леммы 13.6.

Учитывая соотношение (13.17), перейдем от задачи (13.1)-(13.2) к задаче на конечном интервале:

$$\begin{aligned} T_\varepsilon u &= -\varepsilon u'' + au' + g(u) = 0, \\ u(0) &= A, \quad u'(L_0) = \gamma(u(L_0) - B) + F(u(L_0)). \end{aligned} \quad (13.34)$$

Задача (13.34) поставлена на конечном интервале и для ее решения можно использовать конечно - разностную схему. Вектор - функция F и матрица γ для этой задачи находятся приближенно. Оценим влияние погрешности при их задании на решение задачи (13.34).

Перейдем от (13.34) к краевой задаче с возмущенными F и γ :

$$T_\varepsilon \tilde{u} = -\varepsilon \tilde{u}'' + a \tilde{u}' + g(\tilde{u}) = 0,$$

$$\tilde{u}(0) = A, \quad \tilde{u}'(L_0) = \tilde{\gamma}(\tilde{u}(L_0) - B) + \tilde{F}(\tilde{u}(L_0)) \quad (13.35)$$

Теорема 13.1. Пусть существует $\tilde{F}'(v)$ и непрерывна,

$$\tilde{S}(v) = -\tilde{\gamma} - \tilde{F}'(v), \quad \tilde{S}_{ij} \leq 0, \quad \text{при всех } i \neq j,$$

$$\sum_{j=1}^N \tilde{S}_{ij} \geq -\beta_0, \quad \beta_0 > 0, \quad m - 2\beta_0\varepsilon \geq \theta > 0. \quad (13.36)$$

Пусть

$$\|F(u(L_0)) - \tilde{F}(u(L_0))\| \leq \Delta, \quad \|\gamma - \tilde{\gamma}\| \leq \Delta_1.$$

Тогда при всех i и $x \in [0, L_0]$

$$|u_i(x) - \tilde{u}_i(x)| \leq 2\varepsilon\theta^{-1}(\Delta + \Delta_1\|u\|_N) \exp\{m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)\}.$$

Доказательство. Пусть $z = u - \tilde{u}$. Тогда для некоторых θ_1 и θ_2

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + az' + G(\theta_1)z = 0, \quad z(0) = 0,$$

$$z'(L_0) + \tilde{S}z(L_0) = F(u(L_0)) - \tilde{F}(u(L_0)) + (\gamma - \tilde{\gamma})u(L_0), \quad \tilde{S} = -(\tilde{\gamma} + \tilde{F}'_u(\theta_2)).$$

Учитывая условия (13.36) и лемму 13.6, заключаем, что для оператора L_ε с заданными краевыми условиями справедлив принцип максимума. Определим вектор - функцию $\Psi(x)$ с компонентами:

$$\Psi_i(x) = 2\varepsilon\theta^{-1}(\Delta + \Delta_1\|u\|) \exp(m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)) \pm z(x).$$

При таком задании $\Psi(x)$ выполняются условия (13.32) и в силу принципа максимума при всех x $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает теорему.

Если задать

$$\tilde{\gamma} = -a^{-1}G(B), \quad \tilde{F}(u) = -a^{-1}[g(u) - G(B)(u - B)],$$

то редуцированная задача (13.35) принимает вид:

$$-\varepsilon \tilde{u}'' + a \tilde{u}' + g(\tilde{u}) = 0, \quad \tilde{u}(0) = A, \quad a \tilde{u}'(L_0) + g(\tilde{u}(L_0)) = 0.$$

Тогда $\tilde{S}(v) = a^{-1}G(v)$, с учетом (13.3) условия (13.36) будут выполнены и согласно теореме 13.1 при всех i

$$|u_i(x) - \tilde{u}_i(x)| \leq C\varepsilon^2 \exp\{m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)\}.$$

Сделаем основные выводы по данной главе. Рассмотрены линейные и нелинейное автономные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной на полубесконечном интервале. Предложен способ редукции этих задач к конечному интервалу на основе использования известного подхода к переносу краевых условий из особых точек. Наличие малого параметра при старшей производной позволило использовать асимптотические разложения для решения вспомогательных начальных задач. Данный подход распространен на случай системы нелинейных автономных уравнений второго порядка и на случай уравнений с точечным источником на бесконечном интервале. Исследованы разностные схемы для редуцированных задач на равномерную сходимость по малому параметру и на устойчивость к погрешностям переноса краевых условий.

Глава 3

Редукция скалярных и векторных схем к конечному числу узлов

В данной главе рассматриваются разностные схемы с бесконечным числом узлов. Такие схемы могут возникать, например, после сеточной аппроксимации краевых задач на бесконечном интервале или в полосе. Для нахождения решения таких схем необходимо перейти к схеме с конечным числом узлов. Предлагается сделать это на основе выделения многообразия решений исходного разностного уравнения, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Это многообразие будет задаваться в виде разностного уравнения первого порядка, что позволит свести исходную схему к схеме с конечным числом узлов. В случае, когда при стремлении некоторого параметра к нулю разностная схема вырождается (что случается при аппроксимации дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных), используется асимптотический подход для нахождения решения вспомогательных двухточечных схем с предельным условием на бесконечности.

Данный подход обобщим на случай векторной трехточечной схемы, которая соответствует численному решению эллиптических уравнений в полубесконечной полосе.

Определим норму матрицы \mathbf{G} порядка N , согласованную с векторной нормой:

$$\|\mathbf{G}\| = \max_i \sum_{j=1}^N |G_{i,j}|.$$

**§14. Линейная трехточечная схема
с полубесконечным числом узлов**

Рассмотрим линейную трехточечную разностную схему:

$$L_n^h u^h = A_n u_{n-1}^h - C_n u_n^h + B_n u_{n+1}^h = F_n, \quad n > 0, \quad (14.1)$$

$$u_0^h = G, \quad u_n^h \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (14.2)$$

Предполагаем, что при всех n

$$A_n \geq B_n > 0, \quad C_n \geq A_n + B_n + \Delta, \quad \Delta > 0, \quad (14.3)$$

$$A_n \rightarrow A^0, \quad B_n \rightarrow B^0, \quad C_n \rightarrow C^0, \quad F_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (14.4)$$

Перейдем к анализу свойств схемы (14.1)-(14.2).

Лемма 14.1. Пусть p^h – произвольная сеточная функция, имеющая предел на бесконечности. Тогда справедлива оценка:

$$\|p^h\| \leq \Delta^{-1} \|L^h p^h\| + |p_0^h| + \lim_n |p_n^h|.$$

Доказательство. Учитывая условия (14.3), нетрудно заключить, что для оператора L^h с заданными краевыми условиями справедлив принцип максимума ([145], с. 40) и из условий:

$$\Psi_0^h \geq 0, \quad L_n^h \Psi^h \leq 0, \quad n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n^h \geq 0 \quad (14.5)$$

следует, что при всех $n \geq 0$ $\Psi_n^h \geq 0$. Определим Ψ^h :

$$\Psi_n^h = \Delta^{-1} \|L^h p^h\| + |p_0^h| + \lim_n |p_n^h| \pm p_n^h.$$

Для такой функции Ψ^h выполняются условия (14.5) и поэтому при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Из леммы 14.1 следует единственность и ограниченность решения задачи (14.1)-(14.2).

Выделим многообразие решений разностного уравнения (14.1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Для этого определим разностное уравнение первого порядка:

$$u_n^h = \alpha_n u_{n-1}^h + \beta_n, \quad n \geq 1, \quad (14.6)$$

где коэффициенты α_n и β_n задаем как решения двухточечных разностных задач с предельным условием на бесконечности:

$$\alpha_n = \frac{A_n}{C_n - B_n \alpha_{n+1}}, \quad \alpha_n \rightarrow \alpha^0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \alpha^0 = \frac{2A^0}{C^0 + \sqrt{C^0 C^0 - 4A^0 B^0}}, \quad (14.7)$$

$$\beta_n = \frac{B_n \beta_{n+1} - F_n}{C_n - B_n \alpha_{n+1}}, \quad \beta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14.8)$$

Пусть α – решение задачи (14.7). Докажем, что при всех $n > 0$ $\alpha_n < 1$.

Учитывая условие диагонального преобладания (14.3), получим:

$$\alpha^0 < \frac{2A^0}{C^0 + |A^0 - B^0| + \Delta} < \frac{A^0}{A^0 + \Delta} < 1.$$

Для достаточно больших n ($n \geq M$) в силу предельного условия $\alpha_n < 1$.

В случае $n < M$ $\alpha_n < 1$ в силу условий (14.3) и соотношения (14.7).

Итак, при всех $n > 0$ $0 < \alpha_n < 1$.

Учитывая (14.7), можно показать, что при всех $n > 0$

$$0 < \alpha_n < \frac{A_n}{A_n + \Delta} \leq \alpha_{max} < 1.$$

Покажем, что решение задачи (14.7) существует и единственно при всех $n > 0$. Пусть $z_n = \alpha_n - \alpha^0$. Тогда z является решением разностного уравнения Риккати с предельным условием на бесконечности:

$$(C_n - \alpha^0 B_n) z_n = \alpha^0 B_n z_{n+1} + B_n z_n z_{n+1} + g_n, \quad z_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$g_n = A_n - A^0 + (C^0 - C_n)\alpha^0 + (B^0 - B_n)(\alpha^0)^2, \quad g_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

В силу условий (14.3) $C_n - \alpha^0 B_n > \alpha^0 B_n$, в соответствии с [168] решение этой задачи существует и единственно при достаточно больших n ($n \geq M$), при этом в силу предельного условия $\alpha_n \rightarrow \alpha^0$, $n \rightarrow \infty$ $0 < \alpha_n < 1$. Рассмотрим случай $n < M$. Из того, что α_{n+1} определено и $0 < \alpha_{n+1} < 1$ из (14.7) однозначно определяется α_n и при этом $0 < \alpha_n < 1$. Это определяет α_n для всех $n \geq 1$.

Покажем, что задача (14.8) однозначно разрешима при всех $n > 0$. Задачу (14.8) можно записать в виде:

$$\beta_n = \tau_n \beta_{n+1} + g_n, \quad \beta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \tau_n < 1, \quad g_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

При достаточно больших n ($n \geq M$) решение этой задачи можно определить в явном виде:

$$\beta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{s=n}^k \tau_s g_{k+1}.$$

При $n < M$ решение задачи (14.8) однозначно определяется в соответствии с заданным рекуррентным соотношением.

Учитывая (14.7), (14.8), можно показать, что если сеточная функция u^h удовлетворяет соотношениям (14.6), то она удовлетворяет (14.1).

Покажем, что разностное уравнение (14.6) задает многообразие решений разностного уравнения (14.1), удовлетворяющих предельному условию (14.2) на бесконечности. Из (14.6) следует, что при всех n

$$|u_n^h| \leq \alpha_{max}^n |u_0^h| + \sum_{i=1}^n \alpha_{max}^{n-i} |\beta_i|.$$

Учитывая, что в этом неравенстве $0 < \alpha_{max} < 1$, $\beta_i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, можно показать, что $u_n^h \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Зададим некоторое $N > 0$ и, учитывая соотношение (14.6), перей-

дем от (14.1)-(14.2) к разностной схеме с конечным числом узлов:

$$\begin{aligned} L_n^h u^h &= A_n u_{n-1}^h - C_n u_n^h + B_n u_{n+1}^h = F_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0^h &= G, \quad u_N^h - \alpha_N u_{N-1}^h = \beta_N. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Нетрудно убедиться, что для задачи (14.9) справедлив принцип максимума, откуда следует единственность решения. То, что решения задач (14.1)-(14.2) и (14.9) совпадают при всех $n \leq N$, будет показано ниже.

Коэффициенты α_N и β_N из задач (14.7),(14.8) могут быть вычислены приближенно. Оценим влияние погрешности, возникающей при их вычислении, на решение схемы (14.9). Перейдем от (14.9) к разностной схеме с возмущенными α_N и β_N :

$$\begin{aligned} A_n \tilde{u}_{n-1}^h - C_n \tilde{u}_n^h + B_n \tilde{u}_{n+1}^h &= F_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ \tilde{u}_0^h &= G, \quad \tilde{u}_N^h - \tilde{\alpha}_N \tilde{u}_{N-1}^h = \tilde{\beta}_N. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Лемма 14.2. Пусть

$$|\alpha_N - \tilde{\alpha}_N| \leq \Delta_1, \quad 0 \leq \tilde{\alpha}_N < 1, \quad |\beta_N - \tilde{\beta}_N| \leq \Delta_2.$$

Тогда

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq (1 - \tilde{\alpha}_N)^{-1} \{ \Delta_1 |u_{N-1}^h| + \Delta_2 \}, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (14.11)$$

В случае

$$q = \min_{n < N} \frac{A_n}{B_n} > 1 \quad (14.12)$$

выполнится

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq \frac{q}{q - \tilde{\alpha}_N} \{ \Delta_1 |u_{N-1}^h| + \Delta_2 \} q^{n-N}, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (14.13)$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда z^h является решением задачи:

$$L_n^h z^h = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad z_0^h = 0,$$

$$D^h z^h = z_N^h - \tilde{\alpha}_N z_{N-1}^h = (\alpha_N - \tilde{\alpha}_N) u_{N-1}^h + (\beta_N - \tilde{\beta}_N). \quad (14.14)$$

Покажем, что для оператора задачи (14.14) справедлив принцип максимума, в соответствии с которым из условий:

$$\Psi_0^h \geq 0, \quad L_n^h \Psi^h \leq 0, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad D^h \Psi^h \geq 0 \quad (14.15)$$

следует $\Psi_n^h \geq 0$ при всех $n = 0, 1, \dots, N$. Допустим, что для некоторого индекса m $\Psi_m^h < 0$. Без ограничения общности можно считать, что индексу m соответствует глобальный минимум функции Ψ^h . Если $m < N$, то в этом узле достигается локальный отрицательный минимум и при этом получим противоречие с условием, что при всех n $L_n^h \Psi^h \leq 0$. Рассмотрим случай $m = N$. Перепишем $D^h \Psi^h$ в виде:

$$D^h \Psi^h = (1 - \tilde{\alpha}_N) \Psi_N^h + \tilde{\alpha}_N (\Psi_N^h - \Psi_{N-1}^h).$$

Из этого соотношения получим $D^h \Psi^h < 0$, что противоречит (14.15). Итак, для оператора L^h с соответствующими краевыми условиями справедлив принцип максимума.

Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_n^h = (1 - \tilde{\alpha}_N)^{-1} \{ \Delta_1 |u_{N-1}^h| + \Delta_2 \} \pm z_n^h.$$

Тогда выполнены условия (14.15) и в силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$, что доказывает (14.11).

Рассмотрим случай условий (14.12). Определим сеточную функцию ϕ^h : $\phi_n^h = q^{n-N}$. Тогда при всех n

$$L_n^h \phi^h < \phi_n^h q^{-1} \{ B_n q^2 - (A_n + B_n) q + A_n \} = B_n \phi_n^h q^{-1} (q-1) \left(q - \frac{A_n}{B_n} \right) \leq 0. \quad (14.16)$$

Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_n^h = \frac{q}{q - \tilde{\alpha}_N} \{ \Delta_1 |u_{N-1}^h| + \Delta_2 \} \phi_n^h \pm z_n^h.$$

Учитывая (14.16), получим, что для функции Ψ^h выполнены условия (14.15). В силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает оценку (14.13). Лемма доказана.

Лемма 14.3. Пусть при всех $n \geq M$ $A_n \geq B_n$. Тогда справедлива оценка:

$$\max_{n \geq M} |\beta_n| \leq \Delta^{-1} \max_{n \geq M} |F_n|.$$

Доказательство. Перепишем уравнение (14.8) в виде:

$$R_n^h \beta = B_n[\beta_{n+1} - \beta_n] - \{C_n - B_n - B_n \alpha_{n+1}\} \beta_n = F_n.$$

Нетрудно убедиться, что если для какой-либо сеточной функции Ψ^h выполнены условия

$$R_n^h \Psi^h \leq 0, \quad n \geq M, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n^h \geq 0, \quad (14.17)$$

то при всех $n \geq M$ $\Psi_n^h \geq 0$. Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_n^h = \Delta^{-1} \max_{n \geq M} |F_n| \pm \beta_n.$$

Для такой функции Ψ^h выполняются условия (14.17). Следовательно, при всех $n \geq M$ $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Исследуем, как влияет возмущение коэффициентов схемы (14.1)-(14.2) на α и β , которые соответствуют задачам (14.7) и (14.8).

Лемма 14.4. Пусть коэффициенты схемы (14.1)-(14.2) возмущены, при всех $n \geq M$

$$\begin{aligned} |A_n - \tilde{A}_n| &\leq \sigma, \quad |B_n - \tilde{B}_n| \leq \sigma, \quad |C_n - \tilde{C}_n| \leq \sigma, \\ A_n &\geq B_n, \quad \tilde{A}_n \geq \tilde{B}_n > 0, \quad \tilde{C}_n \geq \tilde{A}_n + \tilde{B}_n + \tilde{\Delta}, \quad \tilde{\Delta} > 0, \\ \tilde{A}_n &\rightarrow \tilde{A}^0, \quad \tilde{B}_n \rightarrow \tilde{B}^0, \quad \tilde{C}_n \rightarrow \tilde{C}^0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Пусть

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{\tilde{A}_n}{\tilde{C}_n - \tilde{B}_n \tilde{\alpha}_{n+1}}, \quad \tilde{\alpha}_n \rightarrow \tilde{\alpha}^0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \tilde{\alpha}^0 = \frac{2\tilde{A}^0}{\tilde{C}^0 + \sqrt{\tilde{C}^0 \tilde{C}^0 - 4\tilde{A}^0 \tilde{B}^0}},$$

$$\tilde{\beta}_n = \frac{\tilde{B}_n \tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{F}_n}{\tilde{C}_n - \tilde{B}_n \tilde{\alpha}_{n+1}}, \quad \tilde{\beta}_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда для некоторой постоянной C , не зависящей от σ , при всех $n \geq M$

$$|\alpha_n - \tilde{\alpha}_n| \leq C\sigma, \quad |\beta_n - \tilde{\beta}_n| \leq C\sigma. \quad (14.19)$$

Доказательство. Начнем с первой оценки в (14.19). В силу условий (14.18) $0 < \tilde{\alpha}_n < 1$. Пусть $z^h = \alpha - \tilde{\alpha}$. Тогда

$$R_n^h z^h = \tilde{\alpha}_n B_n (z_{n+1}^h - z_n^h) - (C_n - B_n \alpha_{n+1} - \tilde{\alpha}_n B_n) z_n^h = G_n^h,$$

где

$$G_n^h = \tilde{A}_n - A_n + \tilde{\alpha}_n (C_n - \tilde{C}_n) + \tilde{\alpha}_n \tilde{\alpha}_{n+1} (\tilde{B}_n - B_n).$$

Можно показать, что

$$|\alpha^0 - \tilde{\alpha}^0| \leq \frac{2\sigma}{(C^0 + \Delta)(\tilde{C}^0 + \tilde{\Delta})} \left[A^0 + 2C^0 + \frac{\tilde{C}^0 + C^0 + 4A^0 + 4\tilde{B}^0}{A^0 - B^0 + \Delta + \tilde{A}^0 - \tilde{B}^0 + \tilde{\Delta}} \right].$$

Определим $\Psi_n^h = C\sigma \pm z_n^h$. Тогда для некоторой постоянной C выполняются условия (14.17) и поэтому при всех $n \geq M$ $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает первую оценку в (14.19).

Теперь получим вторую оценку в (14.19). Пусть $z^h = \beta - \tilde{\beta}$. Тогда

$$R_n^h z^h = \tilde{B}_n (z_{n+1}^h - z_n^h) - (\tilde{C}_n - \tilde{B}_n \alpha_{n+1} - \tilde{B}_n) z_n^h = G_n^h, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^h = 0,$$

где

$$G_n^h = (\tilde{B}_n - B_n) \beta_{n+1} + F_n - \tilde{F}_n + (C_n - \tilde{C}_n) \beta_n + (\tilde{B}_n - B_n) \beta_n \alpha_{n+1} + \\ + \tilde{B}_n \beta_n (\tilde{\alpha}_{n+1} - \alpha_{n+1}).$$

В соответствии с условиями леммы $\tilde{C}_n - \tilde{B}_n \tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{B}_n \geq \tilde{\Delta}$. Теперь вторую оценку в (14.19) можно получить на основании принципа максимума. Лемма доказана.

Перейдем к вопросу приближенного нахождения α_N и β_N из задач (14.7) и (14.8). Воспользуемся леммой 14.4, согласно которой малым изменениям коэффициентов схемы (14.1)-(14.2) при $n \geq M$ соответствуют малые изменения α_n и β_n при $n \geq M$.

Исследуем два подхода для приближенного нахождения α_N и β_N .

При первом подходе исходим из предельных условий (14.4). В случае дифференциальной задачи такой подход применялся, например, в [19], для решения разностных уравнений Риккати – в [168]. Пусть при достаточно больших n ($n \geq M$) для некоторого r справедливы разложения :

$$A_n = \sum_{i=0}^r \frac{A^{(i)}}{n^i} + O\left(\frac{1}{n}\right)^{r+1}, \quad C_n = \sum_{i=0}^r \frac{C^{(i)}}{n^i} + O\left(\frac{1}{n}\right)^{r+1}, \quad A^{(0)} = A^0, \quad C^{(0)} = C^0,$$

$$B_n = \sum_{i=0}^r \frac{B^{(i)}}{n^i} + O\left(\frac{1}{n}\right)^{r+1}, \quad F_n = \sum_{i=0}^r \frac{F^{(i)}}{n^i} + O\left(\frac{1}{n}\right)^{r+1}, \quad B^{(0)} = B^0, \quad F^{(0)} = 0.$$

Тогда при $n \geq M$ α_n и β_n из (14.7)-(14.8) можно искать в виде:

$$\tilde{\alpha}_n^p = \sum_{i=0}^p \frac{\alpha_n^{(i)}}{n^i}, \quad \tilde{\beta}_n^p = \sum_{i=0}^p \frac{\beta_n^{(i)}}{n^i}, \quad p \leq r. \quad (14.20)$$

Подставляя эти разложения в (14.7),(14.8), получим рекуррентную формулу относительно коэффициентов $\alpha_n^{(i)}$ и $\beta_n^{(i)}$.

Например, в случае $p = 1$ имеем:

$$\tilde{\alpha}_N = \alpha^0 + \frac{A^{(1)} - \alpha^0(C^{(1)} - B^{(1)}\alpha^0)}{(C^0 - 2\alpha^0 B^0)N}, \quad \tilde{\beta}_N = -\frac{F^{(1)}}{(C^0 - \alpha^0 B^0 - B^0)N}.$$

Пусть при $n \geq N$ $A_n > B_n$. В соответствии с леммой 14.4 для достаточно больших N , обеспечивающих выполнение условий (14.18), для

некоторой постоянной C

$$|\alpha_N - \tilde{\alpha}_N|, |\beta_N - \tilde{\beta}_N| \leq CN^{-2}.$$

В соответствии с леммой 14.2 при всех $n \leq N$

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq CN^{-2}.$$

Точность данного подхода увеличивается с увеличением N .

Остановимся на втором подходе. При сеточной аппроксимации уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной возникает вырождающаяся разностная схема. Например, рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u'' - a(x)u' - b(x)u = f(x), \quad u(0) = G, \quad u(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad (14.21)$$

в предположении

$$a(x) \geq a_{\min} > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad b(x) \geq b_{\min} > 0, \quad a(x) \rightarrow a_0,$$

$$b(x) \rightarrow b_0, \quad f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Применяя к этой дифференциальной задаче схему направленных разностей, получим схему (14.1)-(14.2) при

$$A_n = \frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a(x_n)}{h}, \quad C_n = \frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{a(x_n)}{h} + b(x_n), \quad B_n = \frac{\varepsilon}{h^2}, \quad F_n = f(x_n). \quad (14.22)$$

Из (14.22) следует, что $B_n \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Аналогичным образом может быть рассмотрена другая монотонная разностная схема. Таким образом, разностная схема (14.1)-(14.2) в этом случае вырождается в двухточечную при стремлении параметра к нулю. Это обстоятельство можно использовать при переходе к схеме на конечном интервале.

Итак, пусть коэффициенты схемы (14.1)-(14.2) зависят от малого положительного параметра ε и для некоторого $r > 0$ справедливы разложения:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=0}^r A_n^{(i)} \varepsilon^i + O(\varepsilon^{r+1}), \quad C_n = \sum_{i=0}^r C_n^{(i)} \varepsilon^i + O(\varepsilon^{r+1}), \\ B_n &= \sum_{i=1}^r B_n^{(i)} \varepsilon^i + O(\varepsilon^{r+1}), \quad F_n = \sum_{i=0}^r F_n^{(i)} \varepsilon^i + O(\varepsilon^{r+1}). \end{aligned} \quad (14.23)$$

Рассмотрим вопрос приближенного нахождения α_n из задачи (14.7).

Пусть

$$\tilde{\alpha}_n^p = \sum_{i=0}^p \alpha_n^{(i)} \varepsilon^i, \quad p \leq r. \quad (14.24)$$

Учитывая разложения (14.23) и (14.24) в (14.7), собирая члены при одинаковых степенях параметра ε , для $i \geq 1$ получим рекуррентную формулу:

$$\alpha_n^{(i)} = \frac{1}{C_n^{(0)}} \left[A_n^{(i)} - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_n^{(j)} C_n^{(i-j)} + \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{i-j} B_n^{(j)} \alpha_n^{(k)} \alpha_{n+1}^{(i-j-k)} \right], \quad \alpha_n^{(0)} = \frac{A_n^{(0)}}{C_n^{(0)}}. \quad (14.25)$$

Итак, α_n можно искать на основе асимптотической формулы (14.24), учитывая определенное число членов этого разложения.

Теперь получим асимптотические формулы для β_n . Пусть

$$\tilde{\beta}_n^p = \sum_{i=0}^p \beta_n^{(i)} \varepsilon^i, \quad p \leq r. \quad (14.26)$$

Учитывая разложения (14.23), (14.24) и (14.26) в (14.8), собирая члены при одинаковых степенях параметра ε , для $i \geq 1$ получим рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} \beta_n^{(i)} &= \frac{1}{C_n^{(0)}} \left[-F_n^{(i)} - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_n^{(j)} C_n^{(i-j)} + \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{i-j} B_n^{(j)} \beta_n^{(k)} \alpha_{n+1}^{(i-j-k)} + \sum_{j=1}^i B_n^{(j)} \beta_{n+1}^{(i-j)} \right], \\ \beta_n^{(0)} &= -\frac{F_n^{(0)}}{C_n^{(0)}}. \end{aligned} \quad (14.27)$$

Итак, β_n может быть найдено на основе асимптотического разложения (14.26) и рекуррентной формулы (14.27) для членов этого разложения.

Лемма 14.5. Пусть при всех $n \geq M$ $A_n > B_n$, параметр ε достаточно мал. Тогда найдется постоянная C такая, что при всех $n \geq M$

$$|\alpha_n - \tilde{\alpha}_n^p| \leq C\varepsilon^{p+1}, \quad |\tilde{\beta}_n^p - \beta_n| \leq C\varepsilon^{p+1}.$$

Доказательство. При построении $\tilde{\alpha}_n^p$ и $\tilde{\beta}_n^p$ мы ограничились p членами разложения коэффициентов (14.23), поэтому $\tilde{\alpha}^p$ и $\tilde{\beta}^p$ являются решением задач (14.7), (14.8) в случае возмущенных коэффициентов схемы (14.1)-(14.2) и в условиях (14.18) выполнится $\sigma \leq C\varepsilon^{p+1}$. Параметр ε должен быть мал настолько, чтобы для схемы с возмущенными коэффициентами выполнились условия (14.18). Теперь утверждение леммы следует из леммы 14.4.

Точность расчета коэффициентов α_n и β_n повышается с увеличением числа членов асимптотического разложения и с уменьшением параметра ε . Согласно лемме 14.2 схема (14.9) устойчива к погрешностям, возникающим при расчете этих коэффициентов. Решение схемы (14.9) может быть найдено методом прогонки [145], который в силу диагонального преобладания устойчив.

Используя соотношение (14.6), исходную схему (14.1)-(14.2) можно свести к двухточечной разностной схеме:

$$u_n^h = \alpha_n u_{n-1}^h + \beta_n, \quad n \geq 1, \quad u_0^h = G. \quad (14.28)$$

Выше было показано, что предельное условие на бесконечности (14.2) для решения схемы (14.28) выполнится.

Лемма 14.6. Для решения схемы (14.28) справедлива оценка:

$$\|u^h\| \leq |G| + \max_n \frac{\Delta + A_n}{\Delta} \|\beta\|.$$

Доказательство. Перепишем схему (14.28) в виде:

$$R_n^h u^h = \alpha_n (u_n^h - u_{n-1}^h) + (1 - \alpha_n) u_n^h = \beta_n.$$

Нетрудно показать, что если для сеточной функции Ψ^h выполнены условия:

$$\Psi_0^h \geq 0, \quad R_n^h \Psi^h \geq 0, \quad n \geq 1, \quad (14.29),$$

то при всех $n \geq 0$ $\Psi_n^h \geq 0$. Определим Ψ^h :

$$\Psi_n^h = |G| + \max_n \frac{\Delta + A_n}{\Delta} \|\beta\| \pm u_n^h.$$

Для такой функции Ψ^h выполнены условия (14.29) и поэтому при всех $n \geq 0$ $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Из леммы (14.6) следует единственность решения задачи (14.28).

Покажем, что решения задач (14.1)-(14.2), (14.9) и (14.28) совпадают при всех $n = 0, 1, \dots, N$. Как показано выше, эти задачи имеют единственное решение, решение задачи (14.28) является решением задач (14.1)-(14.2) и (14.9). Теперь получаем, что решения всех трех задач совпадают при $n \leq N$.

Коэффициенты схемы (14.28) с учетом малости параметра ε могут быть найдены приближенно, согласно формулам (14.24)-(14.27). Покажем, что схема (14.28) устойчива к возмущению этих коэффициентов.

Лемма 14.7. Пусть \tilde{u}^h – решение схемы (14.28) в случае возмущенных коэффициентов $\tilde{\alpha}_n$ и $\tilde{\beta}_n$. Пусть при всех $n \geq 1$

$$|\alpha_n - \tilde{\alpha}_n| \leq \sigma, \quad |\beta_n - \tilde{\beta}_n| \leq \sigma, \quad 0 < \tilde{\alpha}_n \leq \tilde{\alpha}_{\max} < 1.$$

Тогда при всех $n \geq 0$

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq \frac{1}{1 - \tilde{\alpha}_{\max}} (1 + \|u^h\|) \sigma.$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда z^h является решением задачи:

$$R_n^h z^h = \tilde{\alpha}_n(z_n^h - z_{n-1}^h) + (1 - \tilde{\alpha}_n)z_n^h = (\alpha_n - \tilde{\alpha}_n)u_{n-1}^h + \beta_n - \tilde{\beta}_n, \quad z_0^h = 0.$$

Определим Ψ^h :

$$\Psi_n^h = \frac{1}{1 - \tilde{\alpha}_{\max}} (1 + \|u^h\|) \sigma \pm z_n^h.$$

Для такой функции Ψ^h выполнены условия (14.29) и поэтому при всех $n \geq 0$ $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Остановимся на результатах численных экспериментов. Рассмотрим схему (14.1)-(14.2) с коэффициентами из (14.22). Из разложений (14.24) и (14.26) с учетом формул (14.25) и (14.27) можно получить:

$$\tilde{\alpha}_n^0 = \frac{a_n}{a_n + b_n h}, \quad \tilde{\beta}_n^0 = -\frac{f_n h}{a_n + b_n h}, \quad \tilde{\alpha}_n^1 = \tilde{\alpha}_n^0 + \varepsilon \frac{b_n a_{n+1} - a_n b_{n+1} + b_n b_{n+1} h}{(a_n + b_n h)^2 (a_{n+1} + b_{n+1} h)},$$

$$\tilde{\beta}_n^1 = \tilde{\beta}_n^0 + \varepsilon \frac{f_n a_{n+1} - a_n f_{n+1} + 2f_n b_{n+1} h - f_{n+1} b_n h}{(a_n + b_n h)^2 (a_{n+1} + b_{n+1} h)},$$

где $a_n = a(x_n)$, $b_n = b(x_n)$, $f_n = f(x_n)$.

Если в соотношении (14.6) принять $\tilde{\alpha}_n = \tilde{\alpha}_n^0$, $\tilde{\beta}_n = \tilde{\beta}_n^0$, то (14.6) будет соответствовать вырожденной разностной схеме (14.1)-(14.2).

В численных экспериментах в качестве решения схемы (14.1)-(14.2) принималось решение схемы на достаточно длинном интервале, длины $L_0 = 100$, когда решение схемы не зависит от способа задания краевого условия.

Рассматривалось четыре способа задания краевого условия при переходе к схеме с конечным числом узлов:

- 1) $u_N^h = 0$;
- 2) $u_N^h = u_{N-1}^h$;

3) согласно (14.10) с $\tilde{\alpha}_N = \tilde{\alpha}_N^0, \tilde{\beta}_N = \tilde{\beta}_N^0;$

4) согласно (14.10) с $\tilde{\alpha}_N = \tilde{\alpha}_N^1, \tilde{\beta}_N = \tilde{\beta}_N^1.$

При проведении экспериментов предполагалось $G = 1., h = 0.1,$
 $L = 1,$ где L – длина интервала, к которому сводилась исходная разностная схема, h – шаг сетки.

Остановимся на примере:

$$a_n = 1 + \exp(-x_n), b_n = 1 + \exp(-x_n), f_n = \exp(-x_n), x_n = nh.$$

В табл. 14.1 приведена норма погрешности $s = \max_n |\tilde{u}_n^h - u_n^h|$ в зависимости от способа задания краевого условия, где u^h – решение схемы (14.1)-(14.2) на достаточно длинном интервале, \tilde{u}^h – решение схемы на интервале длины $L = 1.$ Аналогичным образом в табл. 14.1 приведена норма погрешности, возникающей при переходе от (14.1)-(14.2) к начальной задаче (14.28). При этом при расчете погрешности s u^h соответствует решению схемы (14.1)-(14.2) на достаточно длинном интервале, \tilde{u}^h соответствует решению задачи (14.28) на интервале $[0, L].$

Теперь рассмотрим пример:

$$a_n = 2 + \frac{\sin(x_n)}{x_n + 1}, b_n = 3 + \frac{\cos(x_n)}{x_n + 1}, f_n = \frac{1}{x_n + 1}, x_n = nh.$$

В табл. 14.2 приведена норма погрешности для данного случая.

Результаты вычислений подтверждают полученные оценки.

Таблица 14.1.

Способ переноса условия	ε			
	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$u_N^h = 0$	0.38	0.20	0.17	0.17
$u_N^h = u_{N-1}^h$	0.19	0.69E-1	0.47E-1	0.44E-1
в (14.10) $\tilde{\alpha}_N^0, \tilde{\beta}_N^0$	0.86E-1	0.54E-2	0.40E-3	0.38E-4
в (14.10) $\tilde{\alpha}_N^1, \tilde{\beta}_N^1$	0.11	0.62E-3	0.46E-5	0.60E-7
в (14.28) $\tilde{\alpha}_n^0, \tilde{\beta}_n^0$	0.21	0.32E-1	0.34E-2	0.34E-3
в (14.28) $\tilde{\alpha}_n^1, \tilde{\beta}_n^1$	0.23	0.30E-2	0.31E-4	0.30E-6

Таблица 14.2.

