© 2007 г. А. В. Еремеев, канд. физ.-мат. наук
(Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН),
М. Я. Ковалев, д-р физ.-мат. наук
(Белорусский государственный университет)
П. М. Кузнецов
(Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПОСТАВКАМИ СО МНОГИМИ ИНТЕРВАЛАМИ И ВОГНУТЫМИ ФУНКЦИЯМИ СТОИМОСТИ[1]

В автоматизированных системах управления (АСУ) товарными потоками и в ряде других систем поддержки принятия решений актуальна задача управления поставками продукции. В работе рассматривается задача отыскания минимального по стоимости плана поставок однородной продукции одному потребителю. Для каждого поставщика задано множество допустимых интервалов объема поставки и вогнутые функции стоимости поставок в пределах каждого интервала. Предлагается вполне полиномиальный ε-приближенный алгоритм для данной задачи и псевдополиномиальный точный алгоритм для ее частного случая.

1. Введение

При создании автоматизированных систем управления (АСУ) товарными потоками и ряда других систем поддержки принятия решений большое значение имеет разработка эффективных алгоритмов решения задач оптимизации. Одной из таких задач является задача управления поставками, в которой требуется найти план поставки необходимого количества продукции от нескольких поставщиков нескольким потребителям так, чтобы суммарная стоимость доставки была минимальной и выполнялись ограничения на допустимые объемы поставок от каждого поставщика, заданные одним или несколькими допустимыми интервалами.

Данная задача NP-трудна даже в случае одного потребителя и одного допустимого интервала у каждого поставщика. Кроме того, отыскание допустимого решения в случае двух или более потребителей также является NP-трудной задачей [1]. Таким образом, в связи со сложностью рассматриваемой задачи, представляет интерес разработка приближенных алгоритмов ее решения в случае одного потребителя. В [1] предложены вполне полиномиальный ε-приближенный алгоритм и псевдополиномиальный точный алгоритм для случая одиночных допустимых интервалов объемов поставки и линейных функций стоимости. Данный алгоритм был обобщен в [2] для произвольного заданного числа допустимых интервалов при линейных неубывающих функциях стоимости. Для случая одиночных интервалов в [3, 4] построены вполне полиномиальные ε-приближенные алгоритмы в существенно более общих предположениях относительно функций стоимости.

В настоящей работе рассматривается задача с произвольным заданным числом интервалов объема поставки и предлагается вполне полиномиальный

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта INTAS 03-51-5501.

ε-приближенный алгоритм для случая, когда функции стоимости поставок являются вогнутыми и неубывающими в пределах каждого из интервалов. Для одного частного случая задачи построен псевдополиномиальный точный алгоритм.

2. Формальная постановка задачи

Математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i) \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant A, \tag{2}$$

$$x_i \in \{0\} \cup \bigcup_{t=1}^{I^{(i)}} [m_i^t, M_i^t], \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Переменными являются величины x_i, определяющие количество продукции, доставляемой потребителю от i-го поставщика. Здесь $A > 0$ – необходимое потребителю количество продукции; $I^{(i)}$ – число допустимых интервалов для объема поставки i-го поставщика; $0 < m_i^t \leqslant M_i^t$ – соответственно нижняя и верхняя границы t-го допустимого интервала i-го поставщика, $t = 1, \ldots, I^{(i)}$ (предполагается, что $M_i^t < m_i^{t+1}$, $t = 1, \ldots, I^{(i)} - 1$); функции $c_i(\cdot)$ являются вогнутыми и неубывающими на каждом допустимом интервале и определяют стоимости доставки: $c_i(0) = 0$, $c_i(x_i) > 0$, если $x_i \in [m_i^t, M_i^t]$, $t = 1, \ldots, I^{(i)}$. Все исходные данные и значения функций стоимости принадлежат множеству неотрицательных вещественных чисел. Будем полагать, что нахождение значения функции $c_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, n$, а также арифметические операции и сравнение чисел между собой требуют константного времени.

В работе используется стандартная терминология [5]. Под *ε-приближенным алгоритмом* для задачи минимизации понимается алгоритм получения допустимого решения, стоимость которого не более, чем в $1 + \varepsilon$ раз превышает стоимость оптимального решения (если задача разрешима). Соответствующее решение называем ε-приближенным. Далее, ε-приближенный алгоритм называется *вполне полиномиальным*, если его временная сложность ограничена некоторым полиномом от длины входа задачи и от $1/\varepsilon$ при любом заданном $\varepsilon > 0$. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Для задачи (1)–(3) существует вполне полиномиальный ε-приближенный алгоритм трудоемкости $O((\log_2 \log_2(U/L) + 1/\varepsilon) I_{\max} n^3)$, где L и U – соответственно нижняя и верхняя априорные оценки оптимального значения целевой функции задачи (1)–(3) и $I_{\max} = \max_{i=1,\ldots,n} I^{(i)}$.*

В частности, если $A > 0$ и задача (1)–(3) имеет ненулевое решение, то можно выбрать $U = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(M_i^{I^{(i)}} \right)$ и $L = \min_{i=1,\ldots,n} c_i (m_i^1)$. Доказательство теоремы проводится по схеме рассуждений, предложенной в [4]. При построении вполне полиномиального ε-приближенного алгоритма используется процедура улучшения оценок [6] и учитывается множество допустимых интервалов объема поставки от каждого потребителя, подобно алгоритму в [2].

3. Вполне полиномиальный ε-приближенный алгоритм

Следующий вспомогательный результат является обобщением леммы 1 в работе [1] на случай нескольких допустимых интервалов объема поставки.

Л е м м а 1. *Разрешимая задача (1)–(3) имеет по крайней мере один оптимум x^*, где x_i^* для всех $i = 1, \ldots, n$, за исключением, быть может, одного номера i, принимают значения из множества $\{0\} \cup \bigcup_{t=1}^{