Способ переноса условия	ε			
	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$u_N^h = 0$	0.26	0.13	0.10	0.10
$u_N^h = u_{N-1}^h$	0.14	0.48E-1	0.36E-1	0.34E-1
в (14.10) $\tilde{\alpha}_N^0, \tilde{\beta}_N^0$	0.42E-1	0.24E-2	0.19E-3	0.19E-4
в (14.10) $\tilde{\alpha}_N^1, \tilde{\beta}_N^1$	0.42E-1	0.24E-3	0.19E-5	0.60E-7
в (14.28) $\tilde{\alpha}_n^0, \tilde{\beta}_n^0$	0.18	0.31E-1	0.34E-2	0.34E-3
в (14.28) $\tilde{\alpha}_n^1, \tilde{\beta}_n^1$	0.28	0.45E-2	0.50E-4	0.39E-6

Замечание. Для того, чтобы соотношение (14.6) выделяло многообразие решений схемы (14.1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности, не обязательно требовать выполнения условия строгого диагонального преобладания (14.3) при всех n . Достаточно, чтобы строгое диагональное преобладание имело место при достаточно больших n . Условие (14.3) можно заменить следующим:

$$A_n > 0, B_n > 0, C_n \geq A_n + B_n, n \geq 1, C^0 \geq A^0 + B^0 + \Delta, \Delta > 0. \quad (14.30)$$

В самом деле, из (14.6) следует:

$$u_n^h = u_0^h \prod_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \prod_{j=i+1}^n \alpha_j. \quad (14.31)$$

Докажем, что $u_n^h \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Покажем, что для $\forall \sigma > 0 \exists N$: $|u_n^h| \leq \sigma$ для $n \geq N$. Действительно, в силу того, что $\alpha^0 < \alpha_{max} < 1$, найдется M такое, что для $n \geq M$ $\alpha_n \leq \alpha_{max}$. Из (14.7) следует, что при $n < M$ $\alpha_n \leq 1$. В силу предельного условия на β_n из (14.8) следует, что для некоторой постоянной C при всех n $|\beta_n| \leq C$ и для некоторого $M_0 \geq M$ при $n \geq M_0$ $|\beta_n| \leq \sigma/(3 + 3\alpha_{max})$. Запишем (14.31) в виде:

$$u_n^h = u_0^h \prod_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^{M_0-1} \beta_i \prod_{j=i+1}^n \alpha_j + \sum_{i=M_0}^n \beta_i \prod_{j=i+1}^n \alpha_j.$$

Тогда для некоторого N и $n \geq N$

$$|u_0^h \prod_{i=1}^n \alpha_i| \leq \sigma/3, \quad \left| \sum_{i=1}^{M_0-1} \beta_i \prod_{j=i+1}^n \alpha_j \right| \leq \sigma/3.$$

Это доказывает, что при $n \geq N$ $|u_n^h| \leq \sigma$.

§15. Нелинейная трехточечная схема с постоянными коэффициентами

Рассмотрим нелинейную трехточечную схему с постоянными коэффициентами:

$$Au_{n-1}^h - Cu_n^h + Bu_{n+1}^h = F(u_n^h), \quad n > 0, \quad (15.1)$$

$$u_0^h = G, \quad u_n^h \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (15.2)$$

Предполагаем, что $F(s)$ – непрерывно дифференцируема,

$$A \geq B > 0, \quad C \geq A + B + \Delta, \quad \Delta > 0, \quad F(0) = 0, \quad F'(s) \geq 0, \quad s \in R. \quad (15.3)$$

Докажем, что при сделанных ограничениях решение задачи (15.1)-(15.2) существует и единственно. Для этого определим метод линеаризации:

$$Au_{n-1}^{k+1} - [C + M]u_n^{k+1} + Bu_{n+1}^{k+1} = F(u_n^k) - Mu_n^k, \quad n > 0,$$

$$u_0^{k+1} = G, \quad u_n^{k+1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (15.4)$$

где $u_n^0 = G/(n+1)$, $M = \max F'(s), |s| \leq |G|$. На каждом итерационном шаге задача (15.4) линейна, в соответствии с §14 ее решение существует и единственно. Используя принцип максимума, несложно показать, что если $\|u^k\| \leq |G|$, то $\|u^{k+1}\| \leq |G|$. Таким образом, при всех k $\|u^k\| \leq |G|$. Покажем, что определенный метод линеаризации сходится. Пусть $z^k = u^k - u^{k-1}$. Тогда z^k является решением задачи:

$$Az_{n-1}^{k+1} - [C + M]z_n^{k+1} + Bz_{n+1}^{k+1} = (F'(\theta_n^k) - M)z_n^k, \quad n > 0, \quad \|\theta^k\| \leq |G|,$$

$$z_0^{k+1} = 0, \quad z_n^{k+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Применяя принцип максимума, несложно показать:

$$\|z^{k+1}\| \leq \frac{M}{M + \Delta} \|z^k\|.$$

Следовательно, метод линеаризации сходится к единственному решению задачи (15.1)-(15.2).

Лемма 15.1 Сеточная функция u^h возрастает, если $G < 0$ и убывает, если $G > 0$, причем при всех $n \geq 0$

$$|u_n^h| \leq |G|q_0^n, \quad q_0 = A/(A + \Delta). \quad (15.5)$$

Доказательство. На основании теоремы Лагранжа разностное уравнение (15.1) можно записать в виде:

$$Au_{n-1}^h - [C + F'(s(u_n^h))]u_n^h + Bu_{n+1}^h = 0, \quad n > 0.$$

Учитывая условия (15.3), заключаем, что сеточная функция u^h не может иметь локального положительного максимума и отрицательного минимума. Следовательно, сеточная функция u^h либо возрастает, либо убывает. Получим оценку (15.5). Определим линейный оператор:

$$L_n^h \Psi^h = A \Psi_{n-1}^h - [C + F'(s(u_n^h))] \Psi_n^h + B \Psi_{n+1}^h, \quad n > 0.$$

Определим Ψ^h : $\Psi_n^h = |G|q_0^n \pm u_n^h$, где q_0 соответствует (15.5). Тогда выполняются условия (14.5) и в соответствии с принципом максимума, который справедлив для оператора L^h , при всех $n \geq 0$ $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает оценку (15.5). Лемма доказана.

Переход к схеме с конечным числом узлов. Перейдем к вопросу переноса краевого условия из бесконечности. Определим соотношение:

$$u_n^h = \alpha u_{n-1}^h + \gamma_n, \quad (15.6)$$

где

$$\alpha = \frac{2A}{C + F'(0) + \sqrt{[C + F'(0)]^2 - 4AB}}, \quad (15.7)$$

γ_n - решение задачи с предельным условием на бесконечности:

$$B\gamma_{n+1} - A\alpha^{-1}\gamma_n = F(u_n^h) - F'(0)u_n^h, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0. \quad (15.8)$$

Из (15.7) следует, что

$$0 < \alpha \leq \frac{A}{A + \Delta} < 1. \quad (15.9)$$

Покажем, что решение задачи (15.8) существует и единственно при всех $n > 0$. Это следует из того, что задачу (15.8) можно записать в виде:

$$\gamma_n = \tau \gamma_{n+1} + g_n, \quad \gamma_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \tau < 1, \quad g_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Далее доказательство можно провести по аналогии с анализом задачи (14.8).

Учитывая соотношения (15.8), можно показать, что если сеточная функция u^h удовлетворяет (15.6), то она удовлетворяет (15.1). С другой стороны, учитывая (15.8), (15.9), можно показать, что если u^h удовлетворяет (15.6), то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^h = 0$. Таким образом, соотношение (15.6) выделяет многообразие решений схемы (15.1), удовлетворяющие предельному условию на бесконечности (15.2). Используя соотношение (15.6), задачу (15.1)-(15.2) можно свести к конечному числу узлов:

$$\begin{aligned} Au_{n-1}^h - Cu_n^h + Bu_{n+1}^h &= F(u_n^h), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0^h &= G, \quad u_N^h - \alpha u_{N-1}^h = \gamma_N, \end{aligned} \quad (15.10)$$

где γ_N является решением задачи (15.8) при $n = N$. Определив начальную задачу:

$$u_n^h = \alpha u_{n-1}^h + \gamma_n, \quad u_0^h = G, \quad (15.11)$$

можно показать, что решения задач (15.1)-(15.2), (15.10) и (15.11) совпадают при всех $n \leq N$.

Пусть функция $F''(s)$ непрерывна, $Q = \max |F''(s)|$, $|s| \leq |G|$.

Перейдем от (15.10) к разностной схеме:

$$A\tilde{u}_{n-1}^h - C\tilde{u}_n^h + B\tilde{u}_{n+1}^h = F(\tilde{u}_n^h), \quad \tilde{u}_0^h = G, \quad \tilde{u}_N^h - \alpha\tilde{u}_{N-1}^h = 0. \quad (15.12)$$

Лемма 15.2. При переходе от (15.10) к (15.12) справедлива оценка погрешности:

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq C \left(\frac{A}{B}\right)^{n-N} \left(\frac{A}{A+\Delta}\right)^{2N}, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (15.13)$$

Доказательство. Используя принцип максимума применительно

к задаче (15.8), можно получить:

$$\max_{n \geq M} |\gamma_n| \leq \frac{\alpha}{A - \alpha B} \frac{Q}{2} \max_{n \geq M} |u_n^h|^2.$$

Учитывая оценку (15.5), получим:

$$\max_{n \geq M} |\gamma_n| \leq \frac{\alpha}{A - \alpha B} \frac{Q}{2} |G| q_0^{2M}. \quad (15.14)$$

Определим $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда z^h является решением задачи:

$$\begin{aligned} L_n^h z^h &= A z_{n-1}^h - \{C + F'(\theta_n^h)\} z_n^h + B z_{n+1}^h = 0, \quad 0 < n < N, \\ z_0^h &= 0, \quad D^h z^h = z_N^h - \alpha z_{N-1}^h = \gamma_N. \end{aligned} \quad (15.15)$$

Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_n^h = C \left(\frac{A}{B}\right)^{n-N} \left(\frac{A}{A+\Delta}\right)^{2N} \pm z_n^h, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Для оператора, соответствующего задаче (15.15), для некоторой постоянной C выполняются условия (14.15). В силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Рассмотрим случай перехода от (15.1)-(15.2) к задаче:

$$\begin{aligned} A \tilde{u}_{n-1}^h - C \tilde{u}_n^h + B \tilde{u}_{n+1}^h &= F(\tilde{u}_n^h), \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \\ \tilde{u}_0^h &= G, \quad \tilde{u}_N^h = 0. \end{aligned} \quad (15.16)$$

Используя оценку (15.5) и принцип максимума, можно показать, что в случае задачи (15.16)

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq |G| \left(\frac{A}{B}\right)^{n-N} \left(\frac{A}{A+\Delta}\right)^N, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Учет вырождения разностной схемы. При разностной аппроксимации нелинейного автономного уравнения второго порядка с малым

параметром ε при старшей производной на полубесконечном интервале возникает задача (15.1)-(15.2), причем $B \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Итак, пусть $B \ll 1$. Определим в этом случае приближенное решение задачи (15.8):

$$\gamma_n^0 = -\frac{\alpha}{A}[F(u_n^h) - F'(0)u_n^h].$$

На основании принципа максимума можно показать, что для некоторой постоянной C_0

$$|\gamma_n - \gamma_n^0| \leq C_0 B \left(\frac{A}{A + \Delta} \right)^{2n+2}. \quad (15.17)$$

Перейдем от (15.10) к задаче:

$$\begin{aligned} A\tilde{u}_{n-1}^h - C\tilde{u}_n^h + B\tilde{u}_{n+1}^h &= F(\tilde{u}_n^h), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ \tilde{u}_0^h &= G, \quad \tilde{u}_N^h - \alpha\tilde{u}_{N-1}^h = \tilde{\gamma}_N. \end{aligned} \quad (15.18)$$

Лемма 15.3. При переходе от (15.10) к (15.18) справедлива оценка погрешности:

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq \frac{A}{A - \alpha B} \left(\frac{A}{B} \right)^{n-N} |\gamma_N - \tilde{\gamma}_N|. \quad (15.19)$$

Утверждение леммы несложно получить на основе принципа максимума, сформировав краевую задачу относительно $z^h = u^h - \tilde{u}^h$.

Зададим в (15.18) $\tilde{\gamma}_N = \gamma_N^0$:

$$\begin{aligned} A\tilde{u}_{n-1}^h - C\tilde{u}_n^h + B\tilde{u}_{n+1}^h &= F(\tilde{u}_n^h), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ \tilde{u}_0^h &= G, \quad \tilde{u}_N^h - \alpha\tilde{u}_{N-1}^h = -\frac{\alpha}{A}[F(\tilde{u}_N^h) - F'(0)\tilde{u}_N^h]. \end{aligned} \quad (15.20).$$

В соответствии с оценками (15.17),(15.19)

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq C_0 B \left(\frac{A}{B} \right)^{n-N} \left(\frac{A}{A + \Delta} \right)^{2N+2}.$$

Для нахождения решения схемы (15.20) определим метод линеаризации:

$$Au_{n-1}^{k+1} - [C + F'(0)]u_n^{k+1} + Bu_{n+1}^{k+1} = F(u_n^k) - F'(0)u_n^k, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$u_0^{k+1} = G, \quad u_N^{k+1} - \alpha u_{N-1}^{k+1} = -\frac{\alpha}{A}[F(u_N^k) - F'(0)u_N^k].$$

Используя принцип максимума, можно показать, что для некоторой постоянной C_0 $\|u^{k+1} - u^h\| \leq C_0 \|u^k - u^h\|^2$.

Рассмотрим возможность перехода от задачи (15.1)-(15.2) к начальной:

$$AV_{n-1}^h - CV_n^h = F(V_n^h), \quad V_0^h = G. \quad (15.21)$$

Нетрудно убедиться, что $V_n^h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Используя принцип максимума, можно показать, что

$$\|u^h - V^h\| \leq B|G|/\Delta.$$

Задача (15.21) может быть решена на основе линеаризации:

$$AV_{n-1}^{k+1} - [C + F'(0)]V_n^{k+1} = F(V_n^k) - F'(0)V_n^k, \quad V_0^{k+1} = G.$$

Можно показать, что

$$\|V^{k+1} - V^h\| \leq Q/(2\Delta) \|V^k - V^h\|^2.$$

§16. Нелинейная трехточечная схема с переменными коэффициентами

Рассмотрим трехточечную схему с переменными коэффициентами:

$$A_n u_{n-1}^h - C_n u_n^h + B_n u_{n+1}^h = F(u_n^h) + f_n, \quad n > 0, \quad (16.1)$$

$$u_0^h = G, \quad u_n^h \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (16.2)$$

Предполагаем, что при всех n

$$A_n > 0, \quad B_n > 0, \quad C_n \geq A_n + B_n + \Delta, \quad \Delta > 0, \quad F(0) = 0, \quad F'(s) \geq 0, \quad s \in R. \quad (16.3)$$

$$A_n \rightarrow A^0, \quad B_n \rightarrow B^0, \quad C_n \rightarrow C^0, \quad f_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (16.4)$$

По аналогии с предыдущим параграфом можно показать, что решение задачи (16.1)-(16.2) при сделанных ограничениях существует и единственно.

Лемма 16.1. Справедлива оценка:

$$\max_n |u_n^h| \leq \Delta^{-1} \max_n |f_n| + |G|. \quad (16.5)$$

Доказательство леммы нетрудно получить, используя принцип максимума.

Остановимся на вопросе переноса краевого условия из бесконечности. Выделим многообразие решений схемы (16.1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности:

$$u_n^h = \alpha u_{n-1}^h + \gamma_n, \quad (16.6)$$

где

$$\alpha = \frac{2A^{(0)}}{C^{(0)} + F'(0) + \sqrt{[C^{(0)} + F'(0)]^2 - 4A^{(0)}B^{(0)}}}, \quad (16.7)$$

γ_n - решение задачи с предельным условием на бесконечности:

$$B_n \gamma_{n+1} - A_n \alpha^{-1} \gamma_n = F(u_n^h) - F'(0)u_n^h + \left[\frac{A^{(0)} - A_n}{\alpha} + C_n - C^0 + (B^0 - B_n)\alpha \right] u_n^h + f_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0. \quad (16.8)$$

Из (16.7) можно получить

$$0 < \alpha \leq \frac{A^{(0)}}{A^{(0)} + \Delta} < 1. \quad (16.9)$$

По аналогии с §16 можно показать, что решение задачи (16.8) существует и единственно при всех $n > 0$.

Из (16.6) следует, что $u_n^h \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Соотношение (16.6) выделяет многообразие решений схемы (16.1), удовлетворяющих предельному условию (16.2) на бесконечности.

Используя соотношение (16.6), перейдем к разностной схеме с конечным числом узлов:

$$\begin{aligned} A_n \tilde{u}_{n-1}^h - C_n \tilde{u}_n^h + B_n \tilde{u}_{n+1}^h &= F(\tilde{u}_n^h) + f_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \\ \tilde{u}_0^h &= G, \quad \tilde{u}_N^h - \alpha \tilde{u}_{N-1}^h = 0. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Лемма 16.2 Пусть

$$q = \min_n \frac{A_n}{B_n} \geq 1.$$

Тогда при переходе от (16.1)-(16.2) к (16.10) справедлива оценка погрешности:

$$\begin{aligned} |u_n^h - \tilde{u}_n^h| &\leq \frac{q}{q - \alpha} \max_{k \geq N} \frac{\alpha}{A_k - \alpha B_k} q^{n-N} \max_{k \geq N} \left\{ \frac{\max_s |F''(s)|}{2} |u_k^h|^2 + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{|A^{(0)} - A_k|}{\alpha} + |C_k - C^0| + |B^0 - B_k| \alpha \right] |u_k^h| + |f_k| \right\}, \quad 0 \leq n \leq N. \end{aligned} \quad (16.11)$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда z^h является решением задачи:

$$\begin{aligned} L_n^h z^h &= A_n u_{n-1}^h - \{C_n + F'(\theta_n^h)\} u_n^h + B_n u_{n+1}^h = 0, \quad 0 < n < N, \\ z_0^h &= 0, \quad D^h z^h = z_N^h - \alpha z_{N-1}^h = \gamma_N. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Если записать задачу (16.8) в виде:

$$B_n \gamma_{n+1} - A_n \alpha^{-1} \gamma_n = \Phi_n^h, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0,$$

то на основании принципа максимума можно получить:

$$|\gamma_N| \leq \max_{n \geq N} \frac{\alpha}{A_n - \alpha B_n} \max_{n \geq N} |\Phi_n^h|.$$

Определим сеточную функцию:

$$\Psi_n^h = \frac{q}{q - \alpha} \max_{k \geq N} \frac{\alpha}{A_k - \alpha B_k} \max_{k \geq N} |\Phi_k^h| q^{n-N} \pm z_n^h.$$

Тогда

$$L_n^h \Psi^h \leq 0, \quad 0 < n < N, \quad \Psi_0^h \geq 0, \quad D^h \Psi^h \geq 0. \quad (16.13)$$

В силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Случай вырождения разностной схемы. Рассмотрим случай вырождающейся разностной схемы (16.1)-(16.2), когда при всех n $B_n = \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$. Схема (16.1)-(16.2) в этом случае принимает вид:

$$A_n u_{n-1}^h - C_n u_n^h + \varepsilon u_{n+1}^h = F(u_n^h) + f_n, \quad n > 0, \quad (16.14)$$

$$u_0^h = G, \quad u_n^h \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (16.15)$$

Предполагаем справедливыми ограничения (16.3)-(16.4). Перейдем от (16.14)-(16.15) к схеме на конечном интервале:

$$A_n \tilde{u}_{n-1}^h - C_n \tilde{u}_n^h + \varepsilon \tilde{u}_{n+1}^h = F(\tilde{u}_n^h) + f_n, \quad n > 0,$$

$$\tilde{u}_0^h = G, \quad A_N \tilde{u}_{N-1}^h - C_N \tilde{u}_N^h = F(\tilde{u}_N^h) + f_N. \quad (16.16)$$

Лемма 16.3 Пусть при всех n $A_n \geq \varepsilon$. Тогда при всех $0 \leq n \leq N$

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq \frac{|u_{N+1}^h| \varepsilon}{C_N - \varepsilon A_N A_{\min}^{-1}} \left(\frac{A_{\min}}{\varepsilon} \right)^{n-N}, \quad A_{\min} = \min_{n \leq N} A_n.$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда z^h является решением краевой задачи:

$$A_n z_{n-1}^h - \{C_n + F'(\theta_n^h)\} z_n^h + \varepsilon z_{n+1}^h = 0,$$

$$z_0^h = 0, D^h z^h = \{C_N + F'(\theta_N^h)\} z_N^h - A_N z_{N-1}^h = \varepsilon u_{N+1}^h. \quad (16.17)$$

Определим сеточную функцию:

$$\Psi_n^h = \frac{|u_{N+1}^h| \varepsilon}{C_N - \varepsilon A_N A_{\min}^{-1}} \left(\frac{A_{\min}}{\varepsilon} \right)^{n-N} \pm z_n^h.$$

Тогда для оператора задачи (16.16) и функции Ψ^h будут выполнены условия (16.13). В силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Согласно лемме 16.3 точность переноса краевого условия увеличивается с уменьшением параметра ε . Погрешность экспоненциально уменьшается при удалении от границы, если $A_{\min} > \varepsilon$.

§17. Трехточечная векторная схема с полубесконечным числом узлов

При сеточной аппроксимации эллиптических уравнений второго порядка с малым параметром при старших производных в полубесконечной полосе возникает трехточечная векторная система уравнений с полубесконечным числом узлов. При численной реализации такой системы возникает проблема перехода к системе с конечным числом узлов. В данном параграфе осуществляется переход к конечному числу

узлов на основе выделения многообразия решений, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности.

Рассмотрим трехточечную векторную разностную схему:

$$\mathbf{L}_i \mathbf{U} = \mathbf{C}_i \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad i \geq 1, \quad (17.1)$$

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{R}, \quad \mathbf{U}_i \rightarrow \mathbf{0}, \quad i \rightarrow \infty. \quad (17.2)$$

Предполагаем, что при каждом i \mathbf{U}_i , \mathbf{F}_i , \mathbf{R} - векторы из N компонент, \mathbf{C}_i , \mathbf{D}_i - ненулевые неотрицательные диагональные матрицы порядка N , матрицы \mathbf{G}_i являются M - матрицами ([40], стр. 269),

$$\mathbf{C}_i \rightarrow \mathbf{C}_\infty, \quad \mathbf{G}_i \rightarrow \mathbf{G}_\infty, \quad \mathbf{D}_i \rightarrow \mathbf{D}_\infty, \quad \mathbf{F}_i \rightarrow \mathbf{0}, \quad i \rightarrow \infty,$$

$$\|\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{C}_i\| + \|\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{D}_i\| \leq \sigma < 1, \quad (17.3)$$

$$\mathbf{C}_i \geq \mathbf{D}_i \geq 0, \quad \mathbf{Q}_i = \mathbf{G}_i - \mathbf{C}_i - \mathbf{D}_i,$$

$$Q_i^{j,j} \geq \sum_{k \neq j} |Q_i^{j,k}| + \Delta, \quad \Delta > 0, \quad i > 0, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (17.4)$$

Докажем, что при сформулированных условиях для оператора \mathbf{L} справедлив принцип максимума.

Лемма 17.1. Пусть для сеточной вектор- функции Ψ выполнены условия:

$$\Psi_0 \geq 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \Psi_i \geq 0, \quad \mathbf{L}_i \Psi \leq 0, \quad i \geq 1. \quad (17.5)$$

Тогда при всех i $\Psi_i \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что для некоторых i и j оказалось $\Psi_i^j < 0$. Без ограничения общности можно считать, что (i, j) - координаты точки локального минимума. Воспользуемся условиями (17.4) и получим:

$$(\mathbf{L}_i \Psi)^j = C_i^{j,j} (\Psi_{i-1}^j - \Psi_i^j) + D_i^{j,j} (\Psi_{i+1}^j - \Psi_i^j) -$$

$$-\sum_{k=1}^N G_i^{j,k} (\Psi_i^k - \Psi_i^j) - \Psi_i^j \sum_{k=1}^N (G_i^{j,k} - C_i^{j,k} - D_i^{j,k}) > 0.$$

Получили противоречие с условиями (17.5). Это доказывает лемму.

Используя лемму 17.1, можно показать, что при сделанных ограничениях решение задачи (17.1)-(17.2) единственно и для него справедлива оценка:

$$\max_i \|\mathbf{U}_i\| \leq \|\mathbf{R}\| + \Delta^{-1} \max_i \|\mathbf{F}_i\|.$$

Определим способ сведения схемы (17.1)-(17.2) к схеме с конечным числом узлов. Для рассматриваемой схемы определим двухточечное соотношение, соответствующее методу левой матричной прогонки, начальные условия для прогоночных коэффициентов определим предельным условием на бесконечности. Это соотношение задаст многообразие решений схемы (17.1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Итак, выпишем это соотношение:

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{B}_i, \quad (17.6)$$

где матрицы \mathbf{A}_i и векторы \mathbf{B}_i связаны рекуррентными соотношениями:

$$\mathbf{A}_i = (\mathbf{G}_i - \mathbf{D}_i \mathbf{A}_{i+1})^{-1} \mathbf{C}_i \quad \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}_\infty, \quad i \rightarrow \infty, \quad (17.7)$$

$$\mathbf{D}_i (\mathbf{B}_{i+1} - \mathbf{B}_i) - [\mathbf{G}_i - \mathbf{D}_i - \mathbf{D}_i \mathbf{A}_{i+1}] \mathbf{B}_i = \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{B}_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad (17.8)$$

матрица \mathbf{A}_∞ является решением уравнения:

$$\mathbf{D}_\infty \mathbf{A}^2 - \mathbf{G}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{C}_\infty = 0 \quad (17.9)$$

с нормой, меньшей единицы.

Остановимся на вопросе выбора \mathbf{A}_∞ из (17.9). Из (17.9) следует:

$$p \|\mathbf{A}\|^2 - \|\mathbf{A}\| + q \geq 0, \quad p = \|\mathbf{G}_\infty^{-1} \mathbf{D}_\infty\|, \quad q = \|\mathbf{G}_\infty^{-1} \mathbf{C}_\infty\|.$$

Согласно сделанным ограничениям $p > 0$, $q > 0$, $p + q \leq \sigma < 1$. Нетрудно показать, что $1 - 4pq > (p - q)^2$. Из квадратичного неравенства следует, что $\|\mathbf{A}\|$ ограничена либо снизу, либо сверху. В качестве решения уравнения (17.9) принимаем ту матрицу, норма которой ограничена сверху.

Покажем, что в этом случае $\|\mathbf{A}_\infty\| < \sigma$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_\infty\| &\leq \frac{2q}{1 + \sqrt{1 - 4pq}}, \quad 1 + \sqrt{1 - 4pq} \geq 1 + \sqrt{(p + q + 1 - \sigma)^2 - 4pq} = \\ &= 1 + \sqrt{(p - q)^2 + (1 - \sigma)^2 + 2(p + q)(1 - \sigma)} \geq \\ &\geq 1 + |p - q| + 1 - \sigma \geq p + q + 2(1 - \sigma) + |p - q|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{A}_\infty\| \leq \frac{2q}{p + q + 2(1 - \sigma) + |p - q|} \leq \frac{q}{q + 1 - \sigma}.$$

Для получения последнего неравенства рассмотрены случаи $p \geq q$ и $p < q$. Учитывая, что $q < \sigma < 1$, теперь нетрудно показать, что

$$\frac{q}{q + 1 - \sigma} < \sigma.$$

Итак, $\|\mathbf{A}_\infty\| < \sigma$.

В случае, когда $\|\mathbf{D}_\infty\| \ll 1$, ниже построим такую матрицу на основе асимптотических разложений.

Лемма 17.2. Пусть $\{\mathbf{A}_i\}$ решение задачи (17.7). Тогда при всех $i > 0$

$$\|\mathbf{A}_i\| \leq \sigma < 1.$$

Доказательство. В силу предельного условия на бесконечности найдется M такое, что для $i \geq M$ $\|\mathbf{A}_i\| \leq \sigma$. Для $i < M$ доказательство проводим по индукции по i по аналогии с ([147], стр. 107).

Пусть $\|\mathbf{A}_{i+1}\| \leq \sigma$. Оценим $\|\mathbf{A}_i\|$. Имеем:

$$\mathbf{A}_i = (I - \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{D}_i \mathbf{A}_{i+1})^{-1} \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{C}_i,$$

где I - единичная матрица. Воспользуемся неравенством ([40], стр. 110):

$$\|(I - \mathbf{Z})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{Z}\|},$$

если $\|\mathbf{Z}\| < 1$. Тогда получим:

$$\|\mathbf{A}_i\| \leq \frac{\|\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{C}_i\|}{1 - \|\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{D}_i \mathbf{A}_{i+1}\|} \leq \sigma.$$

Итак, показали, что $\|\mathbf{A}_i\| \leq \sigma$. Это доказывает лемму.

Докажем, что решение нелинейной задачи (17.7) существует и единственно при всех $i > 0$. Определим $\mathbf{Z}_i = \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_\infty$. Тогда $\{\mathbf{Z}_i\}$ является решением матричного уравнения Риккати с предельным условием на бесконечности:

$$(\mathbf{G}_i - \mathbf{D}_i \mathbf{A}_\infty) \mathbf{Z}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{Z}_{i+1} + \mathbf{D}_i \mathbf{Z}_i \mathbf{Z}_{i+1} + \mathbf{P}_i, \quad \mathbf{Z}_i \rightarrow \mathbf{0}, \quad i \rightarrow \infty,$$

где

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_\infty + (\mathbf{G}_\infty - \mathbf{G}_i) \mathbf{A}_\infty + (\mathbf{D}_i - \mathbf{D}_\infty) \mathbf{A}_\infty.$$

В соответствии с условиями (17.4) $\|(\mathbf{G}_i - \mathbf{D}_i \mathbf{A}_\infty)^{-1} \mathbf{D}_i\| < 1$, поэтому согласно [168] при достаточно больших i ($i \geq I$) решение задачи для матричного уравнения Риккати существует и единственно, откуда следует существование и единственность решения задачи (17.7) при $i \geq I$, при этом в силу предельного условия на бесконечности $\|\mathbf{A}_i\| < 1$. При $i < I$ \mathbf{A}_i определяем посредством соотношения (17.7), используя то, что \mathbf{A}_{i+1} определено и $\|\mathbf{A}_{i+1}\| < 1$. Как это следует из доказательства леммы 17.2, при этом выполнится $\|\mathbf{A}_i\| < 1$.

Доказать однозначную разрешимость задачи (17.8) можно по аналогии со скалярным случаем (§14.)

Нетрудно показать, что если сеточная вектор-функция \mathbf{U} удовлетворяет (17.6), то она удовлетворяет (17.1). Теперь покажем, что если \mathbf{U} удовлетворяет (17.6), то для \mathbf{U} выполнится предельное условие на бесконечности (17.2). Из (17.6) следует:

$$\|\mathbf{U}_i\| \leq \sigma^i \|\mathbf{U}_0\| + \sum_{k=1}^i \sigma^{i-k} \|\mathbf{B}_k\|.$$

Учитывая, что $\|\mathbf{B}_i\| \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, получим $\|\mathbf{U}_i\| \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$.

Таким образом, соотношение (17.6) выделяет многообразие решений схемы (17.1), стремящихся к нулю при $i \rightarrow \infty$.

Рассмотрим линейный оператор:

$$\mathbf{S}_i \mathbf{Z} = \mathbf{D}_i (\mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{Z}_i) - \mathbf{M}_i \mathbf{Z}_i,$$

где матрицы \mathbf{M}_i имеют строгое диагональное преобладание:

$$M_i^{j,j} (1 - \eta) \geq \sum_{k \neq j} |M_i^{j,k}|, \quad 0 < \eta < 1, \quad M_i^{j,j} \geq \theta > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (17.10)$$

Лемма 17.3. Пусть выполнены условия (17.10). Тогда для произвольной сеточной вектор - функции \mathbf{Z} , имеющей предел на бесконечности, справедлива оценка:

$$\max_{i \geq K} \|\mathbf{Z}_i\| \leq \eta^{-1} \{ \theta^{-1} \max_{i \geq K} \|\mathbf{S}_i \mathbf{Z}\| + \|\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{Z}_i\| \}.$$

Доказательство. Определим для произвольного j :

$$T_i \mathbf{Z}^j = D_i^{j,j} (Z_{i+1}^j - Z_i^j) - M_i^{j,j} Z_i^j = (\mathbf{S}_i \mathbf{Z})^j + \sum_{k \neq j} M_i^{j,k} Z_i^k.$$

Рассуждениями от противного можно убедиться, что для оператора T справедлив принцип максимума, в соответствии с которым для произ-

вольной сеточной функции Ψ из условий:

$$T_i \Psi \leq 0, \quad i \geq K, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \Psi_i \geq 0 \quad (17.11)$$

следует $\Psi_i \geq 0, \quad i \geq K$. Определим

$$\Psi_i = \theta^{-1} \max_{i \geq K} \|\mathbf{S}_i \mathbf{Z}\| + \max_{i \geq K} \|\mathbf{Z}_i\| (1 - \eta) + \|\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{Z}_i\| \pm Z_i^j.$$

Нетрудно убедиться, что для функции Ψ выполнены условия (17.11). В силу принципа максимума при всех $i \geq K$ $\Psi_i \geq 0$. Учитывая условия (17.10), получим утверждение леммы.

Лемма 17.4. Для решения задачи (17.8) справедлива оценка:

$$\max_{i \geq K} \|\mathbf{B}_i\| \leq \frac{C_0}{\Delta} \max_{i \geq K} \|\mathbf{F}_i\|, \quad K \geq 1.$$

Доказательство. Введем матрицы

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{G}_i - \mathbf{D}_i - \mathbf{D}_i \mathbf{A}_{i+1}.$$

Учитывая, что $\|\mathbf{A}_i\| < 1$, можно показать, что для матриц \mathbf{P}_i выполнены условия (10) при

$$\theta = \min P_i^{j,j}, \quad \eta = \frac{\Delta}{\max P_i^{j,j}}.$$

Теперь утверждение леммы следует из леммы 17.3 .

С учетом соотношения (17.6) перейдем от (17.1)-(17.2) к разностной схеме с конечным числом узлов:

$$\mathbf{C}_i \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, M - 1,$$

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{R}, \quad \mathbf{U}_M - \mathbf{A}_M \mathbf{U}_{M-1} = \mathbf{B}_M, \quad (17.12)$$

где матрица \mathbf{A}_M находится из (17.7), \mathbf{B}_M - решение задачи (17.8) при $i = M$. Коэффициенты \mathbf{A}_M и \mathbf{B}_M из соответствующих задач могут

быть найдены приближенно. Исследуем, как погрешности в задании \mathbf{A}_M и \mathbf{B}_M влияют на решение схемы (17.12).

Теорема 17.1. Пусть $\tilde{\mathbf{U}}$ – решение схемы (17.12) в случае возмущенных $\tilde{\mathbf{A}}_M, \tilde{\mathbf{B}}_M$. Пусть

$$\|\tilde{\mathbf{A}}_M - \mathbf{A}_M\| \leq \Delta_1, \quad \|\tilde{\mathbf{B}}_M - \mathbf{B}_M\| \leq \Delta_2, \quad \|\tilde{\mathbf{A}}_M\| < 1.$$

Тогда

$$\max_i \|\tilde{\mathbf{U}}_i - \mathbf{U}_i\| \leq \frac{1}{1 - \|\tilde{\mathbf{A}}_M\|} \{\Delta_1 \|\mathbf{U}_{M-1}\| + \Delta_2\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{Z}_i = \mathbf{U}_i - \tilde{\mathbf{U}}_i$. Тогда \mathbf{Z} является решением краевой задачи:

$$\mathbf{L}_i \mathbf{Z} = \mathbf{C}_i \mathbf{Z}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{Z}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{Z}_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$\mathbf{Z}_0 = 0, \quad \mathbf{Z}_M = \tilde{\mathbf{A}}_M \mathbf{Z}_{M-1} + (\mathbf{A}_M - \tilde{\mathbf{A}}_M) \mathbf{U}_{M-1} + \mathbf{B}_M - \tilde{\mathbf{B}}_M.$$

Как это следует из леммы 17.1, для оператора \mathbf{L} справедлив принцип максимума (переход к конечному числу узлов по i принципа максимума не нарушает). Определим сеточную вектор- функцию Ψ :

$$\Psi_i^j = \Delta_1 \|\mathbf{U}_{M-1}\| + \Delta_2 + \|\tilde{\mathbf{A}}_M\| \max_i \|\mathbf{Z}_i\| \pm Z_i^j.$$

Тогда

$$\Psi_0 \geq 0, \quad \Psi_M \geq 0, \quad \mathbf{L}_i \Psi \leq 0, \quad 0 < i < M.$$

В силу принципа максимума при всех i $\Psi_i \geq 0$. Следовательно,

$$\max_i \|\mathbf{Z}_i\| \leq \Delta_1 \|\mathbf{U}_{M-1}\| + \Delta_2 + \|\tilde{\mathbf{A}}_M\| \max_i \|\mathbf{Z}_i\|.$$

Это доказывает теорему.

Итак, схема (17.12) устойчива к погрешностям в \mathbf{A}_M и \mathbf{B}_M , если $\|\tilde{\mathbf{A}}_M\| < 1$.

Если от (17.12) перейти к разностной схеме:

$$\mathbf{C}_i \tilde{\mathbf{U}}_{i-1} - \mathbf{G}_i \tilde{\mathbf{U}}_i + \mathbf{D}_i \tilde{\mathbf{U}}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{R}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_M - \mathbf{A}_M \tilde{\mathbf{U}}_{M-1} = 0,$$

то согласно лемме 17.4 и теореме 17.1 выполнится:

$$\max_i \|\tilde{\mathbf{U}}_i - \mathbf{U}_i\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}_M\|} \frac{C_0}{\Delta} \max_{i \geq M} \|\mathbf{F}_i\|. \quad (17.13)$$

При сеточной аппроксимации эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных в полубесконечной полосе, если записать схему в векторном виде, получается вырождающаяся разностная схема вида (17.1)-(17.2). То обстоятельство, что схема вырождается при стремлении некоторого параметра к нулю, можно использовать при редукции схемы к конечному числу узлов.

Например, рассмотрим эллиптическое уравнение в полубесконечной полосе:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y)u = f(x, y)$$

с нулевыми граничными условиями вдоль полосы и предельным нулевым условием на бесконечности, в предположении, что

$$\varepsilon, a, b > 0, \quad c(x, y) \geq c_0 > 0,$$

$c(x, y)$ имеет предел при $x \rightarrow \infty$. Применение схемы направленных разностей приводит к пятиточечной схеме:

$$A u_{i,j-1}^h + B u_{i,j+1}^h + C u_{i-1,j}^h + D u_{i+1,j}^h - E_{i,j} u_{i,j}^h = F_{i,j},$$

$$i \geq 1, \quad 1 \leq j \leq N; \quad u_{i,0}^h = 0, \quad u_{i,N+1}^h = 0, \quad i \geq 0, \quad u_{0,j}^h = R_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, N, \quad u_{i,j}^h \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty, \quad (17.14)$$

где:

$$A = \frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h}, \quad B = D = \frac{\varepsilon}{h^2}, \quad C = \frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{b}{h}, \quad E_{i,j} = \frac{4\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h} + \frac{b}{h} + c(x_i, y_j).$$

Схему (17.14) можно привести к виду (17.1)-(17.2), где \mathbf{C}_i и \mathbf{D}_i – постоянные диагональные матрицы (на диагоналях C и D), матрица \mathbf{G}_i имеет вид:

$$\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} E_{i1} & -B & 0 & \dots & 0 \\ -A & E_{i2} & -B & \dots & 0 \\ 0 & -A & E_{i3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -B \\ 0 & 0 & \dots & -A & E_{iN} \end{pmatrix}.$$

Условия (17.3)-(17.4) для данной задачи выполнены, причем при всех i $\|\mathbf{D}_i\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Итак, пусть в (17.1) матрица \mathbf{D}_i становится нулевой при стремлении некоторого параметра ε к нулю.

Сначала остановимся на вопросе редуцирования схемы (17.1)-(17.2) к конечному числу узлов без учета соотношения (17.6).

Перейдем от (17.1)-(17.2) к схеме с конечным числом узлов:

$$\mathbf{C}_i \tilde{\mathbf{U}}_{i-1} - \mathbf{G}_i \tilde{\mathbf{U}}_i + \mathbf{D}_i \tilde{\mathbf{U}}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad 0 < i < M,$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{R}, \quad \mathbf{C}_M \tilde{\mathbf{U}}_{M-1} - \mathbf{G}_M \tilde{\mathbf{U}}_M = \mathbf{F}_M.$$

В качестве правого краевого условия принято вырожденное разностное уравнение при $i = M$.

Лемма 17.5. Пусть при всех i $\|\mathbf{D}_i\| \leq \varepsilon$. Тогда при всех $i = 1, 2, \dots, M$

$$\|\mathbf{U}_i - \tilde{\mathbf{U}}_i\| \leq \frac{1}{1 - \sigma} \|\mathbf{G}_M^{-1}\| \times \|\mathbf{U}_{M+1}\| \varepsilon. \quad (17.15)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{Z}_i = \mathbf{U}_i - \tilde{\mathbf{U}}_i$. Тогда \mathbf{Z} является решением краевой задачи:

$$\mathbf{L}_i \mathbf{Z} = \mathbf{C}_i \mathbf{Z}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{Z}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{Z}_{i+1} = \mathbf{0}, \quad 0 < i < M,$$

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Z}_M = \mathbf{G}_M^{-1} \mathbf{C}_M \mathbf{Z}_{M-1} + \mathbf{G}_M^{-1} \mathbf{D}_M \mathbf{U}_{M+1}. \quad (17.16)$$

Определим Ψ_i с компонентами:

$$\Psi_i^j = \|\mathbf{G}_M^{-1} \mathbf{C}_M\| \times \|\mathbf{Z}_{M-1}\| + \|\mathbf{G}_M^{-1}\| \times \|\mathbf{U}_{M+1}\| \varepsilon \pm \mathbf{Z}_i^j.$$

Тогда

$$\mathbf{L}_i \Psi \leq \mathbf{0}, \quad 0 < i < M \quad \Psi_0 \geq \mathbf{0}, \quad \Psi_M \geq \mathbf{0}.$$

Используя принцип максимума, получим, что при всех i $\Psi_i \geq \mathbf{0}$. Это доказывает лемму.

В (17.15) используется $\|\mathbf{G}_M^{-1}\|$. Учитывая, что матрицы \mathbf{G}_i являются M - матрицами со строгим диагональным преобладанием, можно показать, что

$$\|\mathbf{G}_i^{-1}\| \leq \frac{1}{\Delta} \max_j G_i^{jj} / \min_j G_i^{jj}.$$

Теперь перейдем от краевой задачи (17.1)-(17.2) к начальной:

$$\mathbf{L}_i \mathbf{V} = \mathbf{G}_i \mathbf{V}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{V}_{i-1} = -\mathbf{F}_i, \quad i > 0, \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{R}.$$

Учитывая условия (17.3)-(17.4), можно показать, что $\mathbf{V}_i \rightarrow \mathbf{0}$, $i \rightarrow \infty$.

Лемма 17.6. Пусть для некоторой вектор-функции Ψ выполнены условия:

$$\Psi_0 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_i \Psi \geq \mathbf{0}, \quad i \geq 1. \quad (17.17)$$

Тогда при всех $i \geq 0$ $\Psi_i \geq \mathbf{0}$.

Доказательство. Допустим, что для некоторых i, j оказалось

$\Psi_i^j < 0$. Без ограничения общности можно считать, что i – наименьший индекс, для которого оказалось $\Psi_i^j < 0$, причем j дает минимум из всех Ψ_i^k при заданном i . Тогда имеем:

$$(\mathbf{L}_i \Psi)^j = \sum_{k=1}^N G_i^{jk} (\Psi_i^k - \Psi_i^j) + \Psi_i^j \sum_{k=1}^N (G_i^{jk} - C_i^{jk}) - C_i^{j,j} (\Psi_{i-1}^j - \Psi_i^j) < 0.$$

Получили противоречие с условиями (17.17). Это доказывает лемму.

Используя лемму 17.6 и условия (17.4), несложно показать, что

$$\max_i \|\mathbf{V}_i\| \leq \|R\| + \Delta^{-1} \max_i \|\mathbf{F}_i\|.$$

Лемма 17.7. Пусть при всех i $\|\mathbf{D}_i\| \leq \varepsilon$. Тогда

$$\max_i \|\mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i\| \leq \Delta^{-1} \max_i \|\mathbf{U}_i\| \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{Z}_i = \mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i$. Тогда \mathbf{Z} является решением начальной задачи:

$$\mathbf{G}_i \mathbf{Z}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{Z}_{i-1} = \mathbf{D}_i \mathbf{U}_{i+1}, \quad i > 0, \quad \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}.$$

Теперь утверждение леммы можно получить на основании принципа максимума.

Учитывая, что $\|\mathbf{D}_i\| \leq \varepsilon$, мы редуцировали исходную схему к конечному числу узлов или к начальной задаче с точностью $O(\varepsilon)$. Теперь остановимся на асимптотическом подходе к решению вспомогательных задач (17.7) и (17.8), что позволит редуцировать задачу (17.1)-(17.2) к конечному числу узлов или к двухточечной задаче с более высоким порядком точности по параметру ε .

Итак, пусть коэффициенты схемы (17.1)-(17.2) зависят от малого положительного параметра ε и для некоторого $r > 0$ справедливы разложения:

$$\mathbf{C}_i = \sum_{k=0}^r \mathbf{C}_i^{(k)} \varepsilon^k + O(\varepsilon^{r+1}), \quad \mathbf{D}_i = \sum_{k=1}^r \mathbf{D}_i^{(k)} \varepsilon^k + O(\varepsilon^{r+1}),$$

$$\mathbf{G}_i = \sum_{k=0}^r \mathbf{G}_i^{(k)} \varepsilon^k + O(\varepsilon^{r+1}), \quad \mathbf{F}_i = \sum_{k=0}^r \mathbf{F}_i^{(k)} \varepsilon^k + O(\varepsilon^{r+1}). \quad (17.18)$$

В (17.18) под $O(\varepsilon^{r+1})$ понимаются матрица или вектор с нормой порядка $O(\varepsilon^{r+1})$. Для редукции краевых условий используем вырождение матриц \mathbf{D}_i , поэтому в разложении \mathbf{D}_i сумма начинается с $k = 1$.

Определим приближенно матрицу \mathbf{A}_∞ из уравнения (17.9). Будем искать матрицу \mathbf{A}_∞ в виде суммы:

$$\tilde{\mathbf{A}}_\infty^p = \sum_{k=0}^p \mathbf{A}^{(k)} \varepsilon^k, \quad p \leq r.$$

Учитывая асимптотические разложения (17.18), из (17.9) относительно $\mathbf{A}^{(k)}$ получим матричное уравнение:

$$\mathbf{G}_\infty^{(0)} \mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{S}^{(k)},$$

где

$$\mathbf{S}^{(k)} = \sum_{s=1}^k \sum_{q=0}^{k-s} \mathbf{D}_\infty^{(s)} \mathbf{A}^{(q)} \mathbf{A}^{(k-s-q)} - \sum_{s=0}^{k-1} \mathbf{G}_\infty^{(s)} \mathbf{A}^{(k-s)} + \mathbf{C}_\infty^{(k)}, \quad k \geq 1,$$

$$\mathbf{A}^{(0)} = (\mathbf{G}_\infty^{(0)})^{-1} \mathbf{C}_\infty^{(0)}.$$

Учитывая условия (17.3), можно заключить, что при достаточно малых значениях ε $\|\tilde{\mathbf{A}}_\infty^p\| < 1$.

Теперь получим асимптотические формулы для нахождения \mathbf{A}_i из (17.7). Строим матрицу \mathbf{A}_i в виде суммы:

$$\tilde{\mathbf{A}}_i^p = \sum_{k=0}^p \mathbf{A}_i^{(k)} \varepsilon^k, \quad p \leq r.$$

Учитывая асимптотические разложения коэффициентов и решения в (17.7), относительно $\mathbf{A}_i^{(k)}$ получим матричное уравнение:

$$\mathbf{G}_i^{(0)} \mathbf{A}_i^{(k)} = \mathbf{S}_i^{(k)},$$

где

$$\mathbf{S}_i^{(k)} = \sum_{s=1}^k \sum_{q=0}^{k-s} \mathbf{D}_i^{(s)} \mathbf{A}_i^{(q)} \mathbf{A}_{i+1}^{(k-s-q)} - \sum_{s=0}^{k-1} \mathbf{G}_i^{(s)} \mathbf{A}_i^{(k-s)} + \mathbf{C}_i^{(k)}, \quad k \geq 1,$$

$$\mathbf{A}_i^{(0)} = (\mathbf{G}_i^{(0)})^{-1} \mathbf{C}_i^{(0)}.$$

Учитывая ограничения (17.3), можно заключить, что при достаточно малых значениях ε $\|\tilde{\mathbf{A}}_i^p\| < 1$.

Лемма 17.8. Пусть при всех i $\|\tilde{\mathbf{A}}_i^p\| \leq 1$. Тогда найдется постоянная C_0 такая, что при всех $i > 0$

$$\|\mathbf{A}_i - \tilde{\mathbf{A}}_i^p\| \leq C_0 \varepsilon^{p+1}.$$

Доказательство. Применение асимптотических разложений к решению задачи (17.7) соответствует тому, что от (17.7) осуществляется переход к задаче с возмущенными коэффициентами:

$$\tilde{\mathbf{A}}_i^p = (\tilde{\mathbf{G}}_i - \tilde{\mathbf{D}}_i \tilde{\mathbf{A}}_{i+1}^p)^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_i, \quad \tilde{\mathbf{A}}_i^p \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_\infty^p, \quad i \rightarrow \infty,$$

где матрица $\tilde{\mathbf{A}}_\infty^p$ является решением уравнения:

$$\tilde{\mathbf{D}}_\infty \mathbf{A}^2 - \tilde{\mathbf{G}}_\infty \mathbf{A} + \tilde{\mathbf{C}}_\infty = 0,$$

причем при всех $i > 0$

$$\|\mathbf{D}_i - \tilde{\mathbf{D}}_i\|, \|\mathbf{G}_i - \tilde{\mathbf{G}}_i\|, \|\mathbf{C}_i - \tilde{\mathbf{C}}_i\| \leq C_0 \varepsilon^{p+1}.$$

Пусть $\mathbf{Z}_i = \mathbf{A}_i - \tilde{\mathbf{A}}_i^p$. Нетрудно показать, что матрицы \mathbf{Z}_i удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{D}_i \mathbf{Z}_{i+1} \mathbf{A}_i + \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{D}_i \tilde{\mathbf{A}}_{i+1}^p \mathbf{Z}_i + \mathbf{P}_i,$$

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{G}_i^{-1} (\tilde{\mathbf{G}}_i - \mathbf{G}_i) \tilde{\mathbf{A}}_i^p + \mathbf{G}_i^{-1} (\mathbf{D}_i - \tilde{\mathbf{D}}_i) \tilde{\mathbf{A}}_{i+1}^p \tilde{\mathbf{A}}_i^p + \mathbf{G}_i^{-1} (\mathbf{C}_i - \tilde{\mathbf{C}}_i),$$

$$\mathbf{Z}_i \rightarrow \mathbf{Z}_\infty = \mathbf{A}_\infty - \tilde{\mathbf{A}}_\infty^p, \quad i \rightarrow \infty.$$

Сначала оценим \mathbf{Z}_∞ . Нетрудно показать, что \mathbf{Z}_∞ удовлетворяет уравнению:

$$\mathbf{Z}_\infty = \mathbf{G}_\infty^{-1} \mathbf{D}_\infty \mathbf{Z}_\infty \mathbf{A}_\infty + \mathbf{G}_\infty^{-1} \mathbf{D}_\infty \tilde{\mathbf{A}}_\infty^p \mathbf{Z}_\infty + \mathbf{P}_\infty, \quad (17.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\infty = & G_\infty^{-1} (\mathbf{D}_\infty - \tilde{\mathbf{D}}_\infty) (\tilde{\mathbf{A}}_\infty^p)^2 + G_\infty^{-1} (\tilde{\mathbf{G}}_\infty - \mathbf{G}_\infty) \tilde{\mathbf{A}}_\infty^p + \\ & + G_\infty^{-1} (\mathbf{C}_\infty - \tilde{\mathbf{C}}_\infty), \quad \|\mathbf{P}_\infty\| \leq C_0 \varepsilon^{p+1}. \end{aligned}$$

Переходя в (17.19) к оценке по норме и учитывая условия (17.3)-(17.4), получим:

$$\|\mathbf{Z}_\infty\| \leq (1 - \sigma)^{-1} C_0 \varepsilon^{p+1}. \quad (17.20)$$

В силу предельного условия на бесконечности и оценки (17.20) при достаточно больших i ($i \geq M$)

$$\|\mathbf{Z}_i\| \leq C_1 \varepsilon^{p+1}.$$

Оценим $\|\mathbf{Z}_i\|$ при $i \leq M$. Учитывая, что при всех i $\|\mathbf{P}_i\| \leq C_0 \varepsilon^{p+1}$ и условия (17.3)-(17.4), получим

$$\max_{i \leq M} \|\mathbf{Z}_i\| \leq (1 - \sigma)^{-1} C_0 \varepsilon^{p+1}.$$

Это доказывает лемму.

Исследуем, как неточности в матрицах \mathbf{A}_i влияют на решение задачи (17.8).

Лемма 17.9. Пусть при всех i

$$\|\tilde{\mathbf{A}}_i\| \leq 1, \quad \|\tilde{\mathbf{A}}_i - \mathbf{A}_i\| \leq \eta,$$

$\tilde{\mathbf{B}}$ – решение задачи (8) в случае возмущенных матриц $\tilde{\mathbf{A}}_i$. Тогда справедлива оценка:

$$\max_{i \geq k} \|\tilde{\mathbf{B}}_i - \mathbf{B}_i\| \leq \frac{C_0}{\Delta} \eta \max_i \|\mathbf{D}_i\| \max_{i \geq k} \|\mathbf{B}_i\|, \quad k \geq 1.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{Z}_i = \mathbf{V}_i - \tilde{\mathbf{V}}_i$. Тогда \mathbf{Z} является решением задачи:

$$\mathbf{D}_i(\mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{Z}_i) - [\mathbf{G}_i - \mathbf{D}_i - \mathbf{D}_i \tilde{\mathbf{A}}_{i+1}] \mathbf{Z}_i = \mathbf{D}_i(\tilde{\mathbf{A}}_{i+1} - \mathbf{A}_{i+1}) \mathbf{V}_i, \quad \mathbf{Z}_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

Теперь утверждение леммы следует из леммы 17.3 .

Пусть для матриц $\mathbf{Q}_i = \mathbf{G}_i - \mathbf{D}_i - \mathbf{D}_i \mathbf{A}_{i+1}$ справедливо асимптотическое разложение:

$$\mathbf{Q}_i = \sum_{k=0}^r \mathbf{Q}_i^{(k)} \varepsilon^k + O(\varepsilon^{r+1}).$$

Тогда решение задачи (17.8) можно искать в виде:

$$\mathbf{V}_i^p = \sum_{k=0}^p \mathbf{V}_i^{(k)} \varepsilon^k, \quad p \leq r.$$

Подставляя в (17.8) асимптотические разложения коэффициентов и решения, получим, что для каждого k $\mathbf{V}_i^{(k)}$ можно найти через уже вычисленные векторы $\mathbf{V}_i^{(s)}$, $s < k$ из уравнения:

$$\mathbf{Q}_i^{(0)} \mathbf{V}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^k \mathbf{D}_i^{(j)} (\mathbf{V}_{i+1}^{(k-j)} - \mathbf{V}_i^{(k-j)}) - \sum_{j=1}^k \mathbf{Q}_i^{(j)} \mathbf{V}_i^{(k-j)} - \mathbf{F}_i^{(k)}, \quad k \geq 1,$$

$$\mathbf{Q}_i^{(0)} \mathbf{V}_i^{(0)} = -\mathbf{F}_i^{(0)}, \quad \mathbf{Q}_i^{(0)} = \mathbf{G}_i^{(0)}.$$

Лемма 17.10. Пусть при всех i $\|\tilde{\mathbf{A}}_i\| \leq 1$. Тогда при всех i

$$\|\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_i^p\| \leq C_0 \varepsilon^{p+1}.$$

Доказательство. При использовании асимптотических разложений коэффициенты уравнения (17.8) приближены с точностью до $O(\varepsilon^{p+1})$, поэтому \mathbf{V}^p является решением задачи:

$$\tilde{\mathbf{D}}_i(\mathbf{V}_{i+1}^p - \mathbf{V}_i^p) - \tilde{\mathbf{Q}}_i \mathbf{V}_i^p = \tilde{\mathbf{F}}_i, \quad \mathbf{V}_i^p \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

где

$$\|\mathbf{D}_i - \tilde{\mathbf{D}}_i\|, \|\mathbf{Q}_i - \tilde{\mathbf{Q}}_i\|, \|\mathbf{F}_i - \tilde{\mathbf{F}}_i\| \leq C_0 \varepsilon^{p+1}.$$

Пусть $\mathbf{Z}_i = \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_i^p$. Тогда \mathbf{Z} является решением задачи:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i(\mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{Z}_i) - \mathbf{Q}_i \mathbf{Z}_i = \mathbf{F}_i - \tilde{\mathbf{F}}_i + (\mathbf{Q}_i - \tilde{\mathbf{Q}}_i)\mathbf{V}_i + (\tilde{\mathbf{D}}_i - \mathbf{D}_i)(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i) + \\ + (\mathbf{D}_i - \tilde{\mathbf{D}}_i)(\mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{Z}_i) + (\tilde{\mathbf{Q}}_i - \mathbf{Q}_i)\mathbf{Z}_i, \quad \mathbf{Z}_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Используя лемму 17.3, получим утверждение леммы.

Для перехода от (17.1)-(17.2) к краевой задаче с конечным числом узлов (17.12) требуется находить только \mathbf{A}_M и \mathbf{B}_M .

Используя соотношение (17.6), исходную задачу (17.1)-(17.2) можно свести к начальной:

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{B}_i, \quad i > 0, \quad \mathbf{U}_0 = \mathbf{R}. \quad (17.21)$$

Решения задач (17.1)-(17.2) и (17.21) совпадают. При всех $i \leq M$ решение задачи (17.21) является решением задачи (17.12). В силу единственности решения задач (17.1)-(17.2) и (17.12) совпадают.

Коэффициенты \mathbf{A}_i и \mathbf{B}_i , используемые в (17.21), могут быть вычислены приближенно. Исследуем влияние погрешности в задании этих коэффициентов на решение задачи (17.21).

Лемма 17.11. Пусть $\tilde{\mathbf{U}}$ – решение задачи (17.21) в случае возмущенных $\tilde{\mathbf{A}}_i$ и $\tilde{\mathbf{B}}_i$, при всех $i \quad \|\tilde{\mathbf{A}}_i\| \leq \eta < 1$. Тогда при всех i

$$\|\mathbf{U}_i - \tilde{\mathbf{U}}_i\| \leq \frac{1}{1 - \eta} \{ \max_i \|\mathbf{A}_i - \tilde{\mathbf{A}}_i\| \times \max_i \|\mathbf{U}_i\| + \max_i \|\mathbf{B}_i - \tilde{\mathbf{B}}_i\| \}.$$

Доказательство. Определим $\mathbf{Z}_i = \mathbf{U}_i - \tilde{\mathbf{U}}_i$. Тогда $\mathbf{Z}_0 = 0$, для $i > 0$

$$\mathbf{Z}_i = \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Z}_{i-1} + (\mathbf{A}_i - \tilde{\mathbf{A}}_i) \mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{B}_i - \tilde{\mathbf{B}}_i.$$

Переходя в этом соотношении к оценке по норме, получим утверждение леммы.

§18. Редукция неявной схемы для параболического уравнения к конечному числу узлов

Рассматривается разностная схема, соответствующая неявной аппроксимации параболического уравнения, когда пространственная переменная принимает значения на бесконечном интервале. Предлагается способ сведения схемы к конечному числу узлов.

Итак, рассмотрим четырехточечную разностную схему:

$$L_{i,j}^h u^h = A_{i,j} u_{i-1,j}^h + C_{i,j} u_{i,j-1}^h + D_{i,j} u_{i,j+1}^h - E_{i,j} u_{i,j}^h = F_{i,j}, \quad (18.1)$$

$$0 < i \leq M, \quad j > 0, \quad u_{0,j}^h = P_j, \quad u_{i,j}^h \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \pm\infty. \quad (18.2)$$

Предполагаем, что при всех i, j

$$A_{i,j}, C_{i,j}, D_{i,j} > 0, \quad E_{i,j} \geq A_{i,j} + C_{i,j} + D_{i,j} + \Delta, \quad \Delta > 0, \quad (18.3)$$

$$A_{i,j} \rightarrow A_i^0, \quad C_{i,j} \rightarrow C_i^0, \quad D_{i,j} \rightarrow D_i^0, \quad E_{i,j} \rightarrow E_i^0, \quad F_{i,j} \rightarrow 0, \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

$$A_{i,j} \rightarrow A_i^1, \quad C_{i,j} \rightarrow C_i^1, \quad D_{i,j} \rightarrow D_i^1, \quad E_{i,j} \rightarrow E_i^1, \quad F_{i,j} \rightarrow 0, \quad \text{при } j \rightarrow -\infty. \quad (18.4)$$

Схема (18.1)-(18.2) появляется, например, при неявной аппроксимации начально-краевой задачи для параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c(x, t)u + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = P(x), \quad u(x, t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (18.5)$$

Предполагается, что

$$\varepsilon > 0, \quad c(x, t) \geq c_0 > 0, \quad f(x, t) \rightarrow 0, \quad c(x, t) \rightarrow c_{\pm\infty}(t), \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Применение центрально-разностной аппроксимации второй производной по координате x и неявной схемы по t приводит к схеме (18.1)-(18.2), где

$$A_{i,j} = \frac{1}{\tau}, \quad C_{i,j} = D_{i,j} = \frac{\varepsilon}{h^2}, \quad E_{i,j} = \frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{\tau} + c(x_j, t_i), \quad F_{i,j} = -f(x_j, t_i).$$

Условия (18.3)-(18.4) выполнены.

Перейдем к анализу свойств схемы (18.1),(18.2). Учитывая условия (18.3)-(18.4), можно заключить, что для оператора L^h справедлив принцип максимума и если при всех i, j

$$\Psi_{0,j}^h \geq 0, \quad \Psi_{i,0}^h \geq 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \Psi_{i,j}^h \geq 0, \quad L_{i,j}^h \Psi^h \leq 0, \quad (18.6)$$

то при всех i, j $\Psi_{i,j}^h \geq 0$.

На основании принципа максимума нетрудно заключить, что

$$\|u^h\| \leq \Delta^{-1} \|F\| + \|P\|. \quad (18.7)$$

Сначала перейдем к разностной схеме с конечным числом узлов по x без выделения многообразия решений, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. При этом будем предполагать, что коэффициенты $C_{i,j}$ и $D_{i,j}$ малы, что соответствует приведенному примеру. Перейдем от (18.1)-(18.2) к разностной схеме:

$$\begin{aligned} L_{i,j}^h \tilde{u}^h &= F_{i,j}, \quad 0 < i \leq M, \quad -N < j < N, \quad \tilde{u}_{0,j}^h = P_j, \\ L_{i,-N}^h \tilde{u}^h &= A_{i,-N} \tilde{u}_{i-1,-N}^h + D_{i,-N} \tilde{u}_{i,-N+1}^h - E_{i,-N} \tilde{u}_{i,-N}^h = F_{i,-N}, \\ L_{i,N}^h \tilde{u}^h &= A_{i,N} \tilde{u}_{i-1,N}^h + C_{i,N} \tilde{u}_{i,N-1}^h - E_{i,N} \tilde{u}_{i,N}^h = F_{i,N}. \end{aligned} \quad (18.8)$$

Нетрудно убедиться, что для оператора задачи (18.8) справедлив принцип максимума, в соответствии с которым из условий:

$$\begin{aligned} \Psi_{0,j}^h \geq 0, \quad -N \leq j \leq N, \quad L_{i,-N}^h \Psi^h \geq 0, \quad L_{i,N}^h \Psi^h \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, M, \\ L_{i,j}^h \Psi^h \leq 0 \quad 1 \leq i \leq M, \quad -N < j < N \end{aligned} \quad (18.9)$$

следует, что при всех i, j $\Psi_{i,j}^h \geq 0$.

Лемма 18.1. Справедлива оценка:

$$\|u^h - \tilde{u}^h\| \leq \frac{1}{\Delta} \{ \|C_{i,-N}\| \times \|u_{i,-N-1}^h\| + \|D_{i,N}\| \times \|u_{i,N+1}^h\| \}.$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда z^h является решением задачи:

$$\begin{aligned} L_{i,j}^h z^h = 0 \quad 1 \leq i \leq M, \quad -N < j < N, \quad z_{0,j} = 0, \quad -N \leq j \leq N, \\ L_{i,-N}^h z^h = -C_{i,-N} u_{i,-N-1}, \quad L_{i,N}^h z^h = -D_{i,N} u_{i,N+1}, \quad 1 \leq i \leq M. \end{aligned}$$

Теперь утверждение леммы можно получить на основании принципа максимума с подбором подходящей барьерной функции.

В соответствии с этой леммой, если $\|C_{i,-N}\|, \|D_{i,N}\| \leq C_0 \varepsilon$, то при переходе от (18.1)-(18.2) к (18.8) совершается погрешность порядка $O(\varepsilon)$.

Теперь определим метод перехода к схеме с конечным числом узлов, позволяющий повысить точность переноса краевых условий. Для этого выделим многообразие решений схемы (18.1), удовлетворяющих предельному условию при $j \rightarrow \infty$ и многообразие решений, удовлетворяющих предельному условию при $j \rightarrow -\infty$.

Начнем с правого краевого условия. Для $i, j > 0$ определим соотношение:

$$u_{i,j}^h = \alpha_{i,j}^0 u_{i,j-1}^h + \beta_{i,j}^0, \quad (18.10)$$

где сеточные функции α^0 и β^0 являются решением разностных схем с предельным условием на бесконечности:

$$\alpha_{i,j}^0 = \frac{C_{i,j}}{E_{i,j} - D_{i,j}\alpha_{i,j+1}^0}, \quad \alpha_{i,j}^0 \rightarrow \alpha_i^0, \quad j \rightarrow \infty. \quad \alpha_i^0 = \frac{2C_i^0}{E_i^0 + \sqrt{E_i^0 E_i^0 - 4C_i^0 D_i^0}}, \quad (18.11)$$

$$\beta_{i,j}^0 = \frac{D_{i,j}\beta_{i,j+1}^0 + A_{i,j}u_{i-1,j}^h - F_{i,j}}{E_{i,j} - D_{i,j}\alpha_{i,j+1}^0}, \quad \beta_{i,j}^0 \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (18.12)$$

Покажем, что при всех i, j $0 < \alpha_{i,j}^0 < 1$. Учитывая условие диагонального преобладания (18.3), получим:

$$\alpha_i^0 < \frac{2C_i^0}{C_i^0 + D_i^0 + |C_i^0 - D_i^0| + 2\Delta} < \frac{C_i^0}{C_i^0 + \Delta} < 1.$$

Для достаточно больших j ($j \geq J$) в силу предельного условия $\alpha_{i,j}^0 < 1$. В случае $j < J$ $\alpha_{i,j}^0 < 1$ в силу условий (18.3) и соотношения (18.11). Итак, при всех i, j $0 < \alpha_{i,j}^0 < 1$.

Учитывая (18.11), можно показать, что при всех i, j

$$0 < \alpha_{i,j}^0 < \frac{C_{i,j}}{C_{i,j} + \Delta} \leq \alpha_{max} < 1.$$

Для переноса краевого условия из $-\infty$ определим соотношение:

$$u_{i,j-1}^h = \alpha_{i,j}^1 u_{i,j}^h + \beta_{i,j}^1, \quad (18.13)$$

где сеточные функции α^1 и β^1 являются решением разностных схем с предельным условием на $-\infty$:

$$\alpha_{i,j+1}^1 = \frac{D_{i,j}}{E_{i,j} - C_{i,j}\alpha_{i,j}^1}, \quad \alpha_{i,j}^1 \rightarrow \alpha_i^1, \quad j \rightarrow -\infty. \quad \alpha_i^1 = \frac{2D_i^1}{E_i^1 + \sqrt{E_i^1 E_i^1 - 4C_i^1 D_i^1}}, \quad (18.14)$$

$$\beta_{i,j+1}^1 = \frac{C_{i,j}\beta_{i,j}^1 + A_{i,j}u_{i-1,j}^h - F_{i,j}}{E_{i,j} - C_{i,j}\alpha_{i,j}^1}, \quad \beta_{i,j}^1 \rightarrow 0, \quad j \rightarrow -\infty. \quad (18.15)$$

Покажем, что соотношение (18.10) задает многообразие решений схемы (18.1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Из (18.10) следует, что при всех i, j

$$|u_{i,j}^h| \leq \alpha_{max}^j |u_{i,0}^h| + \sum_{k=1}^j \alpha_{max}^{j-k} |\beta_{i,k}|.$$

Учитывая, что в этом соотношении $0 < \alpha_{max} < 1$, $\beta_{i,k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, можно показать, что $u_{i,j}^h \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$.

Аналогичным образом можно показать, что

$$0 < \alpha_{i,j}^1 < \frac{D_{i,j}}{D_{i,j} + \Delta} \leq \alpha_{max} < 1$$

и если u^h удовлетворяет соотношению (18.13), то $u_{i,j}^h \rightarrow 0$, $j \rightarrow -\infty$.

Учитывая (18.10) и (18.13), перейдем от (18.1)-(18.2) к схеме с конечным числом узлов:

$$L_{i,j}^h u^h = A_{i,j} u_{i-1,j}^h + C_{i,j} u_{i,j-1}^h + D_{i,j} u_{i,j+1}^h - E_{i,j} u_{i,j}^h = F_{i,j},$$

$$0 < i \leq M, \quad -N < j < N, \quad u_{0,j}^h = P_j, \quad -N \leq j \leq N,$$

$$u_{i,-N}^h - \alpha_{i,-N+1}^1 u_{i,-N+1}^h = \beta_{i,-N+1}^1, \quad u_{i,N}^h - \alpha_{i,N}^0 u_{i,N-1}^h = \beta_{i,N}^0. \quad (18.16)$$

Согласно построению, решения схем (18.1)-(18.2) и (18.16) во всех узлах, где определено решение схемы (18.16), совпадают. Коэффициенты

$$\alpha_{i,-N+1}^1, \quad \alpha_{i,N}^0, \quad \beta_{i,-N+1}^1, \quad \beta_{i,N}^0 \quad (18.17)$$

из соответствующих задач могут быть вычислены приближенно. Оценим влияние погрешности в задании этих коэффициентов на решение схемы (18.16).

Лемма 18.2. Пусть \tilde{u}^h – решение схемы (18.16) в случае возмущенных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{i,-N+1}^1$, $\tilde{\alpha}_{i,N}^0$, $\tilde{\beta}_{i,-N+1}^1$, $\tilde{\beta}_{i,N}^0$, причем

$\|\tilde{\alpha}_{i,-N+1}^1\|, \|\tilde{\alpha}_{i,N}^0\| < 1$. Тогда

$$\|u^h - \tilde{u}^h\| \leq \frac{1}{1 - \|\tilde{\alpha}_{i,-N+1}^1\|} \{ \|\alpha_{i,-N+1}^1 - \tilde{\alpha}_{i,-N+1}^1\| \times \|u_{i,-N+1}^h\| + \|\beta_{i,-N+1}^1 - \tilde{\beta}_{i,-N+1}^1\| \} + \frac{1}{1 - \|\tilde{\alpha}_{i,N}^0\|} \{ \|\tilde{\alpha}_{i,N}^0 - \alpha_{i,N}^0\| \times \|u_{i,N-1}^h\| + \|\beta_{i,N}^0 - \tilde{\beta}_{i,N}^0\| \}.$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда z^h является решением задачи:

$$\begin{aligned} L_{i,j}^h z^h &= 0, \quad 0 < i \leq M, \quad -N < j < N, \quad z_{0,j}^h = 0, \quad -N \leq j \leq N, \\ z_{i,-N}^h - \tilde{\alpha}_{i,-N+1}^1 z_{i,-N+1}^h &= (\tilde{\alpha}_{i,-N+1}^1 - \alpha_{i,-N+1}^1) u_{i,-N+1}^h + \beta_{i,-N+1}^1 - \tilde{\beta}_{i,-N+1}^1, \\ z_{i,N}^h - \tilde{\alpha}_{i,N}^0 z_{i,N-1}^h &= (\tilde{\alpha}_{i,N}^0 - \alpha_{i,N}^0) u_{i,N-1}^h + \beta_{i,N}^0 - \tilde{\beta}_{i,N}^0. \end{aligned} \quad (18.18)$$

Теперь утверждение леммы можно получить на основании принципа максимума.

Остановимся на вопросе нахождения коэффициентов (18.17) в предположении, что схема (18.1) вырождается при стремлении некоторого параметра к нулю. Предположим, что для некоторого $r > 0$ при $j > 0$ справедливы разложения:

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \sum_{k=0}^r A_{i,j}^{(k)} \varepsilon^k + P_{i,j}^1, \quad C_{i,j} = \sum_{k=0}^r C_{i,j}^{(k)} \varepsilon^k + P_{i,j}^2, \quad E_{i,j} = \sum_{k=0}^r E_{i,j}^{(k)} \varepsilon^k + P_{i,j}^3, \\ D_{i,j} &= \sum_{k=1}^r A_{i,j}^{(k)} \varepsilon^k + P_{i,j}^4, \quad F_{i,j} = \sum_{k=0}^r F_{i,j}^{(k)} \varepsilon^k + P_{i,j}^5, \quad P_{i,j}^i = O(\varepsilon^{r+1}). \end{aligned} \quad (18.19)$$

Найдем $\alpha_{i,j}^0$ из (18.11) на основе асимптотических разложений. Определим

$$\alpha_{i,j}^p = \sum_{k=0}^p \alpha_{i,j}^{(k)} \varepsilon^k, \quad p \leq r. \quad (18.20)$$

Учитывая разложения (18.19), (18.20) в (18.11), получим рекуррентную формулу:

$$\alpha_{i,j}^{(s)} = \frac{1}{E_{i,j}^{(0)}} \left[C_{i,j}^{(s)} - \sum_{n=0}^{s-1} \alpha_{i,j}^{(n)} E_{i,j}^{(s-n)} + \sum_{n=1}^s \sum_{k=0}^{s-n} D_{i,j}^{(n)} \alpha_{i,j}^{(k)} \alpha_{i,j+1}^{(s-n-k)} \right],$$

$$\alpha_{i,j}^{(0)} = C_{i,j}^{(0)} / E_{i,j}^{(0)}. \quad (18.21)$$

Аналогичным образом найдем $\beta_{i,j}^0$ из (18.12) на основе асимптотических разложений. Пусть

$$\beta_{i,j}^p = \sum_{k=0}^p \beta_{i,j}^{(k)} \varepsilon^k, \quad p \leq r. \quad (18.22)$$

Учитывая разложения (18.19), (18.22) в (18.12), получим рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} \beta_{i,j}^{(s)} = \frac{1}{E_{i,j}^{(0)}} \left[-F_{i,j}^{(s)} + A_{i,j}^{(s)} u_{i-1,j}^h - \sum_{n=0}^{s-1} \beta_{i,j}^{(n)} E_{i,j}^{(s-n)} + \sum_{n=1}^s \sum_{k=0}^{s-n} D_{i,j}^{(n)} \beta_{i,j}^{(k)} \alpha_{i,j+1}^{(s-n-k)} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^s D_{i,j}^{(n)} \beta_{i,j+1}^{(s-n)} \right], \quad \beta_{i,j}^{(0)} = \frac{1}{E_{i,j}^{(0)}} \left[-F_{i,j}^{(0)} + A_{i,j}^{(0)} u_{i-1,j}^h \right]. \end{aligned}$$

Оценим точность полученных асимптотических разложений.

По аналогии со случаем трехточечной разностной схемы, рассмотренной в §14, можно показать, что решения задач (18.11) и (18.12) устойчивы к возмущению коэффициентов, справедлива

Лемма 18.3. Пусть коэффициенты схемы (18.1)-(18.2) возмущены, при всех $i > 0$, $j > 0$

$$|A_{i,j} - \tilde{A}_{i,j}|, |C_{i,j} - \tilde{C}_{i,j}|, |D_{i,j} - \tilde{D}_{i,j}|, |E_{i,j} - \tilde{E}_{i,j}| \leq \sigma,$$

$$\tilde{E}_{i,j} \geq \tilde{A}_{i,j} + \tilde{C}_{i,j} + \tilde{D}_{i,j} + \tilde{\Delta}, \quad \tilde{E}_{i,j} \geq 2\tilde{D}_{i,j} + \tilde{\Delta}, \quad \tilde{\Delta} > 0,$$

$$\tilde{A}_{i,j} \rightarrow \tilde{A}_i^0, \quad \tilde{C}_{i,j} \rightarrow \tilde{C}_i^0, \quad \tilde{D}_{i,j} \rightarrow \tilde{D}_i^0, \quad \tilde{E}_{i,j} \rightarrow \tilde{E}_i^0, \quad \tilde{F}_{i,j} \rightarrow 0, \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ – решения задач (18.11) и (18.12) в случае возмущенных коэффициентов. Тогда для некоторой постоянной C при всех $i > 0$, $j > 0$

$$|\alpha_{i,j} - \tilde{\alpha}_{i,j}| \leq C\sigma, \quad |\beta_{i,j} - \tilde{\beta}_{i,j}| \leq C\sigma.$$

Применение асимптотических разложений к решению задач (18.11) и (18.12) соответствует тому, что коэффициенты этих задач приближены с точностью $O(\varepsilon^{p+1})$ и в соответствии с леммой 18.3 при всех $i > 0, j > 0$ для некоторой постоянной C

$$|\alpha_{i,j}^0 - \alpha_{i,j}^p| \leq C\varepsilon^{p+1}, \quad |\beta_{i,j}^0 - \beta_{i,j}^p| \leq C\varepsilon^{p+1}.$$

Аналогичным образом могут быть определены $\alpha_{i,j}^1$ и $\beta_{i,j}^1$ для $j < 0$.

Итак, сделаем основные выводы по данной главе. Рассмотрена сначала линейная, а затем нелинейная трехточечная разностная схема с полубесконечным числом узлов и предельным краевым условием на бесконечности. Предложен способ редукции разностных схем к конечному числу узлов. Данный подход обобщен на случай трехточечной векторной разностной схемы. Это позволяет переносить краевые условия с полубесконечной полосы на границу прямоугольной области с заданной точностью при рассмотрении эллиптических уравнений. Рассмотрен вопрос редукции к конечному числу узлов схемы для параболического уравнения.

Глава 4

Разностные схемы для нелинейных эллиптических уравнений с малым параметром

В данной главе рассматриваются краевые задачи для линейных и нелинейных эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных в прямоугольной области и в полуполосе. Рассматриваются задачи в неограниченной по продольной координате области или задачи, редуцированные к конечной области, поэтому пограничный слой по продольной координате отсутствует или слабо выражен. Для другой координаты рассмотрены случаи регулярного и параболического экспоненциальных погранслоев. В обоих случаях построены разностные схемы и обоснована их равномерная сходимость. Предложен способ переноса краевых условий с полубесконечной полосы на границу прямоугольной области.

§19. Нелинейное эллиптическое уравнение с регулярным экспоненциальным пограничным слоем

Рассмотрим краевую задачу:

$$T_\varepsilon u = -\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + a(x, z) \frac{\partial u}{\partial x} - w(z) \frac{\partial u}{\partial z} + f(x, z, u) = 0 \quad (19.1)$$

в случае прямоугольной области: $G = \{0 < x < L_1, 0 < z < L_2\}$. Пусть ∂G - граница области, $\bar{G} = G \cup \partial G$, l_1, l_2, l_3, l_4 - прямолинейные участки границы, соответствующие обходу области по часовой стрелке, причем

l_1 соответствует границе $\{x = 0, 0 \leq z \leq L_2\}$. Зададим граничные условия. Пусть Γ - оператор, соответствующий граничным условиям:

$$u|_{l_i} = \phi_i, i = 1, 2, \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_3 u = \phi_3(z), (x, z) \in l_3, \quad (19.2a)$$

$$u - \varepsilon \beta_4 \frac{\partial u}{\partial z} = \phi_4(x), (x, z) \in l_4. \quad (19.2b)$$

Предполагаем, что

$$\varepsilon > 0, a(x, z) \geq \alpha > 0, w(z) \geq \sigma > 0, \delta_3 \geq 0, \beta_4 \geq 0, f'_u(x, z, u) \geq \beta > 0,$$

$$f'_u(x, z, u) + 3a'_x \geq \beta > 0, f'_u(x, z, u) - 2w'_z \geq \beta > 0. \quad (19.3)$$

Краевые условия предполагаются согласованными [41],[124], решение задачи (19.1)-(19.2) существует и не содержит угловых пограничных слоев. Функции a, ϕ_i, f, w предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам.

Задача (19.1)-(19.2) является модельной в случае распространения примеси в направлении ветра от стационарно действующего источника [18], [139], при этом:

x - координата в направлении ветра, z - высота над ровной поверхностью, u - концентрация примеси, ε - малый коэффициент диффузии, $a(z)$ - скорость ветра в зависимости от высоты, $w(z)$ - скорость оседания примеси.

Оценка производных. Покажем, что для нелинейного оператора (T_ε, Γ) справедлив принцип обратной монотонности [124],[186], в соответствии с которым если p и q - две произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, то из условий

$$T_\varepsilon p(x, z) \geq T_\varepsilon q(x, z), (x, z) \in G \quad \Gamma p(x, z) \geq \Gamma q(x, z), (x, z) \in \partial G \quad (19.4)$$

следует $p(x, z) \geq q(x, z)$, $(x, z) \in \bar{G}$. Чтобы убедиться в этом, введем $s = p - q$ и определим линейный оператор:

$$Ls = -\varepsilon \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + a(x, z) \frac{\partial s}{\partial x} - w(z) \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{f(x, z, p) - f(x, z, q)}{p - q} s \quad (19.5)$$

Тогда

$$Ls(x, z) \geq 0, (x, z) \in G \quad \Gamma s(x, z) \geq 0, (x, z) \in \partial G \quad (19.6)$$

В силу принципа максимума $s(x, z) \geq 0$. Итак, оператор (T_ε, Γ) обратно монотонен.

Лемма 19.1. Пусть p и q - две произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Тогда при всех $(x, z) \in \bar{G}$

$$\begin{aligned} |p(x, z) - q(x, z)| \leq & \min\left(\frac{L_1}{\alpha}, \frac{L_2}{\sigma}, \frac{1}{\beta}\right) \|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + \\ & + \max_x |p(x, 0) - q(x, 0)| \exp[-\sigma \varepsilon^{-1} z] / \sigma + \\ & + \max_z |p(L_1, z) - q(L_1, z)| \alpha^{-1} \varepsilon \exp[\alpha \varepsilon^{-1} (x - L_1)] + \\ & + \max_x |p(x, L_2) - q(x, L_2)| + \max_z |p(0, z) - q(0, z)|. \end{aligned} \quad (19.7)$$

Доказательство. Определим функцию:

$$\begin{aligned} \Psi(x, z) = & S(x, z) \|T_\varepsilon p - T_\varepsilon q\| + \max_x |p(x, 0) - q(x, 0)| \exp[-\sigma \varepsilon^{-1} z] / \sigma + \\ & + \max_z |p(L_1, z) - q(L_1, z)| \alpha^{-1} \varepsilon \exp\{\alpha \varepsilon^{-1} (x - L_1)\} + \\ & + \max_x |p(x, L_2) - q(x, L_2)| + \max_z |p(0, z) - q(0, z)| \pm (p(x, z) - q(x, z)), \end{aligned}$$

где

$$S(x, z) = \begin{cases} x\alpha^{-1}, & \text{если } L_1\alpha^{-1} \leq \min\{L_2\sigma^{-1}, \beta^{-1}\}, \\ (L_2 - z)/\sigma, & \text{если } L_2/\sigma < \min\{L_1\alpha^{-1}, \beta^{-1}\}, \\ \beta^{-1}, & \text{если } \beta^{-1} < \min\{L_1\alpha^{-1}, L_2/\sigma\}. \end{cases}$$

Тогда

$$L\Psi(x, z) \geq 0, \quad (x, z) \in G, \quad \Gamma[\Psi(x, z)] \geq 0.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x, z) \geq 0$, $(x, z) \in \bar{G}$. Это доказывает лемму.

При задании в (19.7) $p = u$, $q = 0$ получим оценку решения задачи (19.1)-(19.2). В соответствии с этой оценкой $|u(x, z)| \leq C$.

Оценим производные решения задачи (19.1)-(19.2). Покажем, что первая производная по координате x равномерно ограничена, хотя последующие производные могут быть неограниченными, по координате z имеет место экспоненциальный погранслой около границы $z = 0$.

Лемма 19.2. Для некоторой постоянной C при всех $(x, z) \in \bar{G}$ выполнится:

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(x, z) \right| \leq C [1 + \varepsilon^{1-j} \exp[\varepsilon^{-1} \alpha(x - L_1)]], \quad j = 1, 2, 3 \quad (19.8)$$

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial z^j} u(x, z) \right| \leq C [1 + \varepsilon^{-j} \exp[-\varepsilon^{-1} \sigma]], \quad j = 1, 2, 3. \quad (19.9)$$

Доказательство. Получим оценку (19.8) в случае $j = 1$. Сначала получим эту оценку на границе ∂G .

Пусть $(x, z) \in l_1$. Определим $u_{\pm}(x, z) = u(0, z) \pm Cx$. Тогда при достаточно большом C выполнится:

$$T_{\varepsilon} u_{+}(x, z) \geq T_{\varepsilon} u(x, z) \geq T_{\varepsilon} u_{-}(x, z), \quad (x, z) \in G,$$

$$\Gamma u_{+}(x, z) \geq \Gamma u(x, z) \geq \Gamma u_{-}(x, z), \quad (x, z) \in \partial G.$$

В силу принципа обратной монотонности

$$u_{-}(x, z) \leq u(x, z) \leq u_{+}(x, z),$$

причем $u_-(0, z) = u(0, z) = u_+(0, z)$. Из этих соотношений следует:

$$\frac{\partial u_-}{\partial x}(0, z) \leq \frac{\partial u}{\partial x}(0, z) \leq \frac{\partial u_+}{\partial x}(0, z).$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(0, z) \right| \leq C.$$

Определим

$$P(x, z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, z).$$

Тогда

$$|P(x, z)| \leq C, \quad (x, z) \in l_1 \cup l_2 \cup l_3, \quad P - \varepsilon \beta_4 \frac{\partial P}{\partial z} = \phi'_4(x), \quad (x, z) \in l_4. \quad (19.10)$$

Из (19.1) следует

$$L_x P = -\varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + a \frac{\partial P}{\partial x} - w \frac{\partial P}{\partial z} + (f'_u + a'_x) P = -f'_x(x, z, u). \quad (19.11)$$

Определим $\Psi(x, z) = C \pm P(x, z)$. Учитывая (19.10), (19.11), для достаточно большой постоянной C получим:

$$\Psi(x, z) \geq 0, \quad (x, z) \in l_1 \cup l_2 \cup l_3, \quad \Psi(x, z) - \varepsilon \beta_4 \frac{\partial \Psi(x, z)}{\partial z} \geq 0, \quad (x, z) \in l_4,$$

$$L_x \Psi(x, z) \geq 0, \quad (x, z) \in G.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x, z) \geq 0$, $(x, z) \in \bar{G}$. Это доказывает оценку (19.8) при $j = 1$.

Получим (19.8) при $j = 2$. Сначала докажем, что

$$\left| \frac{\partial^2 u(0, z)}{\partial x^2} \right| \leq C. \quad (19.12)$$

Определим $u_{\pm}(x, z) = P(0, z) \pm Cx$. Тогда при достаточно большом C выполнится:

$$L_x u_+(x, z) \geq L_x P(x, z), \quad (x, z) \in G, \quad \Gamma u_+(x, z) \geq \Gamma P(x, z), \quad (x, z) \in \partial G.$$

В силу принципа максимума $u_+(x, z) \geq P(x, z)$, $(x, z) \in G$. Аналогично можно показать, что $u_-(x, z) \leq P(x, z)$, $(x, z) \in G$. Как и в случае $j = 1$ из этих соотношений следует (19.12).

Теперь докажем, что

$$\left| \frac{\partial^2 u(L_1, z)}{\partial x^2} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon}. \quad (19.13)$$

Определим $u_{\pm}(x, z) = P(L_1, z) \pm C(1 - \exp[m\varepsilon^{-1}(x - L_1)])$, где $m > \max a(x, z)$. Тогда

$$\begin{aligned} L_x u_+(x, z) &\geq -f'_x(0, z, u) + \beta C[1 - \exp(m\varepsilon^{-1}(x - L_1))] + \\ &+ \varepsilon^{-1}(m^2 - am)C \exp(m\varepsilon^{-1}(x - L_1)). \end{aligned}$$

Следовательно, при достаточно большом C

$$L_x u_+(x, z) \geq L_x P(x, z), \quad (x, z) \in G, \quad \Gamma u_+(x, z) \geq \Gamma P(x, z), \quad (x, z) \in \partial G.$$

В силу принципа максимума $u_+(x, z) \geq P(x, z)$, $(x, z) \in G$. Учитывая, что $u_+(L_1, z) = P(L_1, z)$, получим

$$\frac{\partial P}{\partial x}(L_1, z) \geq \frac{\partial u_+}{\partial x}(L_1, z).$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{\partial P}{\partial x}(L_1, z) \leq \frac{\partial u_-}{\partial x}(L_1, z).$$

Это доказывает оценку (19.13).

Определим

$$Q = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \Psi(x, z) = C [1 + \varepsilon^{-1} \exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_1)]] \pm Q(x, z).$$

Тогда

$$L_{xx}Q = -\varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + a \frac{\partial P}{\partial x} - w \frac{\partial P}{\partial z} + (f'_u + 2a'_x)P = F(x, z, u),$$

где $|F(x, z, u)| \leq C_0$. Учитывая (19.13), можно показать, что при достаточно большом C

$$L_{xx}\Psi(x, z) \geq 0, (x, z) \in G, \quad \Gamma\Psi(x, z) \geq 0, (x, z) \in \partial G.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x, z) \geq 0, (x, z) \in \bar{G}$. Это доказывает оценку (19.8) при $j = 2$. Оценка (19.8) при $j > 2$ доказывается аналогично.

Теперь начнем обоснование (19.9). Запишем уравнение (19.1) в виде:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F(x, z, u), \quad w(0)u(x, 0) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} = \phi_4(x), \quad u(x, L_2) = \phi_2(x), \quad (19.14)$$

В силу (19.8) $|F(x, z, u)| \leq C$. Из (19.14) следует:

$$u'_z(x, z) = u'_z(x, 0) \exp\left\{-\int_0^z \varepsilon^{-1} w(s) ds\right\} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^z F(x, s) \exp\left\{-\int_z^s \varepsilon^{-1} w(t) dt\right\} ds. \quad (19.15)$$

Из (19.14)-(19.15) следует (19.9) при $j = 1$.

Оценим

$$Q(x, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}.$$

Имеем:

$$L_{xz}Q(x, z) = -\varepsilon \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + a \frac{\partial Q}{\partial x} - w \frac{\partial P}{\partial z} + (f'_u + a'_x - w'_z)P = F(x, z, u),$$

где

$$|F(x, z, u)| \leq C_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \exp\{\alpha \varepsilon^{-1}(x - L_1)\} + \frac{1}{\varepsilon} \exp\{-\sigma \varepsilon^{-1}z\} \right\}.$$

Определим

$$\Psi(x, z) = C \left\{ 1 + \exp\{\alpha \varepsilon^{-1}(x - L_1)\} + \varepsilon^{-1} \exp\{-\sigma \varepsilon^{-1}z\} \right\} \pm Q(x, z).$$

Теперь нетрудно показать, что при достаточно большой постоянной C выполнится:

$$L\Psi(x, z) \geq 0, (x, z) \in G, \Psi(x, z) \geq 0, (x, z) \in \partial G.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x, z) \geq 0, (x, z) \in \bar{G}$, откуда следует, что

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right| \leq C_0 \{1 + \varepsilon^{-1} \exp\{-\sigma \varepsilon^{-1} z\}\}. \quad (19.16)$$

Начнем обоснование (19.9) в случае $j = 2$. Из (19.14) следует

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^2}. \quad (19.17)$$

Докажем, что

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x, L_2) \right| \leq C. \quad (19.18)$$

Для этого уравнение (19.1) рассмотрим в области

$D = \{0 < x < 1, L_2/2 < z < L_2\}$. Согласно оценке (19.9) при $j = 1$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \leq C$$

при всех $(x, z) \in \bar{D}$. Определим

$$P(x, z) = \frac{\partial u(x, z)}{\partial z}, \quad u_{\pm}(x, z) = P(x, L_2) \pm C(L_2 - z).$$

Тогда

$$L_z P = -\varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + a \frac{\partial P}{\partial x} - w \frac{\partial P}{\partial z} + (f'_u - w'_z)P = -f'_z(x, z, u) - a' \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Для достаточно большой постоянной C выполнится

$$L_z u_+(x, z) \geq 0, (x, z) \in D, \quad u_+(x, z) \geq P(x, z) \text{ при } (x, z) \in \partial D.$$

В силу принципа максимума $u_+(x, z) \geq P(x, z), (x, z) \in \bar{D}$. Учитывая, что $u_+(x, L_2) = P(x, L_2)$, получим:

$$\frac{\partial P(x, L_2)}{\partial z} \geq \frac{\partial u_+(x, L_2)}{\partial z}.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\frac{\partial P(x, L_2)}{\partial z} \leq \frac{\partial u_-(x, L_2)}{\partial z}.$$

Это доказывает оценку (19.18).

Определим

$$Q = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Тогда

$$L_{zz}Q = -\varepsilon \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + a \frac{\partial Q}{\partial x} - w \frac{\partial Q}{\partial z} + (f'_u - 2w'_z)Q = F(x, z, u),$$

где с учетом (19.16)

$$|F(x, z, u)| \leq C_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \exp\{\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_1)\} + \frac{1}{\varepsilon} \exp\{-\sigma\varepsilon^{-1}z\} \right\}.$$

Определим

$$\Psi(x, z) = C \left\{ 1 + \exp\{\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_1)\} + \varepsilon^{-2} \exp\{-\sigma\varepsilon^{-1}z\} \right\} \pm Q(x, z).$$

Используя оценки (19.17), (19.18) нетрудно показать, что при достаточно большой постоянной C выполнится:

$$L_{zz}\Psi(x, z) \geq 0, \quad (x, z) \in G, \quad \Psi(x, z) \geq 0, \quad (x, z) \in \partial G.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x, z) \geq 0$, $(x, z) \in \bar{G}$, что доказывает (1.6) при $j = 2$. Случай $j = 3$ аналогичен. Лемма доказана.

Выделим в решении $u(x, z)$ составляющую, задающую погранслои-
ный рост решения по координате z :

$$V_0(x, z) = \gamma(x) \exp[-\varepsilon^{-1}z], \quad \gamma = -\varepsilon w(0)^{-1} u'_z(x, 0).$$

Представим $u(x, z)$ в виде: $u(x, z) = V_0(x, z) + R(x, z)$. Покажем, что функция $R(x, z)$ не содержит погранслоиного роста решения по z .

Лемма 19.3. Найдется постоянная C такая, что

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial z^j} R(x, z) \right| \leq C [1 + \varepsilon^{1-j} \exp[-\varepsilon^{-1} \sigma z]], \quad j = 1, 2, 3. \quad (19.19)$$

Доказательство. Получим оценку (19.19) при $j = 1$. Краевую задачу относительно $R(x, z)$ можно записать в виде:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + w \frac{\partial R}{\partial z} = F_1(x, z),$$

$$\frac{\partial R(x, 0)}{\partial z} = 0, \quad R(x, L_2) = \phi_2(x) - V_0(x, L_2), \quad (19.20)$$

где для некоторой постоянной C $|F_1(x, z)| \leq C$. Из (19.20) следует

$$R'_z(x, z) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^z F_1(x, s) \exp\left\{-\int_z^s \varepsilon^{-1} w(t) dt\right\} ds.$$

Из этого соотношения получаем (19.19) при $j = 1$.

Докажем (19.19) при $j = 2$. Из (19.20) следует

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} R(x, z) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon}, \quad (x, z) \in \bar{G}.$$

Докажем, что

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} R(x, L_2) \right| \leq C. \quad (19.21)$$

Определим область

$$D = \{0 \leq x \leq L_1, \quad L_2/2 \leq z \leq L_2.\}$$

Пусть

$$P(x, z) = \frac{\partial R(x, z)}{\partial z}, \quad u_{\pm}(x, z) = P(x, L_2) \pm C(L_2 - z).$$

Нетрудно показать, что

$$L_z P = F_2(x, z), \quad |F_2(x, z)| \leq C_0 \quad (x, z) \in D.$$

Теперь можно показать, что для достаточно большой постоянной C :

$$L_z u_+(x, z) \geq L_z P(x, z), \quad (x, z) \in D, \quad u_+(x, z) \geq p(x, z), \quad (x, z) \in \Gamma(D),$$

где $\Gamma(D)$ – граница области D . В силу принципа максимума

$$u_+(x, z) \geq P(x, z), \quad (x, z) \in D. \text{ Следовательно,}$$

$$\frac{\partial P(x, L_2)}{\partial z} \geq \frac{\partial u_+(x, L_2)}{\partial z}.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\frac{\partial P(x, L_2)}{\partial z} \leq \frac{\partial u_-(x, L_2)}{\partial z}.$$

Из этих двух соотношений следует (19.21).

Пусть

$$Q(x, z) = \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}.$$

Тогда

$$L_{zz}Q(x, z) = F_3(x, z),$$

$$|F_3(x, z)| \leq C_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \exp\{\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_1)\} + \frac{1}{\varepsilon} \exp\{-\sigma\varepsilon^{-1}z\} \right\}, \quad (x, z) \in \bar{G}.$$

Определим

$$\Psi(x, z) = C \left\{ 1 + \exp\{\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_1)\} + \varepsilon^{-1} \exp\{-\sigma\varepsilon^{-1}z\} \right\} \pm Q(x, z).$$

Теперь нетрудно показать, что при достаточно большой постоянной C выполнится:

$$L_{zz}\Psi(x, z) \geq 0, \quad (x, z) \in G, \quad \Psi(x, z) \geq 0, \quad (x, z) \in \partial G.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x, z) \geq 0$, $(x, z) \in \bar{G}$, что доказывает (1.16) при $j = 2$. Случай других j аналогичен. Лемма доказана.

Построение и обоснование разностной схемы. Итак, решение задачи (19.1),(19.2) содержит экспоненциальный пограничный слой около границы $\{z = 0, 0 < x < L_1\}$. Добиться равномерной сходимости разностной схемы для такой задачи можно либо подгонкой схемы к погранслошной функции [105], либо специальным мельчением сетки в пограничном слое [15]. Первый подход не требует ограничений на шаги сетки и в этом смысле представляется более привлекательным. Остановимся на этом подходе.

Пусть Ω - равномерная сетка области \bar{G} :

$$\Omega = \{(x_i, z_j), i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2, h_1 = x_i - x_{i-1}, h_2 = z_j - z_{j-1}\}.$$

Определим разностную схему для задачи (19.1)-(19.2):

$$T_{i,j}^h u^h = -\varepsilon \Lambda_{xx}^{ij} u^h - \varepsilon^{(j)} \Lambda_{zz}^{ij} u^h + a(x_i, z_j) \Lambda_x^{ij} u^h - w(z_j) \Lambda_z^{ij} u^h + f(x_i, z_j, u_{i,j}^h) = 0,$$

$$u_{0,j}^h = \phi_1(z_j), j = 0, 1, \dots, N_2, u_{i,N_2}^h = \phi_2(x_i), i = 0, 1, \dots, N_1,$$

$$\Gamma_3^j u^h = \frac{u_{N_1,j}^h - u_{N_1-1,j}^h}{h_1} + \delta_3 u_{N_1,j}^h = \phi_3(z_j),$$

$$\Gamma_4^i u^h = u_{i,0}^h - \beta_4 [1 - \exp(-w(0)\varepsilon^{-1}h_2)]^{-1} w(0)(u_{i,1} - u_{i,0}) = \phi_4(x_i), \quad (19.22)$$

где

$$\Lambda_{xx}^{ij} u^h = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{h_1^2}, \quad \Lambda_{zz}^{ij} u^h = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j}^h + u_{i,j-1}^h}{h_2^2},$$

$$\Lambda_x^{ij} u^h = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}^h}{h_1}, \quad \Lambda_z^{ij} u^h = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}^h}{2h_2}, \quad \varepsilon^{(j)} = \frac{w(z_j)h_2}{2} \coth\left(\frac{w(z_j)h_2}{2\varepsilon}\right).$$

Схема (19.22) является обобщением схемы из [105] на случай нелинейного эллиптического уравнения и смешанных краевых условий.

Пусть Γ^h - оператор, соответствующий заданию граничных условий в схеме (19.22). Покажем, что разностный оператор (T^h, Γ^h) -

обратно монотонен, то есть если p^h и q^h - две произвольные сеточные функции, то из условий:

$$T^h[p^h] \geq T^h[q^h] \text{ на } \Omega^0, \quad \Omega^0 = \Omega - \partial\Omega, \quad \Gamma^h[p^h] \geq \Gamma^h[q^h]$$

следует $p^h \geq q^h$ на Ω . Пусть $s^h = p^h - q^h$. Тогда

$$L_{ij}^h s^h = -\varepsilon \Lambda_{xx}^{ij} s^h - \varepsilon^{(j)} \Lambda_{zz}^{ij} s^h + a(x_i, z_j) \Lambda_x^{ij} s^h - w(z_j) \Lambda_z^{ij} s^h + b_{i,j}^h s_{i,j}^h \geq 0, \quad (19.23)$$

где

$$b_{i,j}^h = [f(x_i, z_j, p_{i,j}^h) - f(x_i, z_j, q_{i,j}^h)] / [p_{i,j}^h - q_{i,j}^h] \geq 0.$$

Для оператора (L^h, Γ^h) справедлив принцип максимума, поэтому $s^h \geq 0$. Это доказывает, что оператор (T^h, Γ^h) обратно монотонен. Из этого свойства следует единственность решения схемы (19.22).

Получим оценку устойчивости схемы (19.22).

Лемма 19.4. Пусть p^h и q^h - две произвольные сеточные функции.

Тогда

$$\begin{aligned} |p_{i,j}^h - q_{i,j}^h| \leq \min\left(\frac{L_1}{\alpha}, \frac{L_2}{\sigma}, \frac{1}{\beta}\right) \|T^h[p^h] - T^h[q^h]\| + \max_i |p_{i,0}^h - q_{i,0}^h| \times \\ \times \exp[-\sigma \varepsilon^{-1} z_j] / \sigma + \max_j |p_{N_1,j}^h - q_{N_1,j}^h| \alpha^{-1} (\varepsilon + \alpha h_1) \exp[\alpha(\varepsilon + \alpha h_1)^{-1} (x_i - L_1)] + \\ + \max_i |p_{i,N_2}^h - q_{i,N_2}^h| + \max_j |p_{0,j}^h - q_{0,j}^h|. \end{aligned} \quad (19.24)$$

Доказательство. Определим сеточную функцию:

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j}^h = S_{i,j}^h \|T^h[p^h] - T^h[q^h]\| + \max_i |p_{i,0}^h - q_{i,0}^h| \exp[-\sigma \varepsilon^{-1} z_j] / \sigma + \Phi_{i,j}^h + \\ + \max_i |p_{i,N_2}^h - q_{i,N_2}^h| + \max_j |p_{0,j}^h - q_{0,j}^h| \pm (p_{i,j}^h - q_{i,j}^h), \end{aligned}$$

где

$$\Phi_{i,j}^h = (1 + \alpha h_1 \varepsilon^{-1})^{i-N_1},$$

$$S_{i,j}^h = \begin{cases} x_i \alpha^{-1}, & \text{если } L_1 \alpha^{-1} \leq \min\{L_2/\sigma, 1/\beta\}, \\ (L_2 - z_j)/\sigma & \text{если } L_2/\sigma < \min\{L_1 \alpha^{-1}, 1/\beta\}, \\ 1/\beta, & \text{если } 1/\beta < \min\{L_2/\sigma, L_1 \alpha^{-1}\}. \end{cases}$$

Тогда

$$L^h \Psi^h \geq 0 \text{ на } \Omega^0, \quad \Gamma^h[\Psi^h] \geq 0.$$

В силу принципа максимума $\Psi^h \geq 0$ на Ω . Это доказывает лемму.

При задании в (19.24) $p^h = u^h$, $q^h = 0$ получим оценку решения схемы (19.22). В соответствии с этой оценкой $|u^h| \leq C$. Покажем, что схема (19.22) обладает свойством равномерной сходимости.

Теорема 19.1. Пусть u^h - решение схемы (19.22), u - решение задачи (19.1)-(19.2). Найдется постоянная C такая, что при всех $(x_i, z_j) \in \Omega$ выполнится

$$|u_{i,j}^h - u(x_i, z_j)| \leq C(h_1 + h_2). \quad (19.25)$$

Доказательство. Пусть $s^h = u^h - [u]_\Omega$. Тогда

$$L^h s^h = T^h u^h - T^h [u]_\Omega, \quad (19.26)$$

где L^h соответствует (19.23) с

$$b_{i,j}^h = [f(x_i, z_j, u_{i,j}^h) - f(x_i, z_j, u(x_i, z_j))]/[u_{i,j}^h - u(x_i, z_j)].$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} T_{i,j}^h u^h - T_{i,j}^h [u]_\Omega &= \left(\varepsilon \Lambda_{xx}^{ij} [u]_\Omega - \varepsilon \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \right) + \left(\varepsilon^{(j)} \Lambda_{zz}^{ij} [u]_\Omega - \varepsilon \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \left(a \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} - a \Lambda_x^{ij} [u]_\Omega \right) + \left(w \Lambda_z^{ij} [u]_\Omega - w \frac{\partial u_{i,j}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (19.27)$$

По аналогии со случаем обыкновенного уравнения, рассмотренного в главе 1, можно показать, что для произвольной достаточно гладкой

функции функции $P(x, z)$ справедливы соотношения:

$$\left| \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x} - \Lambda_x^{ij}[P]_\Omega \right| \leq \frac{1}{h_1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_s^{x_i} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, z_j) \right| dx ds,$$

$$\left| \frac{\partial^2 P_{i,j}}{\partial x^2} - \Lambda_{xx}^{ij}[P]_\Omega \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left| \frac{\partial^3 P}{\partial x^3}(x, z_j) \right| dx, \quad \left| \frac{\partial^2 P_{i,j}}{\partial z^2} - \Lambda_{zz}^{ij}[P]_\Omega \right| \leq$$

$$\leq \int_{z_{j-1}}^{z_{j+1}} \left| \frac{\partial^3 P}{\partial z^3}(x_i, z) \right| dz, \quad \left| \frac{\partial P_{i,j}}{\partial z} - \Lambda_z^{ij}[P]_\Omega \right| \leq \int_{z_{j-1}}^{z_{j+1}} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}(x_i, z) \right| dz,$$

$$\left| \Lambda_{zz}^{ij}[P]_\Omega \right| \leq \frac{1}{h_2} \int_{z_{j-1}}^{z_{j+1}} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}(x_i, z) \right| dz. \quad (19.28)$$

Учитывая оценки производных (19.8), получим:

$$\left| T_{i,j}^h u^h - T_{i,j}^h[u]_\Omega \right| \leq \left| \varepsilon^{(j)} \Lambda_{zz}^{ij}[u]_\Omega - \varepsilon \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial z^2} + w \Lambda_z^{ij}[u]_\Omega - w \frac{\partial u_{i,j}}{\partial z} \right| +$$

$$+ Ch_1 [1 + (h_1 + \varepsilon)^{-1} \exp(\alpha \varepsilon^{-1} (x_{i+1} - L_1))]. \quad (19.29)$$

Для оценки погрешности аппроксимации по переменной z используем представление решения в виде $u(x, z) = V_0(x, z) + R(x, z)$. Оценим погрешность аппроксимации отдельно на функциях $V_0(x, z)$ и $R(x, z)$.

Учитывая, что схема (19.22) получена на основе подгонки к пограничной функции $V_0(x, z)$, получим:

$$\left| \varepsilon^{(j)} \Lambda_{zz}^{ij}[V_0]_\Omega - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} \right)_{i,j} + w \Lambda_z^{ij}[V_0]_\Omega - w \left(\frac{\partial V_0}{\partial z} \right)_{i,j} \right| \leq$$

$$Ch_2 [1 + (h_2 + \varepsilon)^{-1} \exp(-\sigma \varepsilon^{-1} z_{j-1})]. \quad (19.30)$$

Учитывая оценки (19.27) и лемму 19.3, получим оценку (19.30) для функции $R(x, z)$.

Итак, для некоторых постоянных C_1 и C_2 :

$$\left| T_{i,j}^h u^h - T_{i,j}^h[u]_\Omega \right| \leq C_1 h_1 [1 + (h_1 + \varepsilon)^{-1} \exp(\alpha \varepsilon^{-1} (x_{i+1} - L_1))] +$$

$$+C_2h_2[1 + (h_2 + \varepsilon)^{-1}\exp(-\sigma\varepsilon^{-1}z_{j-1})]. \quad (19.31)$$

Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_{i,j}^h = C_3h_1\Phi_{i+1,j}^h + C_4h_2\Theta_{i,j-1}^h + C_5(h_1 + h_2) + C_6h_1\Phi_{i,j}^h \pm s_{i,j}^h,$$

где

$$\Phi_{i,j}^h = \left(1 + \frac{\alpha h_1}{2\varepsilon}\right)^{i-N_1}, \quad \Theta_{i,j}^h = \exp\left(-\frac{\sigma z_j}{2\varepsilon}\right).$$

Нетрудно убедиться, что при всех i, j

$$\exp[\alpha(2\varepsilon + \alpha h_1)^{-1}(x_i - L_1)] \geq \Phi_{i,j}^h \geq \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x_i - L_1)],$$

$$L_{i,j}^h \Phi^h \geq \frac{\alpha^2}{4\varepsilon + 2\alpha h_1} \Phi_{i,j}^h, \quad L_{i,j}^h \Theta^h \geq \frac{\sigma}{h_2} \tanh\left(\frac{\sigma h_2}{4\varepsilon}\right) \Theta_{i,j}^h. \quad (19.32)$$

Из соотношений (19.26), (19.30)-(19.32) следует, что при достаточно больших постоянных C_3, C_4, C_5 выполнится

$$L_{i,j}^h \Psi^h \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1. \quad (19.33)$$

Покажем, что при достаточно больших C_3, C_4, C_5 $\Gamma^h \Psi^h \geq 0$. Запишем краевые условия для погрешности s^h . Имеем:

$$s_{0,j}^h = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \quad s_{i,N_2}^h = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N_1,$$

$$\Gamma_3 s^h = \frac{\partial u}{\partial x}(L_1, z_j) - \frac{u_{N_1,j} - u_{N_1-1,j}}{h_1},$$

$$\Gamma_4 s^h = \beta_4[1 - \exp(-w(0)\varepsilon^{-1}h_2)]^{-1}w(0)(u_{i,1} - u_{i,0}) - \beta_4\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(x_i, 0). \quad (19.34)$$

Оценим $\Gamma_3 s^h$. Учитывая (19.28) и привлекая оценку второй производной по x согласно (19.8), можно получить: $|\Gamma_3 s^h| \leq C_7 h_1 / (h_1 + \varepsilon)$.

Теперь оценим $\Gamma_4 s^h$. Исходя из представления решения $u(x, z) = V_0(x, z) + R(x, z)$ и учитывая, что краевое условие при $z = 0$ построено так, чтобы аппроксимация производной была точной на

функции V_0 , получим:

$$\Gamma_4 s^h = \beta_4 \tilde{\varepsilon} \frac{R_{i,1} - R_{i,0}}{h_2} - \beta_4 \varepsilon \frac{\partial R}{\partial z}(x_i, 0), \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{w(0)h_2}{1 - \exp[-w(0)\varepsilon^{-1}h_2]}.$$

Учитывая, что $|\tilde{\varepsilon} - \varepsilon| \leq Ch_2$ и используя оценки производных (19.19), получим $|\Gamma_4 s^h| \leq Ch_2$.

После того, как оценена погрешность в задании краевых условий, можно показать, что для достаточно больших постоянных

$\{C_k\}, k = 3, 4, 5, 6$ выполнится $\Gamma^h \Psi^h \geq 0$. Учитывая (19.33), из принципа максимума получим, что покомпонентно $\Psi^h \geq 0$. Это доказывает требуемую оценку (19.25) в случае $i < N_1, j > 0$.

Пусть $i = N_1$. Из краевого условия $\Gamma_3^j u^h = \phi_3(z_j)$ следует

$$|u_{N_1,j}^h - u_{N_1-1,j}^h| \leq Ch_1. \text{ Тогда, очевидно,}$$

$$|u_{N_1,j}^h - u_{N_1,j}| \leq |u_{N_1,j}^h - u_{N_1-1,j}^h| + |u_{N_1-1,j}^h - u_{N_1-1,j}| + |u_{N_1,j} - u_{N_1-1,j}| \leq Ch_1.$$

Пусть $j = 0$. Учитывая, что аппроксимация производной u'_z в краевом условии подобрана так, чтобы она была точной на функции $V_0(x, z)$, привлекая оценки производных (19.19) и учитывая неравенства (19.27), получим:

$$\begin{aligned} & |s_{i,0}^h - \beta_4 [1 - \exp(-w(0)\varepsilon^{-1}h_2)]^{-1} w(0) (s_{i,1}^h - s_{i,0}^h)| \leq \\ & \leq \beta_4 \left| [1 - \exp(-w(0)\varepsilon^{-1}h_2)]^{-1} w(0) (R_{i,1}^h - R_{i,0}^h) - \varepsilon \frac{\partial R}{\partial z}(x_i, 0) \right| \leq \\ & \leq \beta_4 \varepsilon \left| (w(0)h_2\varepsilon^{-1} / [1 - \exp(-w(0)\varepsilon^{-1}h_2)] - 1) \frac{R_{i,1} - R_{i,0}}{h_2} \right| + \\ & \quad + \beta_4 \varepsilon \left| \frac{R_{i,1} - R_{i,0}}{h_2} - \frac{\partial R}{\partial z}(x_i, 0) \right| \leq Ch_2. \end{aligned}$$

Учитывая, что $|s_{i,1}^h| \leq Ch_2$, из этого соотношения получим $|s_{i,0}^h| \leq Ch_2$.

Теорема доказана.

Если решение схемы (19.22) найдено, то граничный поток $\varepsilon u'_z(x, 0)$ можно определить по формуле:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(x_i, 0) \approx \varepsilon \frac{w(0)\varepsilon^{-1}h_2}{1 - \exp(-w(0)\varepsilon^{-1}h_2)} \times \frac{u_{i,1}^h - u_{i,0}^h}{h_2}.$$

Учитывая краевые условия разностной схемы и дифференциальной задачи, несложно показать:

$$\left| \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(x_i, 0) - \varepsilon \frac{w(0)\varepsilon^{-1}h_2}{1 - \exp(-w(0)\varepsilon^{-1}h_2)} \times \frac{u_{i,1}^h - u_{i,0}^h}{h_2} \right| \leq Ch_2.$$

Случай краевого условия второго рода. Остановимся на случае, когда вместо условия (19.26) для границы l_4 задано условие:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (x, z) \in l_4. \quad (19.35)$$

При моделировании распространения примеси условие (19.35) соответствует отражению примеси от поверхности [18]. Можно показать, что в этом случае пограничный слой по координате z отсутствует и справедлива оценка:

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial z^j} u(x, z) \right| \leq C [1 + \varepsilon^{1-j} \exp[-\varepsilon^{-1}\sigma z]], \quad j = 1, 2, 3. \quad (19.36)$$

Согласно (19.36) первая производная решения по координате z ограничена, остальные производные при малых ε могут неограниченно расти около границы $z = 0$. Представляет интерес исследовать, сходится ли в этом случае схема направленных разностей, которая проще специальных схем, учитывающих погранслойный рост решения.

Выпишем схему направленных разностей для задачи (19.1)-(19.2) в случае краевых условий (19.2), (19.35):

$$T_{i,j}^h u^h = -\varepsilon \Lambda_{xx}^{ij} u^h - \varepsilon \Lambda_{zz}^{ij} u^h + a(x_i, z_j) \Lambda_x^{ij} u^h - w(z_j) \Lambda_z^{ij} u^h + f(x_i, z_j, u_{i,j}^h) = 0,$$

$$\begin{aligned}
u_{0,j}^h &= \phi_1(z_j), \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \quad u_{i,N_2}^h = \phi_2(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \\
\Gamma_3^j u^h &= \frac{u_{N_1,j}^h - u_{N_1-1,j}^h}{h_1} + \delta_3 u_{N_1,j}^h = \phi_3(z_j), \quad \Lambda_z^{ij} u^h = \frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{h_2}, \\
\Gamma_4^i u^h &= u_{i,1} - u_{i,0} = 0.
\end{aligned} \tag{19.37}$$

Теорема 19.2. Пусть u^h - решение схемы (19.37), $u(x, z)$ - решение дифференциальной задачи (19.1)-(19,2a),19.35). Найдется постоянная C такая, что при всех $(x_i, z_j) \in \Omega$ выполнится

$$|u_{i,j}^h - u(x_i, z_j)| \leq C(h_1 + h_2).$$

Доказательство. Пусть $s^h = u^h - [u]_\Omega$. Учитывая оценки (19.28) для погрешности разностных аналогов производных, привлекая оценки производных (19.8), (19.36), можно получить:

$$\begin{aligned}
|T_{i,j}^h u^h - T_{i,j}^h [u]_\Omega| &\leq Ch_1 [1 + (h_1 + \varepsilon)^{-1} \exp(\alpha \varepsilon^{-1} (x_{i+1} - L_1))] \\
&+ Ch_2 [1 + (h_2 + \varepsilon)^{-1} \exp(-\sigma \varepsilon^{-1} z_{j-1})].
\end{aligned} \tag{19.38}$$

Определим линейный оператор:

$$L_{ij}^h s^h = -\varepsilon \Lambda_{xx}^{ij} s^h - \varepsilon \Lambda_{zz}^{ij} s^h + a(x_i, z_j) \Lambda_x^{ij} s^h - w(z_j) \Lambda_z^{ij} s^h + b_{i,j}^h s_{i,j}^h,$$

где

$$b_{i,j}^h = [f(x_i, z_j, u(x_i, z_j)) - f(x_i, z_j, u_{i,j}^h)] / s_{i,j}^h \geq \beta > 0.$$

Тогда

$$L_{ij}^h s^h = T_{i,j}^h u^h - T_{i,j}^h [u]_\Omega.$$

Теперь определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_{i,j}^h = C_1 h_1 \Phi_{i+1,j}^h + C_2 h_2 \Theta_{i,j-1}^h + C_3 h_1 + C_4 h_2 \pm s_{i,j}^h,$$

где

$$\Phi_{i,j}^h = \left(1 + \frac{\alpha h_1}{2\varepsilon}\right)^{i-N_1}, \quad \Theta_{i,j}^h = \left(1 + \frac{\sigma h_2}{2\varepsilon}\right)^{-j}.$$

Учитывая оценки (19.38), можно показать, что для достаточно больших постоянных C_i выполнится

$$L_{i,j}^h \Psi^h \geq 0, \quad 1 \leq i < N_1, \quad 1 \leq j < N_2, \quad \Gamma^h \Psi^h \geq 0.$$

В силу принципа максимума покомпонентно $\Psi^h \geq 0$. Это доказывает теорему.

Итак, в случае краевого условия (19.35) схема направленных разностей (19.37) обладает свойством равномерной сходимости.

Схема (19.37) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений. Определим метод линеаризации этой схемы. Пусть

$$\beta \leq \frac{\partial f}{\partial u} \leq M.$$

Выпишем модифицированный метод линеаризации Пикара:

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Lambda_{xx}^{ij} u^{n+1} - \varepsilon \Lambda_{zz}^{ij} u^{n+1} + a(x_i, z_j) \Lambda_x^{ij} u^{n+1} - w(z_j) \Lambda_z^{ij} u^{n+1} + M u_{i,j}^{n+1} = \\ = M u_{i,j}^n - f(x_i, z_j, u_{i,j}^n), \end{aligned}$$

$$u_{0,j}^{n+1} = \phi_1(z_j), \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \quad u_{i,N_2}^{n+1} = \phi_2(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_1,$$

$$\frac{u_{N_1,j}^{n+1} - u_{N_1-1,j}^{n+1}}{h_1} + \delta_3 u_{N_1,j}^{n+1} = \phi_3(z_j), \quad u_{i,1}^{n+1} - u_{i,0}^{n+1} = 0. \quad (19.39)$$

На основании принципа максимума можно показать, что при всех n

$$\|u^{n+1} - u^h\| \leq (1 - \beta M^{-1}) \|u^n - u^h\|.$$

На каждой итерации система (19.39) линейна, матрица этой системы неразложима, имеет слабое диагональное преобладание. Согласно ([40], стр. 259) точечный и блочный методы Гаусса-Зейделя являются в этом случае сходящимися.

Аналогичным образом может быть разрешена схема (19.22).

**§20. Эллиптическое уравнение с параболическими
экспоненциальными слоями в полубесконечной полосе**

В данном параграфе рассматривается эллиптическое уравнение с малым параметром при старших производных в полубесконечной полосе. Такая задача может моделировать распространение примеси в направлении ветра. Предложен способ перехода к прямоугольной области с оценкой возникающей погрешности. В качестве граничного условия на искусственной границе предлагается использовать вырожденное по продольной координате уравнение. Для задачи, полученной в прямоугольной области, обосновывается разностная схема на специальной неравномерной сетке.

Определим $\|p\|_s = \max_{x \geq s} |p(x)|$, для функции двух аргументов

$$\|p\| = \max_{x,y} |p(x,y)|, \quad \|p\|_s = \max_{x \geq s, y} |p(x,y)|. \quad \|p^h\| = \max_{n,m} |p_{n,m}^h|.$$

Рассмотрим краевую задачу:

$$T_\varepsilon u = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} - b(x,y)u = f(x,y), \quad (20.1)$$

$$u(x,y) = \phi_i, \quad (x,y) \in l_i \quad i = 1, 2, 3, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x,y) = 0 \quad (20.2)$$

для полубесконечной полосы: $D = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq 1\}$, где l_1, l_2, l_3 - прямолинейные участки границы: $l_1 = \{y = 0, 0 \leq x < \infty\}$,

$$l_2 = \{x = 0, 0 \leq y \leq 1\}, \quad l_3 = \{y = 1, 0 \leq x < \infty\},$$

$\Gamma = l_1 \cup l_2 \cup l_3, \quad D^0 = D \setminus \Gamma$. Предполагаем, что функции a, b, f, ϕ_i дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам, функции a, b имеют заданные пределы при $x \rightarrow \infty$,

$$\varepsilon \in (0, 1], \quad A \geq a(x,y) \geq \alpha > 0, \quad B \geq b(x,y) \geq \beta > 0, \quad (20.3a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_i(x) = 0, \quad i = 1, 3, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) = 0. \quad (20.3б)$$

Предполагаем, что выполнены условия согласования краевых условий [41], когда решение $u(x, y)$ существует, является достаточно гладкой функцией в области D и нет угловых пограничных слоев.

Для задачи (20.1)-(20.2) справедлив принцип максимума, в соответствии с которым для произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $\Psi(x, y)$, имеющей предел при $x \rightarrow \infty$, из условий:

$$\Psi|_{\Gamma} \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x, y) \geq 0, \quad T_\varepsilon \Psi(x, y) \leq 0, \quad (x, y) \in D^0 \quad (20.4)$$

следует $\Psi(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$.

Лемма 20.1. При всех $(x, y) \in D$ $|u(x, y)| \leq \Phi(x, y)$, где

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \|f\| \beta^{-1} + \|\phi_2\| \exp\{r_0 x\} + \|\phi_1\| \exp\{-(\beta/\varepsilon)^{0.5} y\} + \\ & + \|\phi_3\| \exp\{(\beta/\varepsilon)^{0.5} (y-1)\}, \quad r_0 = -2\beta / \{A + \sqrt{A^2 + 4\beta\varepsilon}\}. \end{aligned} \quad (20.5)$$

Доказательство. Определим $\Psi(x, y) = \Phi(x, y) \pm u(x, y)$. Тогда справедливы соотношения (20.4). В силу принципа максимума $\Psi(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$. Это доказывает лемму.

Определим прямоугольную область:

$$D_L = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Пусть $\tilde{u}(x, y)$ — решение задачи в области D_L :

$$T_\varepsilon \tilde{u} = f(x, y), \quad (x, y) \in D_L^0, \quad \tilde{u}(x, y) = \phi_i, \quad (x, y) \in l_i^0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (20.6)$$

$$R_\varepsilon \tilde{u}(x, y) = a(x, y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + b(x, y) \tilde{u} - \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = -f(x, y), \quad (x, y) \in l_4^0, \quad (20.7)$$

где D_L^0 , l_i^0 соответствуют D^0 , l_i при переходе к прямоугольной области, $l_4^0 = \{x = L, 0 \leq y \leq 1\}$, $\Gamma_L = l_1^0 \cup l_2^0 \cup l_3^0$.

Покажем, что для задачи (20.6)-(20.7) справедлив принцип максимума.

Лемма 20.2. Пусть $\Psi(x, y)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция в D_L . Тогда из условий:

$$\Psi(x, y) \geq 0, (x, y) \in \Gamma_L, \quad T_\varepsilon \Psi(x, y) \leq 0, (x, y) \in D_L^0, \quad R_\varepsilon \Psi(x, y) \geq 0 \quad (20.8)$$

следует $\Psi(x, y) \geq 0, (x, y) \in D_L$.

Доказательство. Предположим, что при каких-то (x, y) оказалось $\Psi(x, y) < 0$. Пусть (x_0, y_0) – точка глобального отрицательного минимума функции $\Psi(x, y)$ в области D_L . Если $(x_0, y_0) \in D_L^0$, то данная точка является точкой локального отрицательного минимума и получим противоречие с условием $T_\varepsilon \Psi(x_0, y_0) \leq 0$. Остается рассмотреть случай $x_0 = L$. Тогда из условия $R_\varepsilon \Psi \geq 0$ следует $\Psi'_x(x_0, y_0) > 0$, что противоречит тому, что (x_0, y_0) – точка глобального минимума. Лемма доказана.

Лемма 20.3. При всех y

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{u}(L, y) = 0.$$

Доказательство. Зададим $M \in (0, L)$. Докажем, что при всех $x \in [M, L]$ $|\tilde{u}(x, y)| \leq S(x, y)$, где

$$S(x, y) = \|\tilde{u}(M, y)\| \exp\{r_0(x - M)\} + \|f\|_M \beta^{-1} + \|\phi_1\|_M + \|\phi_3\|_M. \quad (20.9)$$

Доказать (20.9) можно на основе принципа максимума, определив область $\{M \leq x < \infty, 0 \leq y \leq 1\}$ и задав для этой области

$$\Psi(x, y) = S(x, y) \pm \tilde{u}(x, y).$$

В силу условий (20.36) для заданного $\Delta > 0$ можно подобрать M таким

образом, что

$$\|f\|_M \beta^{-1} + \|\phi_1\|_M + \|\phi_3\|_M < \Delta/2.$$

Учитывая (20.9), можно получить $\|\tilde{u}(M, y)\| \leq C$. Следовательно,

$$|\tilde{u}(L, y)| \leq C \exp\{r_0(L - M)\} + \Delta/2.$$

Таким образом, для некоторого L выполнится $\|\tilde{u}(L, y)\| < \Delta$. Это доказывает лемму.

Теперь оценим близость решения задачи (20.6),(20.7) к решению исходной задачи (20.1),(20.2) при $x \leq L$.

Лемма 20.4. При всех $(x, y) \in D_L$

$$|u(x, y) - \tilde{u}(x, y)| \leq \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(L, y) \right\| \exp\{\alpha \varepsilon^{-1}(x - L)\}.$$

Доказательство. Определим $z = u - \tilde{u}$. Тогда

$$T_\varepsilon z(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D_L^0, \quad z(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_L, \quad R_\varepsilon z = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(L, y).$$

Определим

$$\Psi(x, y) = \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(L, y) \right\| \exp\{\alpha \varepsilon^{-1}(x - L)\} \pm z(x, y).$$

Для функции $\Psi(x, y)$ выполнены условия (20.8). В силу принципа максимума $\Psi(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D_L$. Это доказывает лемму.

Оценка производных.

Лемма 20.5. Пусть при всех $(x, y) \in D$

$$b(x, y) \geq \beta, \quad b(x, y) + 2a'_x(x, y) \geq \beta > 0. \quad (20.10)$$

Тогда при всех $(x, y) \in D$ для некоторой постоянной C

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \leq C. \quad (20.11)$$

Доказательство. Для оценки производных используем подход, применяемый в предыдущем параграфе.

Оцениваем $P(x, y) = u'_x(x, y)$. Сначала проведем оценку на границах области D . Остановимся на случае границы l_2 . Определим область $D_2 = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Для этой области определим

$$u_{\pm}(x, y) = u(0, y) \pm Cx.$$

Для некоторой достаточно большой постоянной C

$$u_+(x, y) \geq u(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma(D_2), \quad T_{\varepsilon}u_+(x, y) \leq T_{\varepsilon}u(x, y), \quad (x, y) \in D_2^0,$$

где $\Gamma(D)$ – граница области D . В силу принципа максимума

$$u_+(x, y) \geq u(x, y), \quad (x, y) \in D_2.$$

Учитывая, что $u_+(0, y) = u(0, y)$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0, y) \leq \frac{\partial}{\partial x}u_+(0, y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0, y) \geq \frac{\partial}{\partial x}u_-(0, y).$$

Из этих двух оценок следует, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}u(x, y) \right| \leq C, \quad (x, y) \in l_2.$$

На границах l_1 и l_3 аналогичная оценка справедлива в силу ограниченности производных $\phi'_i(x)$, $i = 1, 3$.

Перейдем к оценке производной внутри области. Нетрудно показать, что

$$\tilde{T}_{\varepsilon}P = \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - a \frac{\partial P}{\partial x} - (b + a'_x)P = f'_x + b'_x u.$$

Определим $\Psi(x, y) = C \pm P(x, y)$. Тогда для достаточно большой постоянной C :

$$\Psi(x, y) \geq 0, (x, y) \in \Gamma, \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi(x, y) \geq 0, \tilde{T}_\varepsilon \Psi(x, y) \leq 0, (x, y) \in D^0.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$. Это доказывает первую оценку в (20.11). Вторая оценка доказывается аналогично. Лемма доказана.

Итак, если выполнены условия (20.3), (20.10), то в соответствии с леммами 20.4 - 20.5 для некоторой постоянной C при всех $(x, y) \in D_L$

$$|u(x, y) - \tilde{u}(x, y)| \leq C\varepsilon^2 \exp\{\alpha\varepsilon^{-1}(x - L)\}.$$

Оценим производные решения редуцированной задачи (20.6), (20.7).

Лемма 20.6. Пусть в дополнение к (20.3а)

$$a = a(x), b(x, y) + 4a'(x) \geq \beta > 0. \quad (20.12)$$

Тогда для некоторой постоянной C при всех $(x, y) \in D_L$

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial y^j} \tilde{u}(x, y) \right| \leq C [1 + \varepsilon^{-j/2} (\exp\{-(m/\varepsilon)^{1/2}y\} + \exp\{(m/\varepsilon)^{1/2}(y - 1)\})],$$

$$\beta/2 < m < \beta, j = 1, 2, 3, 4, \quad (20.13)$$

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} \tilde{u}(x, y) \right| \leq C [1 + \varepsilon^{1-j} \exp\{\varepsilon^{-1}\alpha(x - L)\}], j = 1, 2, 3, 4. \quad (20.14)$$

Доказательство. Начнем с обоснования оценки (20.13) при $j = 1$.

Оценим \tilde{u}'_y на границе Γ_L . Начнем с l_1^0 . Определим

$$u_\pm(x, y) = \tilde{u}(x, 0) \pm C(1 - \exp\{-y/\sqrt{\varepsilon}\}).$$

Определим $z(x, y) = u_+(x, y) - \tilde{u}(x, y)$. Тогда для достаточно большой постоянной C выполняются условия:

$$z(x, y) \geq 0, (x, y) \in \Gamma_L, R_\varepsilon z(x, y) \geq 0. T_\varepsilon z(x, y) \leq 0. (x, y) \in D_L^0.$$

В силу леммы 20.2 $z(x, y) \geq 0, (x, y) \in D_L$. Следовательно, для достаточно большой постоянной C выполняются условия :

$$u_+(x, y) \geq \tilde{u}(x, y), (x, y) \in D_L, u_+(x, 0) = \tilde{u}(x, 0).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{u}(x, 0) \leq \frac{\partial}{\partial y} u_+(x, 0).$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{u}(x, 0) \geq \frac{\partial}{\partial y} u_-(x, 0).$$

Из этих двух оценок следует

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} \tilde{u}(x, 0) \right| \leq C/\sqrt{\varepsilon}. \quad (20.15)$$

Аналогичная оценка производной справедлива на границе l_3^0 .

Определим

$$P(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \tilde{u}(x, y),$$

$$\Psi(x, y) = C \left[1 + \varepsilon^{-1/2} \left(\exp\{-\sqrt{m\varepsilon^{-1}}y\} + \exp\{\sqrt{m\varepsilon^{-1}}(y-1)\} \right) \right] \pm P(x, y).$$

Нетрудно убедиться, что $T_\varepsilon P = f'_y + b'_y \tilde{u}$. С учетом полученных оценок на границе области D_L , можно показать, что для достаточно большой постоянной C для функции $\Psi(x, y)$ выполняются условия (20.8). В силу леммы 19.2 $\Psi(x, y) \geq 0, (x, y) \in D_L$. Это доказывает оценку (20.13) при $j = 1$. В случае $j = 2$ определим

$$u_\pm(x, y) = P(x, 0) \pm \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} (1 - \exp\{-y/\sqrt{\varepsilon}\}).$$

Если ввести

$$Q(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{u}(x, y),$$

то $T_\varepsilon Q = F(x, y)$, где

$$|F(x, y)| \leq C_1 [1 + \varepsilon^{-1/2} (\exp\{-(m\varepsilon^{-1})^{1/2}y\} + \exp\{(m\varepsilon^{-1})^{1/2}(y-1)\})].$$

И в этом случае при задании

$$\Psi(x, y) = C [1 + \varepsilon^{-1} (\exp\{-\sqrt{m\varepsilon^{-1}}y\} + \exp\{\sqrt{m\varepsilon^{-1}}(y-1)\})] \pm Q(x, y)$$

выполняются условия (20.8). В силу леммы 20.2 $\Psi(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D_L$.

Это доказывает оценку (20.13) при $j = 2$. Доказательство (20.13) при других j можно провести аналогичным образом.

Перейдем к обоснованию оценки (20.14) при $j = 1$. Запишем уравнение (20.6) в виде уравнения по переменной x :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - a(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = F(x, y), \quad (20.16)$$

где с учетом оценки (20.13) $|F(x, y)| \leq C$. Уравнению (20.16) соответствуют краевые условия:

$$\tilde{u}(0, y) = \phi_2(y), \quad R_\varepsilon \tilde{u}(x, y) = -f(x, y). \quad (20.17)$$

Учитывая, что в соответствии с условиями (20.17) производная $\tilde{u}_x(L, y)$ ограничена, на основании приема, используемого для обыкновенного дифференциального уравнения в главе 1, можно убедиться в справедливости оценки (20.14) при $j = 1$.

Докажем (20.14) при $j = 2$. Из уравнения (20.6) следует, что

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \right| \leq \frac{C_0}{\varepsilon}, \quad (x, y) \in l_4^0.$$

Задавая

$$u_\pm(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(0, y) \pm C_0 x,$$

по аналогии с обоснованием (20.13) можно показать:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(0, y) \right| \leq C_0.$$

Определяя

$$\Psi(x, y) = C [1 + \varepsilon^{-1} \exp\{\alpha \varepsilon^{-1}(x - L)\}] \pm \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2},$$

на основании принципа максимума убедимся в справедливости оценки (20.14) при $j = 2$. Случай других j аналогичен. Лемма доказана.

Обоснование разностной схемы. Согласно лемме 20.6 решение, $\tilde{u}(x, y)$ может иметь пограничные слои около границ l_1^0 и l_3^0 . Построить равномерно сходящуюся схему, можно за счет мельчения сетки около этих границ.

Пусть $\Omega = \{x_i, y_j\}, i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2\}$ – сетка области D , с постоянным шагом h_1 по координате x и с неравномерными шагами по y . Предполагаем, что N_2 – четно. Сетку по координате y определим в соответствии с работой Н.С. Бахвалова [15]. Пусть

$$y_j = \lambda(t_j), \quad t_j = j/N_2, \quad j = 0, 1, \dots, N_2.$$

Определим $\lambda(t)$ при $t \leq 0.5$. Зададим постоянные a_0 и q , исходя из ограничений $a_0 \geq 4/\beta, 0 < q < 0.5$. В случае $\sqrt{\varepsilon} \leq 2q/a_0$ определим

$$\lambda(t) = \begin{cases} \Psi(t), & \text{если } 0 \leq t \leq \alpha_0, \\ \Psi(\alpha_0) + \Psi'(\alpha_0)(t - \alpha_0), & \text{если } \alpha_0 \leq t \leq 0.5, \end{cases} \quad (20.18)$$

где

$$\Psi(t) = a_0 \sqrt{\varepsilon} \ln \frac{q}{q - t},$$

$\alpha_0 = (S - 1)S^{-1}q$, S является корнем нелинейного уравнения:

$$\ln(S) = \frac{1}{2a_0 \sqrt{\varepsilon}} - 1 + S \left(1 - \frac{1}{2q}\right).$$

В [15] предлагается находить α_0 на основе метода секущих в соответствии с итерационной формулой:

$$\alpha^{(n+1)} = q - \frac{\alpha^{(n)} - 0.5}{\beta^{(n)} - 0.5} a_0 \sqrt{\varepsilon}, \quad \beta^{(n)} = \Psi(\alpha^{(n)}), \quad \alpha^{(0)} = q - (1 - 2q) a_0 \sqrt{\varepsilon}.$$

В случае $\sqrt{\varepsilon} > 2q/a_0$ зададим $\lambda(t) = t$, что соответствует равномерной сетке. Для $t \in [0.5, 1]$ зададим $\lambda(t) = 1 - \lambda(1 - t)$.

Предполагаем, что всюду ниже $a = a(x)$.

На построенной сетке Ω определим разностную схему:

$$\begin{aligned} T_{i,j}^h u^h &= \varepsilon \Lambda_{xx}^{ij} u^h + \varepsilon \Lambda_{yy}^{ij} u^h - a(x_i) \Lambda_x^{ij} u^h - b_{ij} u_{i,j}^h = f(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Omega^0, \\ u_{i,0}^h &= \phi_1(x_i), \quad u_{i,N_2}^h = \phi_3(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad u_{0,j}^h = \phi_2(y_j), \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \\ R_j u^h &= a(L) \Lambda_x^{N_1 j} u^h + b_{N_1, j} u_{N_1, j}^h - \varepsilon \Lambda_{yy}^{N_1 j} u^h = -f(L, y_j), \quad b_{ij} = b(x_i, y_j), \end{aligned} \quad (20.19)$$

где Ω^0 – множество внутренних узлов,

$$\begin{aligned} \Lambda_{xx}^{ij} u^h &= \frac{u_{i+1,j}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{h_1^2}, \quad \Lambda_x^{ij} u^h = \frac{u_{i,j}^h - u_{i-1,j}^h}{h_1}, \\ \Lambda_{yy}^{ij} u^h &= \frac{2}{h_j^{(2)} + h_{j+1}^{(2)}} \left[\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{h_{j+1}^{(2)}} - \frac{u_{i,j}^h - u_{i,j-1}^h}{h_j^{(2)}} \right]. \end{aligned} \quad (20.20)$$

Докажем, что для схемы (20.19) справедлив принцип максимума.

Лемма 20.7. Пусть для сеточной функции Ψ^h выполнены условия:

$$\begin{aligned} T_{i,j}^h \Psi^h &\leq 0, \quad (x_i, y_j) \in \Omega^0, \quad R_j \Psi^h \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \\ \Psi_{i,j}^h &\geq 0, \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_L. \end{aligned} \quad (20.21)$$

Тогда при всех i, j выполнится $\Psi_{i,j}^h \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что при некоторых (i_0, j_0) оказалась $\Psi_{i_0, j_0}^h < 0$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\Psi_{i_0, j_0}^h = \min_{i,j} \Psi_{i,j}^h.$$

Если (i_0, j_0) – координаты внутреннего узла, то получим противоречие с условием $T_{i_0, j_0}^h \Psi^h \leq 0$. В случае $(x_{i_0}, y_{j_0}) \in l_4^0$ получаем противоречие с условием $R_{j_0} \Psi^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Теорема 20.1. Пусть функция $\tilde{u}(x, y)$ в области D_L имеет непрерывные частные производные четвертого порядка по x и y , пусть выполнены условия (20.3а), (20.12), u^h – решение схемы (20.19) на сетке Ω , построенной согласно (20.18). Тогда найдется постоянная C такая, что при всех $(x_i, y_j) \in \Omega$

$$|\tilde{u}(x_i, y_j) - u_{i,j}^h| \leq C \left[h_1 + \frac{1}{N_2^2} \right]. \quad (20.22)$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - [\tilde{u}]_\Omega$. Тогда

$$\begin{aligned} |T_{i,j}^h z^h| &\leq \left| \varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x_i, y_j) - \Lambda_{xx}^{ij} [\tilde{u}]_\Omega \right) - a(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(x_i, y_j) - \Lambda_x^{ij} [\tilde{u}]_\Omega \right) \right| + \\ &+ \varepsilon \left| \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{u}(x_i, y_j) - \Lambda_{yy}^{ij} [\tilde{u}]_\Omega \right|. \end{aligned} \quad (20.23)$$

Для производных по y справедливы оценки (20.13), поэтому в соответствии с [15] при всех i, j

$$\varepsilon \left| \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{u}(x_i, y_j) - \Lambda_{yy}^{ij} [\tilde{u}]_\Omega \right| \leq \frac{C}{N_2^2}. \quad (20.24)$$

Учитывая (20.14), (20.23), (20.24), можно показать:

$$\begin{aligned} |T_{i,j}^h z^h| &\leq C_1 h_1 \left[1 + \frac{1}{h_1 + \varepsilon} \exp\{\alpha \varepsilon^{-1} (x_{i+1} - L)\} \right] + \frac{C_2}{N_2^2}, \quad (x_i, y_j) \in \Omega^0, \\ |R_j z^h| &\leq C_3 \left[\frac{h_1}{h_1 + \varepsilon} + \frac{1}{N_2^2} \right], \quad 0 < j < N_2, \quad z^h(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_L. \end{aligned} \quad (20.25)$$

Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_{i,j}^h = C_0 \left\{ h_1 \Phi_{i+1,j}^h + h_1 \Phi_{i,j}^h + h_1 + \frac{1}{N_2^2} \right\} \pm z_{i,j}^h,$$

где

$$\Phi_{i,j}^h = \left(1 + \frac{\alpha h_1}{2\varepsilon}\right)^{i-N_1}.$$

Нетрудно убедиться, что при всех i, j

$$T_{i,j}^h \Phi^h \leq -\frac{\alpha^2}{4\varepsilon + 2\alpha h_1} \Phi_{i,j}^h, \quad R_j^h \Phi^h \geq \frac{\alpha^2}{2\varepsilon + \alpha h_1}, \quad \Phi_{i,j}^h \geq \exp\left[\frac{\alpha}{2\varepsilon}(x_i - L)\right]. \quad (20.26)$$

Из соотношений (20.25), (20.26) следует, что при достаточно большой постоянной C_0 для функции Ψ^h выполняются условия (20.21). В соответствии с леммой 20.7 $\Psi_{i,j}^h \geq 0$, $(x_i, y_j) \in \Omega$. Это доказывает требуемую оценку (20.22) при всех j и при всех $i < N_1$.

Получим требуемую оценку при $i = N_1$. Определим $\Delta = h_1 + N_2^{-2}$. Учитывая, что $|z_{N_1,j}^h| \leq C$, из (20.25) получим:

$$\left| a_{N_1} \frac{z_{N_1,j}^h - z_{N_1-1,j}^h}{h_1} - \varepsilon \Lambda_{yy}^{N_1 j} z^h \right| \leq C. \quad (20.27)$$

Пусть

$$z_{N_1,s}^h = \max_j z_{N_1,j}^h.$$

Без ограничения общности можно считать, что $z_{N_1,s}^h \geq z_{N_1-1,s}^h$, так как иначе $z_{N_1,s}^h \leq C\Delta$, что соответствует требуемой оценке. Следовательно, аналоги производных под модулем в (20.27) при $j = s$ разных знаков, откуда следует, что $|z_{N_1,s}^h - z_{N_1-1,s}^h| \leq C\alpha^{-1}h_1$, поэтому $z_{N_1,s}^h \leq C_1\Delta$.

Пусть

$$z_{N_1,s}^h = \min_j z_{N_1,j}^h.$$

Аналогичным образом можно показать, что $z_{N_1,s}^h \geq -C_1\Delta$. Следовательно, при всех j $|z_{N_1,j}^h| \leq C\Delta$. Требуемая оценка при $i = N_1$ получена. Теорема доказана.

В ([124], стр. 219) предложен способ построения неравномерной сетки, в отличие от [15], не требующий итераций для определения α_0 , на-

чина с которого функция $\lambda(t)$ принимается линейной. Функция $\lambda(t)$ из [124] имеет вид:

$$\lambda(t) = \begin{cases} -2\varepsilon_1 \ln(1 - pt), & \text{если } 0 \leq t \leq 0.25, \\ -\varepsilon_1 \ln \varepsilon + 2\varepsilon_1 \varepsilon^{-0.5} p(t - 0.25) + d(t - 0.25)^2, & \text{если } 0.25 \leq t \leq 0.5; \end{cases}$$

$$p = 4(1 - \sqrt{\varepsilon}), d = 8(1 + 2\varepsilon_1 \ln \varepsilon - \varepsilon_1 p \varepsilon^{-0.5}),$$

$$\varepsilon_1 = 4\varepsilon(m + 10\sqrt{\varepsilon})^{-1}, 0 < m < \sqrt{\beta}. \quad (20.28)$$

Для $t \in [0.5, 1]$ $\lambda(t) = 1 - \lambda(1 - t)$. Согласно [124], при построении узлов по координате y на основании такой функции $\lambda(t)$ выполнится оценка (20.24), поэтому и в случае такой сетки останется справедливой теорема 20.1.

Разностная схема (20.19) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, матрица этой системы обладает свойством диагонального преобладания. Согласно ([40], с. 259) итерационный метод Гаусса-Зейделя в этом случае является сходящимся. Итерационный метод для задачи (20.19) можно записать в виде:

$$A_{ij}u_{i+1,j}^{(n)} + C_{ij}u_{i-1,j}^{(n+1)} + D_{ij}u_{i,j-1}^{(n+1)} + E_{ij}u_{i,j+1}^{(n)} - B_{ij}u_{i,j}^{(n+1)} = F_{i,j},$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, j = 1, 2, \dots, N_2 - 1,$$

$$a(L)\Lambda_x^{N_1 j} u^{(n+1)} + b_{N_1, j} u_{N_1, j}^{(n+1)} - \varepsilon \Lambda_{yy}^{N_1 j} u^{(n+1)} = -f(L, y_j), \quad (20.29)$$

где n – номер итерации. Разностное соотношение для правого краевого условия может быть разрешено методом прогонки по координате y .

Остановимся на случае, когда для прямоугольной области правое краевое условие вместо (20.7) задано в виде:

$$R\tilde{u}(x, y) = a(x, y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + b(x, y) \tilde{u} = -f(x, y), (x, y) \in l_4^0. \quad (20.30)$$

Можно показать, что и в случае задачи (20.6), (20.30) справедлив принцип максимума, $\lim \tilde{u}(L, y) = 0, L \rightarrow \infty,$

$$|u(x, y) - \tilde{u}(x, y)| \leq \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \left[\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(L, y) \right\| + \left\| \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(L, y) \right\| \right] \exp\{\alpha\varepsilon^{-1}(x - L)\},$$

где $(x, y) \in D_L$. По аналогии со случаем задачи (20.6)-(20.7), для задачи (20.6),(20.30) может быть построена разностная схема, которая отличается от схемы (20.19) правым краевым условием, и в данном случае для разностной схемы будет справедлива оценка точности (20.22).

Результаты численных экспериментов. Остановимся на результатах численных экспериментов. В полуполосе D , определенной ранее, была рассмотрена краевая задача для уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - 2u = f(x, y)$$

в случае решения:

$$u(x, y) = \exp(r_0 x) \{ \exp(-y/\sqrt{\varepsilon}) + \exp((y-1)/\sqrt{\varepsilon}) + \sin(\pi y) \},$$

$$r_0 = -2/(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}).$$

Пусть u^h – решение схемы (20.19), применяемой после перехода от полуполосы к прямоугольной области. Сетка равномерна по x и неравномерна по y , определена согласно (20.18). В соответствии с леммой 20.4 и теоремой 20.1 при всех $(x_i, y_j) \in \Omega$

$$|u_{i,j}^h - u(x_i, y_j)| \leq 2\varepsilon^2 \exp(r_0 L) + C \left\{ \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2^2} \right\}, \quad r_0 < 0. \quad (20.31)$$

Согласно (20.31), погрешность решения задачи в полубесконечной полосе складывается из погрешности разностной схемы и из погрешности, возникающей при переносе краевого условия из бесконечности.

Для задания краевого условия на правой границе l_4^0 рассмотрим четыре способа:

1. $\tilde{u}(L, y) = 0,$
2. $\tilde{u}'_x(L, y) = 0,$
3. $\tilde{u}'_x(L, y) + 2\tilde{u}(L, y) = -f(L, y),$
4. $\tilde{u}'_x(L, y) + 2\tilde{u}(L, y) - \varepsilon\tilde{u}''_{yy}(L, y) = -f(L, y).$

Решение схемы (20.19) находилось согласно (20.29), для погрешности между двумя соседними итерациями достигалась точность $\Delta = 10^{-6}$. В случае способов (1)-(3) реализация правого краевого условия для разностной схемы упрощалась.

Итак, рассмотрим результаты вычислений. Пусть $z^h = u^h - [u]_\Omega$.

Пусть $L = 1, N_1 = 100, N_2 = 10, a_0 = 2, q = 0.25$ В табл. 20.1 приведена норма погрешности $\|z^h\|$ в зависимости от способа задания краевого условия при различных значениях ε . Из результатов вычислений следует, что задание правого краевого условия согласно способу 4 дает меньшую погрешность при всех значениях параметра ε . Значительна погрешность при задании на правой границе условия Дирихле, соответствующего переносу нулевого краевого условия из бесконечности.

Пусть $L = 10, N_1 = 1000, N_2 = 10, a_0 = 2, q = 0.25$ В табл. 20.2 приведена норма погрешности $\|z^h\|$ при различных значениях ε и при различных способах задания краевого условия. С увеличением длины интервала для всех рассматриваемых способов норма погрешности $\|z^h\|$ выравнивается, переходя в норму погрешности разностной схемы.

Таблица 20.1.

ε	способ задания краевого условия			
	1	2	3	4
1.0	0.87	0.14	7.8E-1	2.0E-2
1.0E-1	0.49	4.2E-2	2.1E-2	0.22E-2
1.0E-2	0.37	0.88E-2	0.47E-2	0.47E-2
1.0E-3	0.37	1.2E-2	1.2E-2	1.1E-2
1.0E-4	0.37	1.2E-2	1.2E-2	1.2E-2
1.0E-5	0.37	1.2E-2	1.2E-2	1.2E-2

Таблица 20.2.

ε	способ задания краевого условия			
	1	2	3	4
1.0	7.1E-2	5.1E-2	7.1 E-2	7.1 E-2
1.0E-1	2.6E-2	2.6E-2	2.6 E-2	2.6 E-2
1.0E-2	0.47E-2	0.47E-2	0.47E-2	0.47E-2
1.0E-3	1.2E-2	1.2E-2	1.2 E-2	1.2 E-2
1.0E-4	1.2E-2	1.2E-2	1.2 E-2	1.2 E-2

§21. Обоснование схемы Самарского для эллиптического уравнения в случае краевых условий третьего рода

Рассмотренная в предыдущем параграфе схема дает лишь первый порядок точности по координате x . В случае равномерной сетки по x повысить точность при $\varepsilon > h_1$ можно с помощью монотонной схемы Самарского ([145], с. 169), как в случае обыкновенного дифференциального уравнения это делалось в §11.

Итак, в области D_L , определенной в §19, рассмотрим краевую задачу:

$$T_\varepsilon u = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a(x) \frac{\partial u}{\partial x} - b(x, y)u = f(x, y), \quad (21.1)$$

$$u|_{l_i} = \phi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad Ru = \eta_4(y)u(L, y) + u'_x(L, y) = \phi_4(y). \quad (21.2)$$

Предполагаем, что функция $u(x, y)$ имеет непрерывные частные производные четвертого порядка по x и y во всей исходной области, $a(x) \geq \alpha > 0, b(x, y) \geq 0, \eta_4(y) \geq 0$. В частности, при переходе от полубесконечной полосы в качестве (21.1), (21.2) может быть задача (20.6), (20.30). К задаче (21.1), (21.2) по координате x применим монотонную схему Самарского. Аппроксимацию производной в краевом условии выполним так, чтобы не понизить точность разностной схемы. При этом матрица разностной схемы потеряет свойство диагонального преобладания. Покажем, что и в данном случае к оператору разностной схемы можно применять принцип максимума.

Предварительно рассмотрим пятиточечную разностную схему:

$$\begin{aligned} L_{n,m}^h u^h &= A_{n,m} u_{n+1,m}^h + C_{n,m} u_{n-1,m}^h + D_{n,m} u_{n,m-1}^h + E_{n,m} u_{n,m+1}^h - B_{n,m} u_{n,m}^h = \\ &= f_{n,m}^h, \quad n = 1, 2, \dots, N_1 - 1, m = 1, 2, \dots, N_2 - 1 \end{aligned} \quad (21.3)$$

с краевыми условиями:

$$u_{n,0} = \phi_n^1, \quad u_{n,N_2} = \phi_n^3, \quad 0 \leq n \leq N_1, \quad u_{0,m} = \phi_m^2, \quad 0 \leq m \leq N_2,$$

$$R_m^h u^h = \eta_m u_{N_1,m}^h + \frac{3u_{N_1,m}^h - 4u_{N_1-1,m}^h + u_{N_1-2,m}^h}{2h_1} = \phi_m^4, \quad 0 < m < N_2. \quad (21.4)$$

Предполагаем, что при всех n, m

$$A_{n,m} \geq 0, \quad C_{n,m} \geq 0, \quad D_{n,m} \geq 0, \quad E_{n,m} \geq 0, \quad C_{N_1-1,m} > 0, \quad \eta_m \geq 0.$$

Сформулируем условия, при выполнении которых для оператора, соответствующего схеме (21.3)-(21.4), справедлив принцип максимума.

Лемма 21.1. Пусть существует сеточная функция ϕ^h такая, что

$$\phi^h > 0, \quad L_{n,m}^h \phi^h < 0, \quad n = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad m = 1, 2, \dots, N_2 - 1,$$

$$\frac{A_{N_1-1,m}}{C_{N_1-1,m}} \phi_{N_1,m}^h - 4\phi_{N_1-1,m}^h + \phi_{N_1-2,m}^h \leq 0,$$

$$3\phi_{N_1,m}^h - 4\phi_{N_1-1,m}^h + \phi_{N_1-2,m}^h > 0. \quad (21.5)$$

Тогда из условий

$$L_{n,m} \Psi^h \leq 0, \quad 0 < n < N_1, \quad 0 < m < N_2, \quad \Psi_{0,m}^h \geq 0, \quad 0 \leq m \leq N_2,$$

$$\Psi_{n,0}^h \geq 0, \quad \Psi_{n,N_2}^h \geq 0, \quad 0 \leq n \leq N_1, \quad R_m^h \Psi^h \geq 0, \quad 0 < m < N_2 \quad (21.6)$$

следует

$$\Psi_{n,m}^h \geq 0, \quad 0 \leq n < N_1, \quad 0 \leq m \leq N_2. \quad (21.7)$$

Доказательство. Предположим, что при каких-то $n < N_1$ и m оказалось $\Psi_{n,m}^h < 0$ и по аналогии со случае трехточечной разностной схемы (§11) получим противоречие. Определим V^h : $\Psi_{n,m}^h = \phi_{n,m}^h V_{n,m}^h$.

Пусть

$$V_{n_0,m_0}^h = \min_{n < N_1, m} V_{n,m}^h, \quad V_{n_0,m_0}^h < 0.$$

Предположим, что $n_0 = N_1 - 1$. Нетрудно показать, что для произвольных n и m

$$L_{n,m}\Psi^h = V_{n,m}^h L_{n,m}\phi^h + A_{n,m}\phi_{n+1,m}^h (V_{n+1,m}^h - V_{n,m}^h) + C_{n,m}\phi_{n-1,m}^h (V_{n-1,m}^h - V_{n,m}^h) + D_{n,m}\phi_{n,m-1}^h (V_{n,m-1}^h - V_{n,m}^h) + E_{n,m}\phi_{n,m+1}^h (V_{n,m+1}^h - V_{n,m}^h). \quad (21.8)$$

Учитывая (21.6), получим:

$$A_{N_1-1,m_0}\phi_{N_1,m_0}^h (V_{N_1,m_0}^h - V_{N_1-1,m_0}^h) + C_{N_1-1,m_0}\phi_{N_1-2,m_0}^h (V_{N_1-2,m_0}^h - V_{N_1-1,m_0}^h) < 0. \quad (21.9)$$

Если $V_{N_1-1,m_0}^h \leq V_{N_1,m_0}^h$, то в узле с координатами $(N_1 - 1, m_0)$ - локальный отрицательный минимум сеточной функции V^h . В соответствии с (21.8) будет $L_{N_1-1,m_0}\Psi^h > 0$, что противоречит условиям (21.6). Остается рассмотреть случай $V_{N_1-1,m_0}^h > V_{N_1,m_0}^h$. Из (21.5)-(21.6) следует:

$$3\phi_{N_1,m_0}^h V_{N_1,m_0}^h - 4\phi_{N_1-1,m_0}^h V_{N_1,m_0}^h + \phi_{N_1-2,m_0}^h V_{N_1,m_0}^h < 0, \\ 3\phi_{N_1,m_0}^h V_{N_1,m_0}^h - 4\phi_{N_1-1,m_0}^h V_{N_1-1,m_0}^h + \phi_{N_1-2,m_0}^h V_{N_1-2,m_0}^h \geq 0,$$

следовательно,

$$4\phi_{N_1-1,m_0}^h (V_{N_1,m_0}^h - V_{N_1-1,m_0}^h) + \phi_{N_1-2,m_0}^h (V_{N_1-2,m_0}^h - V_{N_1,m_0}^h) > 0.$$

Это неравенство можно записать в виде:

$$(4\phi_{N_1-1,m_0}^h - \phi_{N_1-2,m_0}^h)(V_{N_1,m_0}^h - V_{N_1-1,m_0}^h) + \phi_{N_1-2,m_0}^h (V_{N_1-2,m_0}^h - V_{N_1-1,m_0}^h) > 0. \quad (21.10)$$

Из (21.9)-(21.10) получим:

$$(V_{N_1,m_0}^h - V_{N_1-1,m_0}^h)[4\phi_{N_1-1,m_0}^h - \phi_{N_1-2,m_0}^h - A_{N_1-1,m_0}C_{N_1-1,m_0}^{-1}\phi_{N_1,m_0}^h] > 0,$$

Учитывая, что в данном случае $V_{N_1-1,m_0}^h > V_{N_1,m_0}^h$, получим противоречие с условиями (21.5).

Остается рассмотреть случай $n_0 < N_1 - 1$. Из того, что узел (n_0, m_0) - точка локального отрицательного минимума сеточной функции V^h и из (21.8) следует $L_{n_0, m_0} \Psi^h > 0$, что противоречит условиям (21.6). Лемма доказана.

Выпишем разностную схему для задачи (21.1), (21.2):

$$L_{i,j}^h u^h = \varepsilon_i \Lambda_{xx}^{ij} u^h + \varepsilon \Lambda_{yy}^{ij} u^h - a(x_i) \Lambda_x^{ij} u^h - b_{ij} u_{i,j}^h = f(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Omega^0,$$

$$u_{i,0}^h = \phi_1(x_i), \quad u_{i,N_2}^h = \phi_3(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad u_{0,j}^h = \phi_2(y_j), \quad j = 0, 1, \dots, N_2,$$

$$R_j^h u^h = \eta_4(y_j) u_{N_1,j}^h + \frac{3u_{N_1,j}^h - 4u_{N_1-1,j}^h + u_{N_1-2,j}^h}{2h_1} = \phi_4(y_j),$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon \{1 + a(x_i) h_1 / (2\varepsilon)\}^{-1}. \quad (21.11)$$

Покажем, что к оператору схемы (21.11) можно применять принцип максимума. Определим

$$\phi_{i,j}^h = (1 + \varepsilon^{-1} \alpha h_1)^{i-N_1}.$$

Нетрудно убедиться, что для такой функции ϕ^h выполняются соотношения (21.5). Следовательно, если для какой-то функции Ψ^h выполняются условия (21.6), то будут выполнены неравенства (21.7).

Лемма 21.2. Пусть z^h - произвольная сеточная функция. Тогда при всех $i < N_1$ и при всех j

$$|z_{i,j}^h| \leq \beta^{-1} \|L^h z^h\| + \max_{(x_i, y_j) \in \Gamma_L} |z_{i,j}^h| + \alpha^{-1} (\varepsilon + \alpha h_1) \max_j |R_j^h z^h| \exp[\alpha (\varepsilon + \alpha h_1)^{-1} (x_i - L)], \quad (21.12)$$

$$|z_{N_1,j}^h| \leq \frac{4}{3} |z_{N_1-1,j}^h| + \frac{1}{3} |z_{N_1-2,j}^h| + \frac{2}{3} h_1 |R_j^h z^h|. \quad (21.13)$$

Доказательство. Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi^h = \beta^{-1} \|L^h z^h\| + \max_{(x_i, y_j) \in \Gamma_L} |z_{i,j}^h| + \alpha^{-1} (\varepsilon + \alpha h_1) \max_j |R_j^h z^h| \phi^h \pm z^h.$$

Тогда для функции Ψ^h выполняются условия (21.6) и в силу принципа максимума $\Psi_{i,j}^h \geq 0$ при $i < N_1$. Можно показать:

$$\phi_{i,j}^h \leq \exp[\alpha(\varepsilon + \alpha h_1)^{-1}(x_i - L)].$$

Это доказывает (21.12). Неравенство (21.13) следует из краевого условия. Лемма доказана.

Из леммы 21.2 следует единственность и ограниченность решения схемы (21.11). Получим оценку точности схемы (21.11).

Теорема 21.1. Пусть выполнены условия (20.3а), (20.12). Пусть сетка Ω равномерна по x и неравномерна по y , построена согласно (20.18) или (20.28). Тогда для некоторой постоянной C

$$\|u^h - [u]_\Omega\| \leq C \left[\frac{h_1^2}{h_1 + \varepsilon} + \frac{1}{N_2^2} \right]. \quad (21.14)$$

Доказательство. Учитывая, что выбор сетки по координате y обеспечивает второй порядок аппроксимации второй производной по этому направлению, можно показать:

$$|L_{i,j}^h[u]_\Omega - L_{i,j}^h u^h| \leq C_1 \left\{ \frac{h_1^2}{h_1 + \varepsilon} [1 + (h_1 + \varepsilon)^{-1} \exp\{\alpha \varepsilon^{-1}(x_{i+1} - L)\}] + \frac{1}{N_2^2} \right\}. \quad (21.15)$$

Определим $z^h = u^h - [u]_\Omega$. Как это следует из §13, при всех j :

$$|R_j^h z^h| \leq C_2 \frac{h_1^2}{(h_1 + \varepsilon)^2}. \quad (21.16)$$

Определим сеточную функцию:

$$\Psi_{i,j}^h = C \left\{ \frac{h_1^2}{h_1 + \varepsilon} (\phi_{i,j}^h + \rho_{i,j}^h + 1) + \frac{1}{N_2^2} \right\} \pm z_{i,j}^h,$$

где

$$\phi_{i,j}^h = [1 + \alpha h_1 / (2\varepsilon)]^{i-N_1}, \quad \rho_{i,j}^h = [1 + \alpha h_1 / (2\varepsilon)]^{i+1-N_1}.$$

Учитывая (21.15), (21.16), можно показать, что в случае достаточно большой постоянной C выполняются условия (21.6), поэтому в силу леммы 21.1 при всех $i < N_1$ $\Psi_{i,j}^h \geq 0$. Учитывая соотношения (21.13) и (21.16), получим утверждение теоремы.

§22. Нелинейное эллиптическое уравнение с параболическими экспоненциальными погранслоями

Рассмотрим краевую задачу для эллиптического уравнения:

$$T_\varepsilon u = -\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, y, u) = 0, \quad (22.1)$$

в прямоугольной области $G = \{0 \leq x, y \leq 1\}$ с границей Γ . Пусть $G_0 = G \setminus \Gamma$, Γ_i – стороны прямоугольника, пронумерованные при обходе его в направлении по часовой стрелке, причем $\Gamma_1 = \{0 \leq x \leq 1, y = 0\}$, $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma_4$. Определим краевые условия для уравнения (22.1):

$$u|_{\Gamma_0} = S, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma_4} = 0. \quad (22.2)$$

Функции a, f, S предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам, краевые условия согласованы. Предполагаем, что

$$\varepsilon > 0, \quad a(x, y) \geq \alpha > 0, \quad Q \geq \frac{\partial f}{\partial u} \geq \beta > 0. \quad (22.3)$$

Лемма 22.1 Пусть p, q – две произвольные дважды непрерывно дифференцируемые в области G функции. Тогда при всех $(x, y) \in G$

$$|p(x, y) - q(x, y)| \leq \frac{1}{\beta} \max_{G_0} |T_\varepsilon p - T_\varepsilon q| + \max_{\Gamma_0} |p - q| + \max_{\Gamma_4} \left| \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \right|. \quad (22.4)$$

Доказательство. Определим линейный оператор

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + [f(x, y, p) - f(x, y, q)](p - q)^{-1} z$$

с краевыми условиями $z|_{\Gamma_0}$, $z'_x|_{\Gamma_4}$. Тогда

$$T_\varepsilon p - T_\varepsilon q = L_\varepsilon(p - q).$$

Пусть $z = p - q$. Определим функцию:

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{\beta} \max_{G_0} |T_\varepsilon p - T_\varepsilon q| + \max_{\Gamma_0} |z| + \max_{\Gamma_4} \left| \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \right| \pm z.$$

При таком задании Ψ

$$\Psi|_{\Gamma_0} \geq 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}|_{\Gamma_4} \geq 0, \quad L_\varepsilon \Psi|_{G_0} \geq 0. \quad (22.5)$$

В силу принципа максимума $\Psi(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in G$. Это доказывает лемму. Из (22.4) следует оценка решения:

$$|u(x, y)| \leq \frac{1}{\beta} \max_{G_0} |f(x, y, 0)| + \max_{\Gamma_0} |S| \quad (22.6)$$

По аналогиями с §20 можно показать, что для производных справедливости оценки:

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right| \leq C [1 + \varepsilon^{-k/2} (e^{-\delta y} + e^{\delta(y-1)})], \quad \delta = (\beta/\varepsilon)^{1/2}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (x, y) \in G_0, \quad (22.7)$$

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \leq C [1 + \varepsilon^{1-k} e^{\alpha(x-1)\varepsilon^{-1}}], \quad k = 1, 2, 3, \quad (x, y) \in G_0. \quad (22.8)$$

Определим неравномерную сетку области G . По координате y сетка будет построена исходя из требования равномерной сходимости разностной схемы. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $h^{(i)} = \max_n h_n^{(i)}$, $\Omega_0 = \Omega \cap G_0$,

$$\Omega_1 = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h_n^{(1)}, x_0 = 0, x_{N_1} = 1\},$$

$$\Omega_2 = \{y_m : y_m = y_{m-1} + h_m^{(2)}, y_0 = 0, y_{N_2} = 1\}.$$

Пусть узлы сетки Ω_2 построены в соответствии с формулой (20.18). По x сетка предполагается достаточно произвольной, предполагается, что для некоторого $q > 0$

$$h_n^{(1)} \leq q(1 - x_n). \quad n = 2, 3, \dots, N_1 - 1. \quad (22.9)$$

В частности, если сетка равномерна по x , то условия (22.9) выполнены. Выпишем на сетке Ω разностную схему для задачи (22.1)-(22.2):

$$T_{nm}^h u^h = -\varepsilon \lambda_{xx} u_{nm}^h - \varepsilon \lambda_{yy} u_{nm}^h + a_{nm} \lambda_x u_{nm}^h + f(x_n, y_m, u_{nm}^h) = 0,$$

$$0 < n < N_1, \quad 0 < m < N_2, \quad u^h|_{\Gamma_0 \cap \Omega} = S, \quad u_{N_1 m}^h - u_{N_1-1, m}^h = 0. \quad (22.10)$$

Здесь

$$\lambda_{xx} u_{nm}^h = \frac{u_{nm}^h - u_{n-1, m}^h}{h_n^{(1)}}, \quad \lambda_x u_{nm}^h = \frac{2(\lambda_x u_{n+1, m}^h - \lambda_x u_{nm}^h)}{h_n^{(1)} + h_{n+1}^{(1)}}.$$

Аналогично определяется λ_{yy} .

Теорема 22.1 Пусть шаги сетки по x удовлетворяют ограничению (22.9), по y построены согласно (20.18). Тогда для некоторой постоянной C

$$|u(x_i, y_j) - u_{ij}^h| \leq C[(1 + q)h^{(1)} + N_2^{-2}].$$

Доказательство. Определим линейный оператор:

$$L_{nm}^h z^h = -\varepsilon \lambda_{xx} z_{nm}^h - \varepsilon \lambda_{yy} z_{nm}^h + a_{nm} \lambda_x z_{nm}^h + \\ + [f(x_n, y_m, u_{nm}^h) - f(x_n, y_m, u_{nm})](u_{nm}^h - u_{nm})^{-1} z_{nm}^h,$$

где $u_{nm} = u(x_n, y_m)$. Тогда

$$T^h u^h - T^h[u]_{\Omega} = L^h(u^h - [u]_{\Omega}). \quad (22.11)$$

Оценим погрешность аппроксимации схемы (22.10). Используем оценки (19.28) для точности разностных аналогов производных, распределение узлов по координате y и оценки производных (22.7), (22.8). Тогда получим:

$$|T_{nm}^h u^h - T_{nm}^h u_{nm}| \leq CN_2^{-2} + Ch^{(1)}[1 + \eta_n^{-1} \exp(\alpha\varepsilon^{-1}(x_{n+1} - 1))], \quad (22.12)$$

где $\eta_n = \max(h_n^{(1)}, \varepsilon)$. Определим сеточные функции:

$$\phi_{nm}^h = \prod_{i=n+1}^{N_1} \left(1 + \frac{\alpha h_i^{(1)}}{4\varepsilon}\right)^{-1}, \quad R_{nm}^h = \prod_{i=n+1}^{N_1-1} \left(1 + \frac{\sigma \alpha h_i^{(1)}}{\varepsilon}\right)^{-1},$$

здесь $\sigma = \min\{1/4, (1+q)^{-1}\}$. Тогда

$$L_{nm}^h \phi^h \geq C\eta_n^{-1} \phi_{nm}^h, \quad L_{nm}^h R^h \geq C\sigma\eta_n^{-1} R_{nm}^h. \quad (22.13)$$

Несложно показать, используя (22.9), что

$$R_{nm}^h \geq \exp(\alpha\varepsilon^{-1}(x_{n+1} - 1)). \quad (22.14)$$

Определим сеточную функцию Ψ^h :

$$\Psi_{nm}^h = C[\phi_{nm}^h + \sigma^{-1} R_{nm}^h + x_n] h^{(1)} \pm (u_{nm}^h - u_{nm}).$$

Учитывая (22.11)-(22.14), для некоторой постоянной C получим:

$$L^h \Psi^h |_{\Omega_0} \geq 0, \quad \Psi^h |_{\Gamma_0 \cap \Omega} \geq 0, \quad \Psi_{N_1, m}^h - \Psi_{N_1-1, m}^h \geq 0,$$

$m = 1, 2, \dots, N_2$. В силу принципа максимума $\Psi^h |_{\Omega} \geq 0$. Это доказывает теорему.

Схема (22.10) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений. Определим метод линеаризации этой схемы:

$$-\varepsilon \lambda_{xx} u_{nm}^{j+1} - \varepsilon \lambda_{yy} u_{nm}^{j+1} + a_{nm} \lambda_x u_{nm}^{j+1} + Q u_{nm}^{j+1} = Q u_{nm}^j - f(x_n, y_m, u_{nm}^j),$$

$$0 < n < N_1, \quad 0 < m < N_2, \quad u^{j+1} |_{\Gamma_0 \cap \Omega} = S, \quad u_{N_1 m}^{j+1} - u_{N_1-1, m}^{j+1} = 0. \quad (22.15)$$

Нетрудно убедиться, что итерационный метод сходится независимо от начального приближения и на каждой итерации

$$\max_{\Omega} |u^{j+1} - u^h| \leq (1 - \beta Q^{-1}) \max_{\Omega} |u^j - u^h|.$$

В силу диагонального преобладания метод Гаусса-Зейделя для нахождения решения на каждой итерации будет сходящимся.

Результаты численных экспериментов. Была рассмотрена краевая задача:

$$-\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + K e^{-E/u} = 0,$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, 1) = 1, \quad u(0, y) = y(1 - y) + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0. \quad (22.16)$$

В (22.16) функция, задающая нелинейность уравнения, соответствует притоку тепла при моделировании химических реакций в соответствии с законом Аррениуса [91]. Для экспериментов выбрали $E = 5$, $K = 1000$. При таком задании f выполняется $0 < f'_u < 20$. Для отыскания решения схемы (22.10) использовался метод линеаризации (22.15) при различных значениях Q . Для отыскания решения на каждой итерации использовался поточечный метод Гаусса-Зейделя. Итерации заканчивались, если относительная погрешность между двумя соседними итерациями в каждом узле становилась меньше 0.001. В табл. 22.1 приведены значения требуемого количества итераций в зависимости от Q , при этом $\varepsilon = 0.01$, сетка Ω размером 11×21 . Данные табл. 22.1 подтверждают, что при выборе Q следует использовать верхнюю оценку для f'_u .

Остановимся на анализе точности схемы (22.10). Сетка бралась равномерной по x , по y рассматривались случай равномерной сетки и слу-

чай, когда узлы в погранслое около границы $y = 0$ задаются по формуле:

$$y_m = -\delta^{-1} \ln[1 - (1 - \varepsilon^{1/2})mM^{-1}],$$

где M - количество шагов в погранслое. Около границы $y = 1$ узлы задавались аналогичным образом. За точное решение принималось решение, вычисленное на мелкой по y равномерной сетке, когда сетка Ω размером 11×201 . В табл.22.2 приведены значения $u^h(1, y)$ при различных значениях y для сетки Ω размером 11×21 , $\varepsilon = 10^{-3}$. Для сравнения результатов на разных сетках использовался метод линейной интерполяции. Численные эксперименты подтверждают преимущество неравномерной сетки.

Таблица 22.1.

Q	Число итераций метода (22.1)	Максимум число итераций на шаге	Всего итераций Гаусса-Зейделя
0	нет сходимости		
5	нет сходимости		
10	15	12	78
15	15	10	54
20	16	8	48
25	21	8	64
40	32	6	88
199	67	4	152

Таблица 22.2.

y	Точное решение	неравномерная сетка	равномерная сетка
0.02	0.655222	0.655599	0.83985
0.04	0.580660	0.578609	0.671970
0.06	0.559257	0.555958	0.582498
0.08	0.553695	0.553409	0.567570
0.10	0.552595	0.550860	0.552642
0.20	0.553402	0.550622	0.550053
0.30	0.554135	0.551421	0.551510
0.40	0.554544	0.551933	0.551990

Итак, в данной главе построены разностные схемы для нелинейных двумерных эллиптических сингулярно - возмущенных уравнений в случаях регулярного и параболического экспоненциальных погранслоев по одной из координат. Пограничный слой по продольной координате в силу поставленного краевого условия слабо выражен, что соответствует моделированию процессов переноса. Использование сетки Бахвалова по погранслойной координате, как и в случае обыкновенного дифференциального уравнения, дает равномерный второй порядок точности. Получено обобщение монотонной схемы Самарского на случай эллиптического уравнения и краевых условий третьего рода. Предложен способ редукции краевой задачи с полубесконечной полосы к задаче для прямоугольной области.

Глава 5

Моделирование переноса примеси от источников загрязнений

Вопрос охраны окружающей среды актуален. Для решения вопроса поиска источников загрязнений на основе компьютерного моделирования необходимо предварительно решить задачу численного моделирования процесса переноса примесей от источников. Пакет программ по численному моделированию процессов переноса примесей в атмосфере и поиску источников загрязнений разрабатывался в соответствии с хоздоговором между Омским областным комитетом природы и Институтом информационных технологий и прикладной математики СО РАН коллективом авторов. Ниже приведено математическое описание части пакета, разрабатываемой автором диссертации.

При математическом моделировании процесса переноса примеси возникают уравнения в частных производных относительно концентраций примесей с малыми коэффициентами диффузии при старших производных. Из-за этого имеют место пограничные слои и от используемых схем естественно требовать свойство равномерной сходимости. Область, в которой ставится краевая или начально- краевая задача, изначально может быть неограниченной. В связи с этим возникает проблема редукции задачи к ограниченной области. При разработке численного алгоритма для создания пакета программ использовались результаты диссертационного исследования.

§23. Схема для численного моделирования стационарного распространения примеси в направлении ветра

При математическом моделировании стационарного распространения примеси в направлении ветра, согласно [18], возникает краевая задача для двумерного эллиптического уравнения в бесконечной полосе. Определим соответствующую краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + w(y) \frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y)u = f(x, y) \quad (23.1)$$

для бесконечной полосы $D = \{-\infty < x < \infty, 0 < y < 1\}$. Зададим граничные условия:

$$u(x, 1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = 0, \quad u(x, 0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0. \quad (23.2)$$

Предполагаем, что

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad a(x, y) \geq \alpha > 0, \quad w(y) > \beta > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad c(x, y) \geq \sigma > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x, y) = a_{\pm\infty}(y), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c(x, y) = c_{\pm\infty}(y), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) = 0. \quad (23.3a)$$

Функции a, w, c, f предполагаем дважды непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам. Для оценки производных решения по x потребуется ограничение:

$$c(x, y) + 4a'_x \geq \sigma > 0. \quad (23.3б)$$

Если задачу (23.1)-(23.2) рассматривать для моделирования распространения примеси, то

x – координата в направлении ветра, y – вертикальная координата, $u(x, y)$ – концентрация примеси, $a(x, y)$ – скорость ветра, $w(y)$ – скорость оседания примеси, $c(x, y)$ – коэффициент поглощения примеси,

ε_1 и $(\varepsilon_2 + y)$ – коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии, β_2 – коэффициент обмена примеси с поверхностью (при $\beta_2 \rightarrow \infty$ отражение примеси от поверхности, при $\beta_2 = 0$ поглощение примеси поверхностью, например водной средой), $f(x, y)$ – функция, соответствующая источнику примеси, предполагается достаточно гладкой. Чтобы вычислить концентрации примеси в пространственной области, согласно [18], следует домножить $u(x, y)$ на экспоненциальную функцию третьей координаты, соответствующую рассеянию примеси за счет диффузии в направлении, ортогональном направлению ветра.

Заметим, что при расчете практических задач [18] принимается, что скорость ветра зависит от вертикальной координаты. Тогда условие (23.3б) следует из (23.3а). При моделировании распространения примеси коэффициент диффузии по горизонтальной координате в [18], [139] принимается постоянным, а по вертикальной координате – зависящим от координаты, причем эта зависимость может выражаться линейным образом. Этому соответствует выбор коэффициентов при старших производных в задаче (23.1).

Ниже построим сходящуюся разностную схему для бесконечной полосы, а затем рассмотрим вопрос редукции разностной схемы к конечному числу узлов.

Нетрудно убедиться, что относительно решения задачи (23.1)-(23.2) справедлива оценка $\|u(x, y)\| \leq \beta^{-1} \|f(x, y)\|$. Оценим производные решения задачи (23.1)-(23.2).

Лемма 23.1. Для некоторой постоянной C_0 справедливы оценки:

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \leq C_0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (23.4)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq \frac{C_0}{\varepsilon_2 + y}. \quad (23.5a)$$

В случае $\beta > 1$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq C_0 + C_0 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + y} \right)^{\beta-1} \frac{1}{\varepsilon_2 + y}. \quad (23.5б)$$

Доказательство. Для получения оценки (23.4) в случае $k = 1$ можно ввести $P(x, y) = u'_x$ и, дифференцируя (23.1)-(23.2) по x , перейти к краевой задаче относительно P . Далее ограниченность первой производной следует из принципа максимума, если в качестве барьерной функции взять константу. Случай других k аналогичен.

Остановимся на обосновании оценок (23.5). В случае обыкновенного уравнения оценка производной вида (23.5а) получена в [13], оценка (23.6) – в [125]. Запишем уравнение (23.1) в виде:

$$(\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + w(y) \frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y), \quad (23.6)$$

где с учетом оценки (23.4) $|F(x, y)| \leq C$. В силу равномерной по ε ограниченности решения задачи (23.1)-(23.2) при заданном x найдется s , такое, что

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, s) \right| \leq C_0.$$

Интегрируя уравнение (23.6) по y от s до y с применением формулы интегрирования по частям, убеждаемся в справедливости оценки (23.5а).

Остановимся на случае $\beta > 1$. Пусть $V = u'_y$. Тогда из уравнения (23.6) следует:

$$V(x, y) = V(x, 0) \exp \left[- \int_0^y \frac{w(s)}{\varepsilon_2 + s} ds \right] + \int_0^y \frac{F(x, s)}{\varepsilon_2 + s} \exp \left\{ - \int_s^y \frac{w(s)}{\varepsilon_2 + s} ds \right\} ds.$$

Из краевых условий (23.2) следует, что $|V(x, 0)| \leq C\varepsilon_2^{-1}$. Теперь не сложно получить требуемую оценку (23.5б). Лемма доказана.

Построение разностной схемы. Согласно лемме 23.1 производные решения по переменной x равномерно ограничены, а по переменной y

имеет место степенной пограничный слой. Для построения разностной схемы используем метод прямых по x , по y строим схему по аналогии со случаем обыкновенного уравнения (§6.) Будем предполагать сетку равномерной по обоим координатным направлениям, с шагами h_1 и h_2 . При применении метода прямых от функции двух аргументов $u(x, y)$ перейдем к бесконечной системе дифференциальных уравнений с решением $u_i(y) = u(x_i, y)$, $-\infty < i < +\infty$, $y \in [0, 1]$.

Итак, перейдем от (23.1)-(23.2) к системе уравнений:

$$(\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}(y) + w(y) \frac{\partial u_i}{\partial y}(y) = F(x_i, y, u),$$

$$u_i(0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial u_i}{\partial y}(0) = 0, \quad u_i(1) = 0, \quad |i| < \infty, \quad u_i(y) \rightarrow 0, \quad |i| \rightarrow \infty \quad (23.7)$$

где

$$F(x, y, u) = -\varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, y)u + f(x, y), \quad u(x, y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Пусть $\Delta_j = (y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, 2, \dots, N_2$, $y_0 = 0$, $y_{N_2} = 1$. Перейдем от (23.7) к системе уравнений с кусочно - постоянными коэффициентами:

$$(\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial y^2}(y) + \tilde{w}(y) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y}(y) = \tilde{F}(x_i, y, \tilde{u}),$$

$$\tilde{u}_i(0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y}(0) = 0, \quad \tilde{u}_i(1) = 0, \quad \tilde{u}_i(y) \rightarrow 0, \quad |i| \rightarrow \infty \quad (23.8)$$

где при $y \in \Delta_j$ $\tilde{w}(y) = w(y_j)$,

$$\tilde{F}(x_i, y, \tilde{u}) = -\varepsilon_1 \frac{\tilde{u}_{i+1,j} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i-1,j}}{h_1^2} + a(x_i, y_j) \frac{\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i-1,j}}{h_1} + c(x_i, y_j)\tilde{u}_{i,j} + f(x_i, y_j), \quad \tilde{u}_i(y) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \pm\infty, \quad \tilde{u}_{i,j} = \tilde{u}(x_i, y_j).$$

По аналогии со случаем обыкновенного дифференциального уравнения (§6) перейдем от (23.8) к точной разностной схеме. Для этого для каждого i и каждого сеточного интервала Δ_j для уравнений (23.8)

выпишем точное решение, условие непрерывности производной по y на границе двух соседних интервалов Δ_j и Δ_{j+1} приведет к конечно-разностным соотношениям. Соотношение, соответствующее краевому условию, будет получено в результате подстановки решения задачи (23.8) на первом сеточном интервале в левое краевое условие. Предполагаем, что $w_j \neq 1$. В случае $w_j = 1$ разностная аппроксимация по y меняется по аналогии с §6, на обоснование сходимости схемы этот случай не влияет. Построенная разностная схема имеет вид:

$$\frac{u_{i,j}^h - u_{i,j-1}^h - F_{i,j} w_j^{-1} h_2}{(1 + y_j \varepsilon^{-1})^{w_j} [(1 + y_j \varepsilon^{-1})^{1-w_j} - (1 + y_{j-1} \varepsilon^{-1})^{1-w_j}]} - \frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h - F_{i,j+1} w_{j+1}^{-1} h_2}{(1 + y_j \varepsilon^{-1})^{w_{j+1}} [(1 + y_{j+1} \varepsilon^{-1})^{1-w_j} - (1 + y_j \varepsilon^{-1})^{1-w_j}]} = \left(\frac{F_{i,j+1}}{w_{j+1}} - \frac{F_{i,j}}{w_j} \right) \varepsilon,$$

$$u_{i,0}^h - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{F_{i,1}}{w_1} - \beta_2 (1 - w_1) \frac{u_{i,1}^h - u_{i,0}^h - F_{i,1} w_1^{-1} h_2}{(1 + h_2 \varepsilon_2^{-1})^{1-w_1} - 1} = 0, \quad u_{i,N_2}^h = 0,$$

$$j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad -\infty < i < +\infty, \quad u_{i,j}^h \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \pm\infty, \quad (23.9)$$

где

$$F_{i,j} = -\varepsilon_1 \frac{u_{i+1,j}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{h_1^2} + a(x_i, y_j) \frac{u_{i,j}^h - u_{i-1,j}^h}{h_1} + c(x_i, y_j) u_{i,j}^h + f(x_i, y_j).$$

Схема (23.9) может быть записана в виде семиточечной разностной схемы с бесконечным числом узлов по координате x .

Теорема 23.1 Для схемы (23.9) справедлива оценка точности:

$$|u_{i,j}^h - u(x_i, y_j)| \leq C h_1 + C |\ln(\varepsilon_2 + y_j)| h_2, \quad |i| < \infty, \quad 0 \leq j \leq N_2. \quad (23.10a)$$

В случае $\beta > 1$

$$|u_{i,j}^h - u(x_i, y_j)| \leq C(h_1 + h_2), \quad -\infty < i < +\infty, \quad 0 \leq j \leq N_2. \quad (23.10б)$$

Доказательство. По построению схема (23.9) является точной на решении задачи (23.8), поэтому достаточно оценить близость решений задач (23.7) и (23.8). Пусть $z_i = u_i - \tilde{u}_i$, $-\infty < i < +\infty$. Нетрудно убедиться, что вектор-функция $z(y)$ является решением краевой задачи:

$$Lz = (\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \tilde{w}(y) \frac{\partial z}{\partial y} - Mz = F(x, y, u) - \tilde{F}(x, y, u) + (\tilde{w}(y) - w(y)) \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$z_i(0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial z_i}{\partial y}(0) = 0, \quad z_i(1) = 0, \quad |i| < \infty, \quad z_i(y) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \pm\infty, \quad (23.11)$$

где M – трехдиагональная матрица бесконечного порядка, ненулевые элементы произвольной i -ой строки которой имеют вид:

$$M_{i,i-1} = - \left(\frac{\varepsilon_1}{h_1^2} + \frac{a(x_i, y)}{h_1} \right), \quad M_{i,i} = \frac{2\varepsilon_1}{h_1^2} + \frac{a(x_i, y)}{h_1} + c(x_i, y), \quad M_{i,i+1} = - \frac{\varepsilon_1}{h_1^2}.$$

Учитывая оценки производных согласно лемме 23.1, получим:

$$\max_i |L_i z(y)| \leq C_0 h_1 + \frac{C_0 h_2}{\varepsilon_2 + y}. \quad (23.12)$$

Покажем, что для оператора L справедлив принцип максимума и если для какой-либо дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\Psi(y)$ выполнены условия:

$$\Psi(0) - \varepsilon_2 \beta_2 \Psi'(0) \geq 0, \quad \Psi(1) \geq 0, \quad L\Psi(y) \leq 0, \quad \lim_{i \rightarrow \pm\infty} \Psi_i(y) > 0, \quad (23.13)$$

то $\Psi(y) \geq 0$ при всех $y \in [0, 1]$.

В соответствии с условием $\lim_{i \rightarrow \pm\infty} \Psi_i(y) > 0$, поэтому для достаточно больших $|i|$ $\Psi_i(y) \geq 0$. Предположим, что для некоторого ограниченного индекса i_0 и y_0 оказалось $\Psi_{i_0}(y_0) < 0$. Можно убедиться, что тогда существует точка минимума функции $\Psi_{i_0}(y)$. Без ограничения общности можно считать, что y_0 – точка минимума. Нетрудно показать, что тогда

$$L_{i_0} \Psi(y_0) \geq -\sigma \Psi(y_0) > 0,$$

что противоречит условиям (23.13).

Итак, принцип максимума для оператора L имеет место.

Можно считать, что $\beta < 1$. Определим вектор-функцию $\Psi(y)$:

$$\Psi_i(y) = Ch_1(1 - y) + C \ln(\varepsilon_2 + 1)h_2 - C \ln(\varepsilon_2 + y)h_2 \pm z_i(y).$$

Учитывая оценку (23.12), заключаем, что для некоторой постоянной C для заданной функции $\Psi(y)$ выполняются условия (23.13). В силу принципа максимума $\Psi(y) \geq 0$. Следовательно, при всех i

$$|z_i(y)| \leq Ch_1 + C \ln(\varepsilon_2 + 1)h_2 - C \ln(\varepsilon_2 + y)h_2.$$

Это доказывает оценку (23.10а).

Остановимся на случае $\beta > 1$. Учтем оценку производной (23.56) и получим:

$$\max_i |L_i z(y)| \leq C_0 h_1 + C_0 h_2 + C_0 h_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + y} \right)^{\beta-1} \frac{1}{\varepsilon_2 + y}. \quad (23.14)$$

Определим вектор - функцию $\Psi(y)$ с компонентами:

$$\Psi_i(y) = Ch_1(1 - y) + Ch_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + y} \right)^{\beta-1} + Ch_2 \pm z_i(y).$$

Учитывая оценку (23.14), получим, что для некоторой постоянной C для $\Psi_i(y)$ будут выполнены условия (23.13). Тогда в силу принципа максимума $\Psi_i(y) \geq 0$, $y \in [0, 1]$. Это доказывает оценку (23.10б). Теорема доказана.

Переход к конечному числу узлов. Итак, доказали, что схема (23.9) обладает свойством сходимости, равномерной по малым параметрам. Эта схема может быть записана в виде трехточечной векторной разностной схемы по координате x с бесконечным числом узлов. Для перехода к конечному числу узлов можно использовать подход из §17.

Ниже рассмотрим этот вопрос в случае применения разностной схемы на неравномерной сетке для задачи (23.1)-(23.2).

Согласно лемме 23.1 решение задачи (23.1)-(23.2) содержит степенной пограничный слой около границы $y = 0$. Для решения такой задачи по погранслошной координате можно использовать схему направленных разностей на специальной неравномерной сетке. Такая сетка может быть получена из равномерной на основе преобразования координат [124], обеспечивающего ограниченность производных до некоторого порядка в преобразованных координатах, что обеспечивает равномерную сходимость разностной схемы. В [126] введено четыре стандартных локальных растягивающих преобразования, зависящих от вида пограничного слоя. В частности, степенному пограничному слою соответствует преобразование, определяющее неравномерную сетку:

$$x(\phi, \varepsilon) = (\varepsilon^{km} + c\phi)^{1/m} - \varepsilon^k, \quad c = (\varepsilon^k + 1)^m - \varepsilon^{km}. \quad (23.15)$$

Такая функция может задавать узлы неравномерной сетки на всем интервале и не требует дополнительных склеек. Константы k и m служат для регулирования шагов сетки.

Ниже будем предполагать, что сетка по x равномерна, по y построена исходя из требования равномерной сходимости схемы направленных разностей, схема имеет вид;

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\varepsilon_1}{h_1^2} + \frac{a_{ij}}{h_1} \right] u_{i-1,j} - \left[\frac{2\varepsilon_1}{h_1^2} + \frac{2(\varepsilon_2 + y_j)}{h_j h_{j+1}} + \frac{a_{ij}}{h_1} + \frac{w_j}{h_j} + c_{ij} \right] u_{i,j} + \\ & + \frac{\varepsilon_1}{h_1^2} u_{i+1,j} + \left[\frac{2(\varepsilon_2 + y_j)}{h_{j+1}(h_j + h_{j+1})} + \frac{w_j}{h_j} \right] u_{i,j+1} + \frac{2(\varepsilon_2 + y_j)}{h_j(h_j + h_{j+1})} u_{i,j-1} = f_{ij}, \\ & u_{i,N_2} = 0, \quad u_{i,0} - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h_1^{(2)}} = 0, \quad u_{ij} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (23.16)$$

В схеме (23.16) h_1 – постоянный шаг по x , h_j – неравномерные шаги по y , для однозначного понимания первый неравномерный шаг обозначен через $h_1^{(2)}$.

Рассмотрим вопрос редукции схемы (23.16) к конечному числу узлов. Для этого запишем (23.16) в векторном виде:

$$\mathbf{L}_i \mathbf{U} = \mathbf{C}_i \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad -\infty < i < +\infty, \quad (23.17)$$

$$\mathbf{U}_i \rightarrow \mathbf{0}, \quad i \rightarrow \pm\infty, \quad (23.18)$$

где \mathbf{C}_i , \mathbf{D}_i – диагональные матрицы с элементами

$$C_i^{j,j} = \frac{\varepsilon_1}{h_1^2} + \frac{a_{i,j-1}}{h_1}, \quad D_i^{j,j} = \frac{\varepsilon_1}{h_1^2} \text{ при } N_2 \geq j \geq 2; \quad C_i^{(1,1)} = D_i^{(1,1)} = 0.$$

Ненулевые элементы матрицы \mathbf{G}_i имеют вид:

1). В случае $j = 1$

$$G_i^{1,1} = 1 + \frac{\varepsilon_2 \beta_2}{h_1}, \quad G_i^{1,2} = -\frac{\varepsilon_2 \beta_2}{h_1}.$$

2). В случае $N_2 > j \geq 2$

$$G_i^{j,j-1} = -\frac{2(\varepsilon_2 + y_{j-1})}{h_{j-1}(h_{j-1} + h_j)}, \quad G_i^{j,j} = \frac{2\varepsilon_1}{h_1^2} + \frac{2(\varepsilon_2 + y_{j-1})}{h_{j-1}h_j} + \frac{a_{i,j-1}}{h_1} + \frac{w_{j-1}}{h_{j-1}} + c_{i,j-1},$$

$$G_i^{j,j+1} = -\left[\frac{2(\varepsilon_2 + y_{j-1})}{h_j(h_{j-1} + h_j)} + \frac{w_{j-1}}{h_{j-1}} \right].$$

3). В случае $j = N_2$, в отличие от случая 2), $G_i^{j,j+1}$ отсутствует.

Нетрудно видеть, что матричные коэффициенты схемы (23.17) удовлетворяют ограничениям (17.3), (17.4). Следовательно, для сведения схемы (23.17) к конечному числу узлов можно использовать подход, предложенный в §17.

Рассмотрим отдельно перенос краевого условия из $+\infty$ и из $-\infty$. Перенос краевого условия из $+\infty$ осуществляется на основе соотношения левой матричной прогонки, а перенос краевого условия из $-\infty$ – на основе соотношения правой матричной прогонки.

Определим соотношение:

$$\mathbf{U}_{i-1} = \mathbf{A}_i^{(1)}\mathbf{U}_i + \mathbf{B}_i^{(1)}, \quad (23.19)$$

где коэффициенты $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и $\mathbf{B}_i^{(1)}$ являются решениями задач с предельным условием на $-\infty$:

$$\mathbf{A}_{i+1} = (\mathbf{G}_i - \mathbf{C}_i\mathbf{A}_i)^{-1}\mathbf{D}_i, \quad \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}_{-\infty}, \quad i \rightarrow -\infty, \quad (23.20)$$

$$\mathbf{C}_i(\mathbf{B}_{i+1} - \mathbf{B}_i) + [\mathbf{G}_i - \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_i\mathbf{A}_i]\mathbf{B}_{i+1} = -\mathbf{F}_i, \quad \mathbf{B}_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow -\infty, \quad (23.21)$$

матрица $\mathbf{A}_{-\infty}$ является решением уравнения:

$$\mathbf{C}_{-\infty}\mathbf{A}^2 - \mathbf{G}_{-\infty}\mathbf{A} + \mathbf{D}_{-\infty} = 0$$

с нормой, меньшей единицы.

Предполагаем выполненными ограничения (17.3)-(17.4). По аналогии с оценкой $\mathbf{A}_i^{(2)}$ в §17, можно показать, что при всех i $\|\mathbf{A}_i^{(1)}\| \leq \sigma < 1$. Следовательно, соотношение (23.19) выделяет многообразие решений схемы (23.17), удовлетворяющих предельному условию на $-\infty$. Для приближенного нахождения $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и $\mathbf{B}_i^{(1)}$ из (23.20), (23.21) можно использовать подход, предложенный в §17. Редуцированная к конечному числу узлов, схема (23.17)-(23.18) принимает вид:

$$\mathbf{L}_i\mathbf{U} = \mathbf{C}_i\mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{G}_i\mathbf{U}_i + \mathbf{D}_i\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad M < i < N,$$

$$\mathbf{U}_M = \mathbf{A}_{M+1}^{(1)}\mathbf{U}_{M+1} + \mathbf{B}_{M+1}^{(1)}, \quad \mathbf{U}_N = \mathbf{A}_N^{(2)}\mathbf{U}_{N-1} + \mathbf{B}_N^{(2)}. \quad (23.22)$$

Правое краевое условие в (23.22) соответствует формуле (17.6), выделяющей устойчивое многообразие решений схемы (23.17), удовлетворяющих предельному условию на $+\infty$. Коэффициенты в краевых условиях схемы (23.22) из соответствующих задач могут быть вычислены приближенно. На основании принципа максимума можно показать, что

решение схемы (23.22) устойчиво к возмущению этих коэффициентов. Точнее это можно сформулировать следующим образом.

Пусть $\tilde{\mathbf{U}}$ – решение схемы (23.22) в случае возмущенных

$$\tilde{\mathbf{A}}_{M+1}^{(1)}, \tilde{\mathbf{B}}_{M+1}^{(1)}, \tilde{\mathbf{A}}_N^{(2)}, \tilde{\mathbf{B}}_N^{(2)}.$$

Пусть

$$\|\tilde{\mathbf{A}}_{M+1}^{(1)} - \mathbf{A}_{M+1}^{(1)}\|, \|\tilde{\mathbf{B}}_{M+1}^{(1)} - \mathbf{B}_{M+1}^{(1)}\|, \|\tilde{\mathbf{A}}_N^{(2)} - \mathbf{A}_N^{(2)}\|, \|\tilde{\mathbf{B}}_N^{(2)} - \mathbf{B}_N^{(2)}\| \leq \Delta,$$

$$\|\tilde{\mathbf{A}}_{M+1}^{(1)}\|, \|\tilde{\mathbf{A}}_N^{(2)}\| \leq \sigma < 1.$$

Тогда при всех $i = M, M+1, \dots, N$

$$\max_i \|\tilde{\mathbf{U}}_i - \mathbf{U}_i\| \leq \frac{\Delta}{1-\sigma} (1 + \max_i \|\mathbf{U}_i\|).$$

Решая задачи на коэффициенты, входящие в краевые условия, достаточно точным образом, согласно последней оценке настолько же точно найдем решение исходной разностной схемы (23.17)-(23.18), спроецированное на конечное число узлов. Допустим, что матрицы \mathbf{D}_i в (23.17) малы по норме, что имеет место при наличии малого параметра при старших производных в исходном дифференциальном уравнении. Пусть $\|\mathbf{D}_i\| \leq \varepsilon$. Тогда от (23.17)-(23.18) можно перейти к разностной схеме с конечным числом узлов:

$$\mathbf{L}_i \mathbf{V} = \mathbf{C}_i \mathbf{V}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{V}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad M < i < N,$$

$$\mathbf{C}_{M+1} \mathbf{V}_M - \mathbf{G}_{M+1} \mathbf{V}_{M+1} = \mathbf{F}_{M+1}, \quad \mathbf{C}_N \mathbf{V}_{N-1} - \mathbf{G}_N \mathbf{V}_N = \mathbf{F}_N, \quad (23.23)$$

Лемма 23.2. Справедлива оценка:

$$\max_i \|\mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\sigma} \{ \|\mathbf{G}_{M+1}^{-1}\| \times \|\mathbf{U}_{M+2}\| + \|\mathbf{G}_N^{-1}\| \times \|\mathbf{U}_{N+1}\| \}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{Z}_i = \mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i$. Тогда \mathbf{Z} является решением краевой задачи:

$$\mathbf{L}_i \mathbf{Z} = 0, \quad N < i < M, \quad \mathbf{Z}_{M+1} = \mathbf{G}_{M+1}^{-1} \mathbf{C}_{M+1} \mathbf{Z}_M - \mathbf{G}_{M+1}^{-1} \mathbf{D}_{M+1} \mathbf{U}_{M+2},$$

$$\mathbf{Z}_N = \mathbf{G}_N^{-1} \mathbf{C}_N \mathbf{Z}_{N-1} - \mathbf{G}_N^{-1} \mathbf{D}_N \mathbf{U}_{N+1}.$$

Определим Ψ_i с компонентами:

$$\Psi_i^j = \sigma \max_i \|\mathbf{Z}_i\| + \|\mathbf{G}_{M+1}^{-1}\| \times \|\mathbf{U}_{M+2}\| \varepsilon + \|\mathbf{G}_N^{-1}\| \times \|\mathbf{U}_{N+1}\| \varepsilon \pm \mathbf{Z}_i^j.$$

Тогда

$$\mathbf{L}_i \Psi \leq 0, \quad N < i < M \quad \Psi_N \geq 0, \quad \Psi_M \geq 0.$$

В силу принципа максимума при всех i $\Psi_i \geq 0$. Это доказывает лемму.

§24. Описание метода расчета переноса примеси

Пусть в атмосфере может находиться M веществ A_1, A_2, \dots, A_M с концентрациями $C_1(x, y, z, t), \dots, C_M(x, y, z, t)$. Эти вещества входят в состав атмосферного воздуха, могут выбрасываться из источников или быть продуктами фотохимических реакций. Система уравнений, моделирующая процесс распространения примесей, имеет вид:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + U \frac{\partial C_i}{\partial x} + V \frac{\partial C_i}{\partial y} + W_i \frac{\partial C_i}{\partial z} =$$

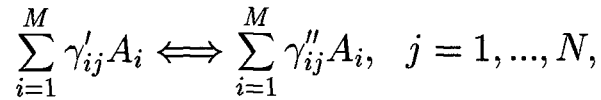
$$= \tilde{\Delta} C_i + F_i(x, y, z, t) + B_i(C_1, C_2, \dots, C_M), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (24.1)$$

где

$$\tilde{\Delta} C_i = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_1 \frac{\partial C_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_2 \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_3 \frac{\partial C_i}{\partial z} \right),$$

F_i - функция, соответствующая выделению вещества A_i из серии точечных источников ;

B_i - источник или сток A_i из-за химических реакций. Схема химических реакций задается стехиометрическими соотношениями:



где N - количество учитываемых реакций,

$\gamma'_{ij}, \gamma''_{ij}$ - стехиометрические коэффициенты прямой и обратной j - ой реакции. При этом источниковый член B_i имеет вид :

$$B_i = M_i \sum_{j=1}^N (\gamma''_{ij} - \gamma'_{ij}) w_j,$$

где M_i - молекулярная масса i -го компонента смеси, w_j - скорость j - ой реакции :

$$w_j = K_j^F(T) \prod_{i=1}^M C_i^{\gamma'_{ij}} - K_j^R(T) \prod_{i=1}^M C_i^{\gamma''_{ij}},$$

где

$K_j^F(T), K_j^R(T)$ - константы скоростей прямой и обратной реакций, вычисляемые согласно закону Аррениуса [91]:

$$K_j(T) = K_j^0 \exp(-E_j/(RT)) T^{n_j},$$

где

K_j - константа скорости реакции,

E_j - энергия активации реакции.

Температура $T(x, y, z, t)$ предполагается известной (хотя может учитываться тепловой эффект реакций).

Краевые условия в общем случае имеют вид:

$$C_i \rightarrow C_i^\phi, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty,$$

$$K_z \frac{\partial C_i}{\partial z} - \beta_i C_i = f_i(x, y), \quad z = s(x, y), \quad C_i = C_i^\phi, \quad z = H. \quad (24.2)$$

Рельеф может быть неоднородным, при этом делается преобразование координат, переводящее область в прямоугольную:

$$\sigma = \frac{z - s(x, y)}{H - s(x, y)}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Перед построением разностной схемы для задачи (24.1)-(24.2) осуществлялся переход к достаточно большой области по координатам x, y , содержащей источники загрязнений, $G_{xy} = \{|x| \leq X, |y| \leq Y\}$. При формировании краевых условий на искусственной границе при решении задачи методом расщепления задавалось либо "мягкое" краевое условие, соответствующее условию отсутствия потока через границу, либо вырожденное уравнение по координате, соответствующей данной границе. В главе 2 в случае обыкновенного уравнения было показано, что использование на границе условия совпадения концентрации примеси с фоновой менее предпочтительно.

Решение уравнения (24.1) с соответствующими начальными и граничными условиями осуществляется на основе схемы расщепления. При этом концентрации C_i рассчитываются независимо друг от друга, учитывается диффузия и перенос веществ по различным координатным направлениям.

На последнем интервале расщепления (t_n, t_{n+1}) длины τ учитываются химические реакции в каждом узле пространственной сетки:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = B_i(C_1, C_2, \dots, C_M), \quad (24.3)$$

$C_i|_{t=t_n}$ задано, $i = 1, 2, \dots, M$.

Моделирование реакций. В произвольном узле пространственной сетки система (24.3) может рассматриваться как система обыкновен-

ных дифференциальных уравнений. В силу различных скоростей стадий, которые могут отличаться на порядки друг от друга, эта система является жесткой. Для ее решения используется метод Розенброка с автоматическим контролем погрешности на шаге, в соответствии с [135].

Обойти трудности в моделировании одновременно протекающих быстрых и медленных реакций можно с помощью метода квазистационарных концентраций. При этом выделяются короткоживущие промежуточные вещества, предполагается, что их концентрация находится в состоянии равновесия.

Предположим, что обратные реакции не учитываются. Пусть A_{i_0} - коротко живущее вещество. Тогда согласно методу квазистационарных концентраций его концентрация C_{i_0} находится из соотношения:

$$\sum_{j=1}^{N_{i_0}} K_{n_j}^F \prod_{i=1}^M C_i^{\gamma'_{in_j}} = C_{i_0} \sum_{j=1}^{M_{i_0}} K_{m_j}^F \prod_{i \neq i_0} C_i^{\gamma'_{im_j}},$$

где

N_{i_0} - количество реакций, в которых образуется вещество A_{i_0} , M_{i_0} - количество реакций, в которых тратится вещество A_{i_0} .

Рассматривались различные механизмы стадий реакций, протекающих в атмосфере. Механизм из 51 стадий химических реакций приведен в табл. 24.1.

Таблица 24.1. Механизм трансформации примесей

Номер п/п, источник	Реакция -» - обычная +h -»-фотохимическая	Константа скорости реакции, с-1, с-1 см ³ или с-1 см ⁶
1	2	3
1 [139]	$O+O_3 \rightarrow O_2$	2.7E-10
2 [139]	$H+HNO_3 \rightarrow OH+HNO_2$	2.0e-15
3 [129]	$OH+OH \rightarrow O+H_2O$	5.0e-12
4 [129]	$HO_2+HO_2 \rightarrow H_2O_2+O_2$	$3.0e-11 \exp(-500/T)$
5 [139]	$H_2O_2 +h \rightarrow OH+OH$	1.4e-05
6 [139]	$O_3+h \rightarrow O+O_2$	4.8e-04
7 [129]	$H_2O+O \rightarrow OH+OH$	$2.2e-10 \exp(-9250/T)$
8 [139]	$H +HO_2 \rightarrow H_2O+O$	1.6e-11
9 [139]	$O+H_2CO \rightarrow OH+HCO$	1.6e-13
10 [139]	$O+H_2O_2 \rightarrow HO_2+OH$	5.0E-10
11 [139]	$H+NO_2 \rightarrow OH+NO$	4.6E-11
12 [139]	$H+H_2O_2 \rightarrow H_2O+OH$	4.6E-14
13 [139]	$O+O_2+M \rightarrow O_3+M$	1.7e-14 для M=O ₂ ,N ₂

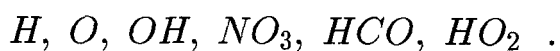
Таблица 24.1. (Продолжение)

1	2	3
14	[129] O+OH → H+O ₂	2.2e-11exp(-117/T)
15	[129] O ₃ +OH → HO ₂ +O ₂	1.5e-12exp(-940/T)
16	[129] O+HO ₂ → OH+O ₂	3.0e-11exp(200/T)
17	[139] OH+CO → H+CO ₂	3.0e-13
18	[129] O ₃ +HO ₂ → OH+2O ₂	1.4e-14exp(-580/T)
19	[129] O ₃ +H → OH+O ₂	1.4e-10exp(-470/T)
20	[129] NO ₂ +h → NO+O	7.0e-03
20	[129]	5.3e-03
21	[139] NO ₂ +O → NO+O ₂	9.3e-12
21	[129]	5.0e-12
22	[139] NO ₂ +OH+M → HNO ₃ +M	3.2e-12
23	[139] NO+OH+M → HNO ₂ +M	3.2e-12
24	[129] HNO ₃ +OH → H ₂ O+NO ₃	9.4e-15exp(778/T)
25	[129] NO+HO ₂ → NO ₂ +OH	2.0e-13
25	[129]	3.7e-12exp(240/T)
26	[139] HNO ₂ +h → OH+NO	2.0e-03
27	[139] HNO ₃ +h → OH+NO ₂	4.9e-06
28	[129] NO+O ₃ → NO ₂ +O ₂	2.2e-12exp(-1430/T)
28	[139]	4.0e-14
29	[129] NO ₃ +NO → NO ₂ +NO ₂	2.0e-11
29	[139]	9.0e-12
30	[139] NO ₃ +h → NO ₂ +O	5.8e-02
31	[129] H+H ₂ O ₂ → H ₂ +HO ₂	4.6E-14
32	[129] NO ₂ +O ₃ → NO ₃ +O ₂	1.2e-13exp(-2450/T)

Таблица 24.1. (Продолжение)

1	2	3
32	[139]	3.4e-17
33	[139] $H_2CO \rightarrow H+HCO$	2.2e-05
34	[139] $H_2CO \rightarrow H_2+CO$	5.8e-05
35	[139] $H+HO_2 \rightarrow OH+OH$	3.4E-11
36	[129] $HCO+O_2 \rightarrow HO_2+CO$	3.5e-12exp(140/T)
37	[139] $OH+HO_2 \rightarrow H_2O+O_2$	2.0E-10
38	[139] $HO_2+NO_2 \rightarrow HNO_2+O_2$	3.0E-11
39	[139] $HCO+OH \rightarrow H_2O+CO$	6.7e-14
40	[139] $H_2CO+OH \rightarrow HCO+H_2O$	1.0e-11
40	[129]	1.5e-11
41	[139] $CH_4+O \rightarrow CH_3+OH$	9.0e-18
42	[139] $CH_4+O \rightarrow H_2CO+H_2$	1.4e-11
43	[129] $CH_4+OH \rightarrow CH_3+H_2O$	2.4e-12exp(-1710/T)
44	[129] $CH_3+O_2 \rightarrow CH_2O+OH$	3.0e-16
45	[149] $SO_2+HO_2 \rightarrow OH+SO_3$	9.0e-16
46	[149] $SO_2+O_3 \rightarrow SO_3+O_2$	8.0e-24
47	[149] $SO_2+NO_2 \rightarrow SO_3+NO$	8.8e-30
48	[149] $SO_2+O \rightarrow SO_3$	5.7e-14
49	[149] $SO_2+OH \rightarrow HSO_3$	1.1e-12
50	[149] $SO_2+HO_2 \rightarrow HSO_4$	8.7e-16
51	[149] $SO_2+NO_3 \rightarrow SO_3+N_2O$	7.0e-21

К коротко живущим веществам, к которым можно применить метод квазистационарных концентраций, согласно [139], можно отнести



Задание источников загрязнений. Источники загрязнений подразделяем на площадные и точечные [18].

Точечный источник имеет следующие характеристики:

координаты источника; мощность выброса; скорость выброса ; температура выбрасываемого вещества; объемная скорость выброса ; радиус трубы; время начала выброса; время окончания выброса; код выбрасываемого вещества.

Для выбрасываемой из источника примеси определялась эффективная высота подъема примеси над источником по одной из эмпирических формул [18]:

$$\Delta H = 3R \frac{w_0}{u_0} + 400 \frac{Fr}{u_0^3},$$

где Fr число Фруда,

$$Fr = \frac{g}{T_0} w_0 R^2 \Delta T,$$

R - радиус трубы, w_0 - скорость выбрасываемой примеси, u_0 скорость ветра в устье трубы, $\Delta T = T - T_0$, T_0 - абсолютная температура окружающей среды, T - абсолютная температура выбрасываемой примеси,

При штиле задавалось

$$\Delta H = 5.1 F^{1/4} S^{-1/8}, \quad F = \frac{\Delta T}{T_0} g w_0 r^3,$$

где S - параметр устойчивости атмосферы.

Точечный источник задается дельта-функцией Дирака. Концентрация примеси около источника рассчитывается по приближенной аналитической формуле [9] которая применима на малых расстояниях от источника. Это позволяет рассчитать, какой стала концентрация примеси в узлах сетки около источника при учете выделения примеси. В дальнейшем примесь распространяется за счет конвекции и диффузии.

Приближенная формула имеет вид:

$$C_i(x, y, z) = \frac{Q_i}{2K_3(H)\sqrt{\pi\xi}} \left[\exp\left(\frac{-(\eta - \eta(H))}{4\xi}\right) + \exp\left(\frac{-(\eta + \eta(H))}{4\xi}\right) \right] \times \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi k_0 x_1}} \exp\left(\frac{-y_1^2}{4k_0 x_1}\right),$$

где

$$\xi = x_1 / (uK_3)_{z=H}, \quad \eta = \int_{z_0}^z \frac{dz}{K_3(z)}, \quad u = \sqrt{U^2 + V^2}, \\ x_1 = (x - x_{mp}) \cos(\alpha) + (y - y_{mp}) \sin(\alpha), \\ y_1 = (x - x_{mp}) \sin(\alpha) + (y - y_{mp}) \cos(\alpha),$$

Q_i – мощность выброса вещества A_i из источника (г/сек), α – угол между направлением ветра и осью x в устье трубы с учетом эффективного подъема примеси из источника, H – высота трубы с учетом эффективного подъема примеси, k_0 – коэффициент, связанный с диффузией примеси.

Площадный источник реализуется через краевое условие на поверхности. Его интенсивность задается функцией $f_i(x, y)$.

Задание скоростей. Скорости $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$ в узлах расчетной сетки могут задаваться либо интерполяцией метеорологических данных, когда измерения скорости ветра производятся на определенных высотах в некоторых постах наблюдения, либо на основе работы программы расчета состояния атмосферы. В этом случае данные измерений нужны для задания краевых условий и начальных данных для модели расчета состояния атмосферы. Можно одновременно рассчитывать состояние атмосферы и перенос примесей от источников, тогда к уравнениям, описывающим состояние атмосферы добавляется система уравнений переноса примесей. Далее такая система решается численно

с использованием схемы расщепления по аналогии с [139]. Коэффициент W_i задается в соответствии со скоростью оседания данной примеси.

Задание коэффициентов диффузии. Турбулентные коэффициенты диффузии задавались с использованием эмпирических формул [18]. При этом K_1 , K_2 задавались постоянными, коэффициент $K_3(z)$ рассчитывался по формуле [18]:

$$K_3(z) = \begin{cases} \varepsilon_3 + \mu_1 \frac{z}{z_1} \sqrt{1 - \bar{R}i}, & \text{если } z \leq h, \\ \varepsilon_3 + \mu_1 \frac{h}{z_1} \sqrt{1 - \bar{R}i}, & \text{если } z \geq h. \end{cases},$$

где $\bar{R}i$ – осредненное по высоте значение числа Ричардсона:

$$Ri = g \frac{\partial T}{\partial z} / \left(T \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2,$$

ε_3 – коэффициент молекулярной диффузии для воздуха.

Задание рельефа. Для города Омска в виде двумерного массива создана карта рельефа местности. Если выбрана некоторая расчетная область и расчетная сетка по переменным x, y , то массив $s(x_i, y_j)$ создается на основе использования процедуры интерполяции.

Выбор расчетной сетки. Сетка строится равномерной по координатам x, y , например, для области порядка 50×50 км². По высоте область порядка одного километра, сгущение сетки по вертикальной координате, в силу наличия пограничного слоя, осуществлялось около поверхности.

Оформление результатов расчета. Результаты расчетов могут выдаваться в виде двумерных массивов концентраций на различных высотах (или с помощью изолиний) в различные моменты времени, концентрации примеси могут накладываться на карту города или области.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты исследований.

1. Предложен способ построения разностных схем для нелинейных сингулярно возмущенных уравнений второго порядка с заданными краевыми условиями для конечного интервала. Способ основан на приближении коэффициентов дифференциального уравнения и получении точных разностных соотношений для возмущенной задачи. Построены схемы первого порядка точности для системы уравнений при различных ограничениях на якобиан, для уравнения с сильной нелинейностью, для уравнения со степенным погранслоем. Для уравнения типа реакция-диффузия построена схема второго порядка точности. В случае степенного погранслоя показано, как предлагаемый подход может быть обобщен на случай эллиптических уравнений.

2. Построены и обоснованы разностные схемы для нелинейных эллиптических уравнений в неограниченной области (полосе и полуполосе) в случаях экспоненциального и степенного параболических пограничных слоев. Для краевой задачи предложен способ перехода к ограниченной (прямоугольной) области с оценкой погрешности между решениями исходной и редуцированной задач. Для редуцированной задачи построена аппроксимация смешанного краевого условия, сохраняющая точность монотонной схемы Самарского.

3. Исследован численный метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной на полубесконечном интервале сведением к краевой задаче для конечного интервала или к начальной задаче

для уравнения первого порядка. Рассмотрены линейные уравнения, нелинейное автономное уравнение, автономная система нелинейных уравнений. При переносе краевых условий из бесконечности используется известный подход, основанный на выделении устойчивых многообразий. Вспомогательные задачи Коши решаются на основе асимптотических разложений по малому параметру. Проведен анализ влияния погрешностей, обусловленных переносом краевого условия, на решение редуцированных к конечному интервалу задач и на решение применяемых разностных схем; разностные схемы исследованы на равномерную сходимость по параметру. Предложен метод решения краевых задач для уравнений с точечным источником на бесконечном интервале.

4. Предложен способ редукции скалярных и векторных разностных схем с бесконечным числом узлов к конструктивным схемам на сетках с конечным числом узлов. Векторные схемы соответствуют разностной аппроксимации двумерных задач в неограниченной области. В случае вырождающихся разностных схем предложен асимптотический подход для нахождения решения вспомогательных сеточных задач.

5. Решена прикладная задача по численному моделированию переноса примеси от источников загрязнений. Результаты исследования нашли применение при создании пакета программ, в соответствии с договором переданного для использования в Омский областной комитет природы.

Основной итог работы заключается в разработке разностных методов решения краевых задач для линейных и нелинейных уравнений второго порядка с малым параметром при старших производных в неограниченной области.

Список литературы

- [1] Абрамов А.А. О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1, N 4, с. 733-737.
- [2] Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки). // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1, N 3, с. 542- 545.
- [3] Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б. Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1981.
- [4] Алексеевский М.В. О разностной схеме для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. В сб.: Разностные методы математической физики. М.: МГУ, 1979, с. 36-60.
- [5] Алексеевский М.В. Разностные схемы высокого порядка точности для сингулярно- возмущенной краевой задачи. // Дифференциальные уравнения, 1981, т. 17, N 7, с. 1171- 1183.
- [6] Алоян А.Е., Йорданов Д.Л., Пененко В.В. Численная модель переноса примесей в пограничном слое атмосферы. // Метеорология и гидрология , 1981, N 8, с.32- 43.

- [7] Андреев В.Б., Коптева Н.В. Об исследовании разностных схем с аппроксимацией первой производной центральным разностным отношением. // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1996. Т.36, N 8.- С.101-117.
- [8] Андреев В.Б., Савин И.А. О равномерной по малому параметру сходимости монотонной схемы А.А.Самарского и ее модификации // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1995. Т.35, N 5, с.737-752.
- [9] Арраго Л.Р., Швед М.Е. К вопросу распространения тяжелой однородной примеси из высотного источника. // Труды ГГО, 1963, N 15, с. 41-56.
- [10] Багаев Б.М., Шайдуров В.В. Вариационно- разностный метод решения уравнения с малым параметром. // Сб. Методы вычислительной и прикладной математики, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977.
- [11] Багаев Б.М. Выделение особенностей для задач с пограничным слоем. // Сб. Моделирование в механике, Т. 3, N 2, Новосибирск, 1989.
- [12] Багаев Б.М. Квазилинейное уравнение с малым параметром при старшей производной. // Препринт ВЦ СО АН СССР, N 1, Красноярск, 1982.
- [13] Багаев Б.М., Солусенко Н.П. Численное решение для задач со степенным пограничным слоем. // Сб. Моделирование в механике, Т. 3, N 1, Новосибирск, 1989.

- [14] Багаев Б.М., Шайдуров В.В. Сеточные методы решения задач с пограничным слоем. Ч.1. Новосибирск.: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1998, 198с.
- [15] Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. N 4. С. 841-890.
- [16] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М: Наука, 1987.
- [17] Бахвалов Н.С. Об автоматическом конструировании сетки интегрирования при решении краевых задач с пограничным слоем. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. N 8. С. 1290-1295.
- [18] Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1975.
- [19] Биргер Е.С., Ляликова Н.Б. О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности // 1. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т.5, N 6, с. 979-990. 2. 1966. Т.6, N 3, с. 446-453.
- [20] Биргер Е.С. Об оценке погрешности замены условия ограниченности решения линейного дифференциального уравнения на бесконечном интервале. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т.8, N 3, с. 674-678.
- [21] Блатов И.А., Стрыгин В.В. Сходимость метода Галеркина для нелинейной двухточечной сингулярно- возмущенной краевой за-

- дачи в пространстве $C[a, b]$. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т.25, N 7, с. 1001-1008.
- [22] Блатов И.А., Стрыгин В.В. Сходимость метода сплайн коллокаций для сингулярно возмущенных краевых задач на локально равномерных сетках. // Дифференциальные уравнения, 1990. Т.26, N 7. с. 1191-1197.
- [23] Блатов И.А., Стрыгин В.В. О неулучшаемых по порядку оценках в методе конечных элементов Галеркина для сингулярно возмущенных краевых задач. // Докл.РАН. 1993. Т.328, N 4. с. 424-426.
- [24] 2. Боглаев И.П. Численное решение одной краевой задачи с малым параметром при старшей производной на неравномерной сетке // Числен. методы механ. сплошной среды. // Новосибирск, 1984, Т.15, N 5, с.48-58.
- [25] Боглаев И.П. О численном интегрировании сингулярно возмущенной задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25, N 7, с. 1009-1027.
- [26] Боглаев И.П. Численный метод решения квазилинейного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных. // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., т. 28, N 4, 1988, с. 492-502.
- [27] Боглаев Ю.П. Итерационный метод приближенного решения сингулярно возмущенных задач. // ДАН СССР, 1976, N 5, с. 1033-1036.

- [28] Боглаев Ю.П. О численных методах решения сингулярно возмущенных задач. // Дифференциальные уравнения, т. 21, N 10, 1985, с.1804-1806.
- [29] Бушуев В.В., Задорин А.И., Паничкин В.В. Прогнозирование источников загрязнения и распространения загрязнений в воздушном бассейне города. // Препринт N 15, ИИТПМ СО РАН, Омск, 1994 .
- [30] Бушуев В.В., Задорин А.И. , Паничкин А.В. Моделирование переноса загрязняющих веществ от ряда источников и алгоритмы поиска этих источников. // Тезисы докл. 2 Всероссийской конференции по математическим проблемам экологии, Новосибирск, 1994 , с. 132- 133 .
- [31] Бызова Н.Л. Рассеяние примеси в пограничном слое атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
- [32] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
- [33] Ван- Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
- [34] Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, 1978.
- [35] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [36] Васильева А.Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с ма-

лым параметром при старшей производной. // Успехи матем. наук, 1963, Т. 18, N 3, с. 15-86.

- [37] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.// Успехи матем. наук, 197, т. 12, N5, с. 3-123.
- [38] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений.// ДАН СССР, 1958. Т.121, N5, с. 778-781.
- [39] Владимиров В.С. Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.//Прикл. матем. и механ., 1955, Т. 19, вып. 3, с. 315- 324.
- [40] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М., Наука, 1984.
- [41] Волков Е.А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике.// Тр. Матем. ин-та АН СССР, М., 77, 1965, с.89-112.
- [42] Волосов В.М. Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром при старшей производной. // Мат.сб., 1952, Т. 30, N 2, с. 24-270.
- [43] Вельтищева Н.С. Моделирование загрязнения городской атмосферы от серии непрерывных приподнятых источников. // Метеорология и гидрология, 1975, N 3.

- [44] Гаевой В.П. Об одном методе построения разностных уравнений для двухточечных краевых задач. // Вычислительные системы, Новосибирск, 1978, N 75, с.96-110.
- [45] Годунов С.К.,Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем . М.: издательство физ. мат. литературы, 1962.
- [46] Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // УМН, т. 16, N 3, 1961, с. 171- 174.
- [47] Гуцин В.А., Щенников В.В. Об одной монотонной разностной схеме второго порядка точности. // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., т. 14, N 3, 1974, с. 789-792.
- [48] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости.- М.: Наука, 1957.
- [49] Дулан.Э.,Миллер Д.,Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1988.
- [50] Емельянов К.В. Усеченная разностная схема для линейной сингулярно возмущенной задачи.// Докл. АН СССР, 1982, т. 2672 N 5, с. 1052-1055.
- [51] Емельянов К.В. Разностная схема для сингулярно возмущенной краевой задачи с сильной нелинейностью. //ДАН АН СССР, 1986, т. 286, N 2, с. 269-272.
- [52] Емельянов К.В. Применение одномерных оптимальных сеток к решению двумерных задач с сингулярным возмущением. // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., т. 38, N 3, 1998, 425-432.

- [53] Задорин А.И.,Игнатъев В.Н. Регуляризация разностных схем с помощью первого дифференциального приближения при численном решении уравнений с малым параметром при старшей производной. // Сб. "Численные методы и задачи оптимизации" ,Томск, ТГУ, с. 3-14, 1983.
- [54] Задорин А.И. О выделении пограничного слоя и сочетании начальных и краевых задач при решении сингулярно возмущенных уравнений .// Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1983, т.14, N 1, с. 42- 50.
- [55] Задорин А.И.,Игнатъев В.Н. О численном решении уравнения с малым параметром при старшей производной. // Журнал вычислительной матем. и матем. физики , 1983, т.23, N 3, с. 620-628.
- [56] Задорин А.И. О двухпараметрическом итерационном процессе решения плохо обусловленной разностной задачи. // Деп. ВИНТИ 1018-83, 1983, 2 стр.
- [57] Задорин А.И. О существовании и единственности решения некоторых разностных задач для квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром.// Численные методы механики сплошной среды . Новосибирск,1984, т.15, N 1, с. 33-44.
- [58] Задорин А.И.О численном решении третьей краевой задачи для уравнения с малым параметром .// Журнал вычислит. матем. и матем. физики, 1984, т. 24, N 7, с. 1008- 1015.

- [59] Задорин А.И.,Игнатъев В.Н. О сходимости разностной схемы на неравномерной сетке при наличии пограничного слоя. // Вариационно-разностные методы в математической физике (материалы всесоюз. конф.), ОВМ АН СССР, Москва,1984, ч.2 , с. 110- 119.
- [60] Задорин А.И.Численное решение квазилинейного сингулярно возмущенного уравнения // Сб. "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1986, т.17, N 6, с. 35- 44.
- [61] Задорин А.И. Разностная схема для сингулярно- возмущенного уравнения второго порядка. // Тезисы конф. " Актуальные проблемы вычисл. и прикл. математики", 1 стр.,Новосибирск, 1987.
- [62] Задорин А.И. Разностная схема на неравномерной сетке для сингулярно- возмущенного уравнения второго порядка с большим решением. // Тезисы всесоюзного семинара "Теорет. основы и констр. численных алгоритмов решения задач мат. физики," , 1 стр., Кемерово,1988 .
- [63] Задорин А.И.Разностная схема для самосопряженной сингулярно возмущенной третьей краевой задачи. // Сб. "Моделирование в механике", Новосибирск, 1989. Т. 3, N 1, с. 77- 82.
- [64] Задорин А.И.Численное решение квазилинейного уравнения с малым параметром. // Сб." Моделирование в механике", Новосибирск, 1989. Т. 3, N 2, с.89- 94.
- [65] Задорин А.И. Разностная схема для обыкновенного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка. // Препринт N 899 ВЦ СО АН СССР ,1990.

- [66] Задорин А.И.,Игнатъев В.Н.Разностная схема для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка.// Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1990, т.29, 9, с.1425-1430.
- [67] Задорин А.И., Мухаметов М.Х., Паничкин А.В., Степачев С.Е. Комплексные вопросы моделирования камеры сгорания. (Итоговый отчет/ВЦ СО АН СССР ; N Г.р. 0186. 0125731; инв. N.0290.00430048), Омск,1990.
- [68] Задорин А.И.,Игнатъев В.Н.Численное решение квазилинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1991,т. 31, N 1, с.157-160.
- [69] Задорин А.И.Численное решение обыкновенного уравнения второго порядка со слабо выраженным пограничным слоем. // Сб. "Моделирование в механике", Новосибирск,1991, т.5, 1,с.141-152.
- [70] Задорин А.И.Численное решение краевой задачи для системы сингулярно возмущенных уравнений. // Препринт N 4 ИИТПМ СО АН СССР ,1991.
- [71] Задорин А.И. Численное решение нелинейного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных. // Тезисы докл. Всесоюзной конференции " Асимпт. методы теории синг. возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач ", с. 45, Бишкек, 1991.
- [72] Задорин А.И. Численное решение системы обыкновенных нелинейных сингулярно- возмущенных уравнений. // Тезисы докл. 3 Всесоюзной школы " Числ. методы механики сплошной среды ", 1 стр., Красноярск, 1991 .

- [73] Задорин А.И. Численное решение нелинейного уравнения с параболическим погранслоем. // Сб. "Исследования по статистической радиотехнике, дифференциальным уравнениям и алгебре", ИИТПМ СО РАН, 1992, с.92-100.
- [74] Задорин А.И. Численное решение эллиптического уравнения с параболическим погранслоем. // Сб. "Моделирование в механике", Новосибирск, 1993, т. 7, 1, с.52-59.
- [75] Задорин А.И. Численное решение краевой задачи для нелинейного сингулярно возмущенного обыкновенного уравнения сведением к начальным задачам. // Препринт N 18 ИИТПМ СО РАН, Омск, 1994.
- [76] Задорин А.И. Численное решение нелинейного обыкновенного уравнения с пограничным слоем, соответствующим зоне реакции. // Сб. "Фундаментальная и прикладная математика", ОмГУ, Омск, 1994, с. 107-111.
- [77] Задорин А.И. Численное решение краевой задачи для системы уравнений с малым параметром. // Тезисы докл. межд. конф. "Математические модели и числ. методы МСС", 1 стр., Новосибирск, 1996.
- [78] Задорин А.И. Монотонная схема Самарского для нелинейного уравнения второго порядка с малым параметром в случае третьей краевой задачи. // Тезисы докл. межд. конф. "Математические модели и методы их исследования" с. 89-90, Красноярск, 1997.

- [79] Задорин А.И. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. // Методические указания, Омск. Омск. университет, 1997, 45 с.
- [80] Задорин А.И. Монотонная схема Самарского для обыкновенного уравнения второго порядка с малым параметром в случае третьей краевой задачи. // Вычислительные технологии, 1997, Т. 2, N 5, с. 35-45.
- [81] Задорин А.И. Перенос краевого условия из бесконечности в случае линейного уравнения второго порядка с малым параметром. // Сб. "Математические структуры и моделирование", выпуск 1, Омск, ОмГУ, 1998, с. 13-19.
- [82] Задорин А.И. Разностная схема для нелинейного двумерного эллиптического уравнения с малыми параметрами при старших производных. // Тезисы докл. третьего Сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике, часть 2, с. 14., Новосибирск, 1998.
- [83] Задорин А.И. Численное решение уравнения с малым параметром и точечным источником на бесконечном интервале. // Сибирский журнал вычислительной математики, 1998, Т. 1, N 3, с. 249-260.
- [84] Задорин А.И. Численное решение краевой задачи для системы уравнений с малым параметром. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1998, т. 38, N 8, с. 1255-1265.
- [85] Задорин А.И. Численное решение уравнения с малым параметром на бесконечном интервале. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1998, т. 38, N 10, 1671-1682.

- [86] Задорин А.И. Численное решение уравнений с малым параметром на бесконечном интервале. // Методические указания, Омск. Омск. университет, 1998, 51 с.
- [87] Задорин А.И. Перенос краевого условия из бесконечности при численном решении уравнений второго порядка с малым параметром. // Сибирский журнал вычислительной математики, 1999, Т. 2, N 1, с. 21-35.
- [88] Задорин А.И. Численное решение эллиптического уравнения с пограничными слоями в полубесконечной полосе. // Вычислительные технологии, 1999, Т. 4, N 1, с. 33-47.
- [89] Задорин А.И. Трехточечная разностная схема на полубесконечном интервале. // Вычислительные технологии, 2000, Т. 5, N 2, 8 с.
- [90] Захаров Ю.Н. Об одном методе решения уравнения с краевыми условиями на бесконечности. // Сб. "Вычислительные технологии", т. 2, N 7, 1993, с.55-68, ИВТ СО РАН.
- [91] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б. и др. Математическая теория горения и взрыва. – М.: Наука, 1980.
- [92] Игнатъев В.Н., Задорин А.И. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром на неравномерной сетке. // Препринт ВЦ СО АН СССР, 1980, N 229 .
- [93] Игнатъев В.Н., Задорин А.И., Щеглаков И.С. Об одном подходе к решению уравнений с малым параметром. // Сб. "Вычисления

с разреженными матрицами”, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1981, с. 62-72.

- [94] Игнатъев В.Н., Задорин А.И. О плохой обусловленности при численном решении уравнений с малым параметром. // Препринт ВЦ СО АН СССР, 1981, N 84 .
- [95] Игнатъев В.Н., Задорин А.И. Численное моделирование двумерного пламени. // Препринт N 446 ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1983.
- [96] Игнатъев В.Н., Задорин А.И. Экспоненциально подогнанная конечно разностная схема на неравномерной сетке. // Тезисы докладов 4 Международной конференции по пограничным и внутренним слоям: вычислительные и асимптотические методы, 2 стр., Новосибирск, 1986.
- [97] Игнатъев В.Н., Задорин А.И. Конечно- разностный метод расчета двумерного ламинарного пламени. // Физика горения и взрыва, 1986 , 4 , с. 39- 42.
- [98] Игнатъев В.Н., Задорин А.И. Численное решение сингулярно возмущенной третьей краевой задачи. // Известия вузов, математика, 1986 , 7 , с. 20- 26.
- [99] Игнатъев В. Н., Задорин А. И. О некоторых методах численного решения нелинейной сингулярно- возмущенной краевой задачи. // Препринт N 677 ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1986.
- [100] Игнатъев В.Н., Задорин А.И., Алексеева Т.Я. Модуль химической кинетики ППП ” РАФИПКС ” для моделирования физико - хими-

ческих процессов в камерах сгорания // Отчет ВЦ СО АН СССР, номер регистрации 0186. 0125731 Инв. 0287. 00430 49, 1987 .

- [101] Игнатъев В.Н.,Задорин А.И. Разработка конечно - разностных алгоритмов экспоненциальной подгонки для решения сингулярно - возмущенных уравнений // Отчет ВЦ СО АН СССР ,номер регистр. 0186.0125731 ,инв. 0287.0070969, Омск, 1987.
- [102] Игнатъев В.Н.,Алексеева Т.Я.,Задорин А.И. Моделирование двумерного ламинарного горения углеводородных топлив с учетом образования вредных примесей. // Препринт N 840 ВЦ СО АН СССР, 1989.
- [103] Игнатъев В.Н., Алексеева Т.Я. . Задорин А.И. Численное моделирование двумерного ламинарного пламени.// Тезисы докл. Всесоюзной конф. ” Матем. методы в химической кинетике и теории горения ” , Кызыл, 1991, с. 24.
- [104] Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985.
- [105] Ильин А.М.Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. // Матем. заметки. 1969. Т.6, N 7, с. 237-248.
- [106] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач, М.: Наука, 1989, 385 стр.
- [107] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

- [108] Карепова Е.Д., Шайдуров В.В. Алгебраическая подгонка в методе конечных элементов для задачи реакции-диффузии с малым параметром. / ВЦ СО РАН, Красноярск, 1996.- 22 с.- Деп. в ВИНИТИ 07.10.96, №.2951-В96.
- [109] Клоков Ю.А. Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики.-Рига, РИИГВФ, 1968.
- [110] Константинов А.А., Маслов В.П., Чеботарев А.М. Снос краевых условий для уравнений с частными производными.// Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1988, т. 28, N 12, с. 1763-1778.
- [111] Конюхова Н.Б. Об устойчивых многообразиях Ляпунова для автономных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1994, т. 34, N 10, с. 1358-1379.
- [112] Конюхова Н.Б. О стационарной задаче Ляпунова для системы квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка.// Дифференциальные уравнения, 1994, т. 30, N 8, с. 1384-1395.
- [113] Конюхова Н.Б. Гладкие многообразия Ляпунова и сингулярные краевые задачи. // Сообщ. по вычисл. матем.- М.: ВЦ АН СССР, 1996.
- [114] Конюхова Н.Б. О численном выделении стремящихся к нулю на бесконечности решений для некоторых двумерных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.// Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1970, т. 10, N 1, 74-87.

- [115] Конюхова Н.Б., Пак Т.В. Сингулярные задачи Коши с большим параметром для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1987, т. 27, N 4, 501-519.
- [116] Конюхова Н.Б., Пак Т.В. К переносу допустимых граничных условий из бесконечности для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1987, т. 27, N 6, 847-866.
- [117] Коптева Н.В. О равномерной по малому параметру сходимости одной разностной схемы для эллиптической задачи в полосе. // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, 1997, N 2, с. 6-9.
- [118] Коул Д. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
- [119] Кузнецов С.В. Расчет стационарного фронта химической реакции. // Вычислительные проблемы в задачах математической физики. Труды ИМ СО АН СССР, 1988, т. 11, с. 93- 100.
- [120] Курочкин С.В. Численное нахождение краевого условия вблизи особенности // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1997. Т. 37. N 5. С. 543-552.
- [121] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
- [122] Ланкастер П. Теория матриц.- М.: Наука, 1978.
- [123] Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н. О равномерно сходящемся алгоритме численного решения обыкновенного дифференциального урав-

нения второго порядка с малым параметром при старшей производной.// Сб. "Численные методы механики сплошных сред", Новосибирск, 1981, т. 12, N 2, с. 45-56.

- [124] Лисейкин В.Д., Петренко В.Е. Адаптивно- инвариантный метод численного решения задач с пограничными и внутренними слоями. Новосибирск, 1989
- [125] Лисейкин В.Д. О численном решении уравнений со степенным погранслоем.// Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1986, т. 26, N 12, 1813-1820.
- [126] Лисейкин В.Д. Метод алгебраической адаптации.// Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1998, т. 38, N 10, 1692-1709.
- [127] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
- [128] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения.- М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950.
- [129] Мак-Ивен М., Филипс Л. Химия атмосферы. М.: Мир, 1978.
- [130] Маркус М., Минк К. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М. Наука, 1972.
- [131] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1987.
- [132] Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. М: Наука, 1979.

- [133] Маслов В.П., Чеботарев А.М. Снос граничных условий и теоремы единственности для нелинейных краевых задач. // Докл. АН СССР, 1986, т. 289, N 1, с. 47-51.
- [134] Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
- [135] Новиков Е.А. Явные методы для жестких задач. Новосибирск: Наука, 1997.
- [136] Олейник О.А. О краевых задачах для уравнений с малым параметром при старших производных. // Докл. АН СССР, 192, т. 85, N 3.
- [137] Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
- [138] Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1986.
- [139] Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985.
- [140] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М: Изд-во Московского университета, 1984.
- [141] Русанов В.В. Об устойчивости метода матричной прогонки. // Вычислительная математика, 1960, N 6.
- [142] Рябенский В.С. Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред. М: Наука, 1987.
- [143] Русанов В.В. Об устойчивости метода матричной прогонки. // Вычислительная математика, 1960, N 6.

- [144] Савин И.А. О равномерной по малому параметру точности модифицированной схемы Самарского для сингулярно возмущенного уравнения. // Дифференциальные уравнения, 1997, т.33, N 7, с. 963-966.
- [145] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
- [146] Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
- [147] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [148] Сечин А,Ю. Численный метод высокого порядка точности для сингулярно возмущенной краевой задачи. // Изв. вузов. Математика. 1983, N 7, с. 75-80.
- [149] Скубневская Г.И., Бажин Н.М. Фотохимические реакции в атмосфере с участием двуокиси серы. // Метеорология и гидрология, 1982, N 9, с. 113-122.
- [150] Стрыгин В.В., Кузнецова Е.В. Метод сплайн-коллокации четвертого порядка для сингулярно возмущенных задач на оптимальных сетках. // Докл. РАН, 1997, Т. 353, N 2, с. 167-169.
- [151] Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985, 232с.
- [152] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
- [153] Тихонов А.Н. Системы уравнений, содержащие малые параметры при производных. // Матем. сб., 1952, т. 31, N 3, с. 575- 586.

- [154] Федорюк М.В. Уравнение Гельмгольца в волноводе (отгонка краевого условия от бесконечности) // Журн.вычисл.математики и мат.физики, 1972, т. 12, N 2, с. 374-387.
- [155] Чанг К.,Хауэс Ф. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. М.: Мир,1988.
- [156] Шайдуров В.В. Экстраполяция решений задач, содержащих экспоненциальный пограничный слой.// Препринт N 53 ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1978.
- [157] Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989, 288 стр.
- [158] Шапцев В.А., Паничкин А.В.,Задорин А.И., Осинцев Е.В. Разработка и адаптация моделей переноса загрязняющих веществ и поиска источников загрязнений с расчетом экологической обстановки в промышленном регионе. // Отчет по НИР ИИТПМ СО РАН, N гос.регистрации 01980004501, инв. N 2-98-02980004868. Деп.в ВИНТИ.-76с., 1998.
- [159] Шишкин Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург, УрО РАН, 1992.
- [160] Шишкин Г.И.. Сингулярно возмущенные краевые задачи с сосредоточенными источниками и разрывными начальными условиями. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1997, т. 37, N 4. с. 429-446.

- [161] Шишкин Г.И.. Проблема аппроксимации диффузионного потока при численном моделировании процесса переноса примеси. // Математическое моделирование, 1995, т. 7, N 7, с. 61-80.
- [162] Шишкин Г.И. Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенного квазилинейного эллиптического уравнения, вырождающегося в уравнение первого порядка. // Докл. АН СССР, 1991, т. 317, N 4, с. 845-849.
- [163] Шишкин Г.И. Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных квазилинейных эллиптических уравнений, вырождающихся в уравнение нулевого порядка. // Журн.вычисл.математики и мат.физики, 1993, т. 33, N 9, с.1305-1323.
- [164] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960.
- [165] Allen D., Southwell R. Relaxation methods applied to determine motion, in two dimensions, of a viscous fluid past a fixed cylinder.// J. Mech. Appl. Math., 1955, 8, p.129-145.
- [166] Abrahamson L., Osher S. Monotone difference schemes for singular perturbation problems. //SIAM J. Numer. Analysis, 1982, V. 19, N 5, p. 979-992.
- [167] Balla K. Characterization of solutions in the discretization of a parabolic equation on the infinite strip. // MTA SZTAKI. LORDS. WP 96-7. Budapest. 1996.

- [168] Balla K. Asymptotic behavior of certain Riccati difference equations// Computer Math.Applic. 1998. V. 36. N 10-12. P. 243-250.
- [169] Bellman R., Vasudevan R. Wave propagation. An invariant imbedding approach. // Dordrecht. Holland. D. Reidel publ. Co.,1986.
- [170] Berger A., Solomon J., Ciment M. An analysis of a uniformly accurate difference method for a singular perturbation problem. // Math. Comp., 1981, 37,p.79-94.
- [171] Chang K.W. Approximate solutions of nonlinear boundary value problems involving a small parameter.//SIAM J. Appl. Math.,1974, V.26, N 3, p. 554-567.
- [172] Dorr F.W. The numerical solution of singular perturbations of boundary value problems.// SIAM J. Numer. Analysis, 1970, V. 7, N 2,p. 281-313.
- [173] Dorr F.W.,Parter S.V.,Shampine L.F. Applications of the maximum principle to singular perturbation problems.// SIAM Review, 1973. V. 1, N 1, p. 43-87.
- [174] P.A.Farrell, P.W. Hemker, G.I. Shishkin. Discrete Approximations for Singularly Perturbed Boundary Problems with Parabolic Layers,1 // J. of Computational Mathematics. 1996. Vol. 14, N 1, p. 71-97.
- [175] P.A.Farrell, P.W. Hemker, G.I. Shishkin. Discrete Approximations for Singularly Perturbed Boundary Problems with Parabolic Layers, 2 // J. of Computational Mathematics. 1996. Vol. 14, N 2, p. 183-194.

- [176] Fromm J.E. A method for reducing dispersion in convective difference scheme. // J. Comput.Phys., 1968, N 3.
- [177] Gartland E.C. Uniform high-order difference schemes for a singularly perturbed two-point boundary value problem.// Math. Comp., 1988, 51, p. 631-657.
- [178] Hegarty A.F., Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. Numerical solution of elliptic convection-diffusion problems on fitted meshes.// CWI Quarterly, 1997. V.10, N 3, p.239-251.
- [179] Herceg D. On numerical solution of singularly perturbed boundary value problem.// Review of Research faculty of science mathematics series, Novi Sad,1993,V.23,N 1,p.371-381.
- [180] Ignatyev V.N. ,Zadorin A.I. A finite difference method on nonuniform mesh for a singular perturbation problem.// Enlarged abstracts Equediff 6, Brno,1985, p. 51-52 .
- [181] Kellogg R.B.,Tsan A.Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points.// Math.Comput.1978.V.32,N 144, p. 1025-1039.
- [182] Kellogg R.B. Stynes M., Optimal approximability of solutions of singularly perturbed two-point boundary value problems // SIAM J. Numer. Anal., 1977, 34 , p.1808-1816.
- [183] Kellogg R.B., Shubin G.R., Stephens A.B. Uniqueness and the cell Reynolds number. //SIAM J. Numer. Anal.,1980. V. 17, N 6, p. 733-739.

- [184] Kolmogorov V.L., Shishkin G.I. Numerical methods for singularly perturbed boundary value problems modeling diffusion processes. // Singular Perturbation Problems in Chemical Physics, J.J.H.Miller ed, in Series Advances in Chemical Physics Series, V. XCVII, eds. I.Prigogine and Stuart A.Rice, John Wiley Sons, 1997, p. 181-362.
- [185] Lorenz J. Combinations of initial and boundary value methods for a class of singular perturbation problems. // Numer. Anal. Singul. Perturb. Probl. London, 1979, p. 295-315.
- [186] Lorenz J. Stability and monotonicity properties of stiff quasilinear boundary problems.// Review of research faculty of science-university of Novi Sad//1982. V. 12, p. 151-175.
- [187] Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems, Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions. World Scientific, Singapore, 1996.
- [188] Nijima K. A uniformly convergent difference scheme for a semilinear singular perturbation problem. // Numer. Math. , 1984, 43, p. 175-198.
- [189] Nikolova M., Axelsson O. Uniform in ε convergence of finite element method for convection-diffusion equations using a priori chosen meshes.//CWI Quarterly, 1997.V 10, N 3, p.23-276.
- [190] Osher S. Nonlinear singular perturbation problems and one sided difference schemes.// SIAM J. Numer. Analys., 1981, V. 18. N 1, p. 129-144.

- [191] O’Riordan E., Stynes M. An analysis of some exponentially fitted finite element methods for singularly perturbed elliptic problems// Chapter 7 of Computational Methods for Boundary and Interior Layers in Several Dimensions (J.J.H.Miller, ed.), Boole Press, Dublin, 1991,p. 138-153.
- [192] Roos H. Ten ways to generate the Il’in and related schemes.// Journal of comp. and appl. math., 1994, 53, p. 43-59.
- [193] Roos H., M.Stynes M. Tobiska L. Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations – Convection-Diffusion and Flow Problems, Springer Series in Computational Mathematics Volume 24, ISBN 3-540-60718-8, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [194] Roos H., Stynes M., Necessary conditions for uniform convergence of finite difference schemes for convection-diffusion problems with exponential and parabolic layers.// Appl. Math. 41 ,1996, p. 269-280.
- [195] Stynes M., O’Riordan E. A finite element method for a singularly perturbed boundary value problem. // Numer. Math.,1986, 50, p. 1-15.
- [196] Su Yu-cheng The boundary layer scheme for a singularly perturbed problem for the second order elliptic equation in the rectangle. // Applied Mathematics and Mechanics, 1987. V.8, N 3, p. 203-210.
- [197] Surla K.,Stojanovic M. Solving singularly perturbed boundary value problems by splines in tension.// J. Comput. Appl.Math.,1988, 24, p.35-363.

- [198] Vulanovic R. A uniform numerical method for quasilinear singular perturbation problems without turning points// Computing. 1989. N 41, p. 97-106.
- [199] Vulanovic R.,Herceg D.,Petrovic N. On the extrapolation for a singularly perturbed boundary value problem.// Computing ,1986, V.36, N 1-2,p.69-79.
- [200] Vulanovic, R. Non-equidistant finite-difference methods for elliptic singular perturbation problems, Computational Methods for Boundary and Interior Layers in Several Dimensions (J.J.H. Miller, ed.), Boole Press, Dublin, 1991, p. 203-223.
- [201] Zadorin A.I. Numerical solution of the nonlinear differential equation with a small parameter on the infinite interval//abstracts of Workshop on the analytical and computational methods for convection - - dominated and singular perturbed problems, p. 32-33. Lozenetz, Bulgaria, 1998.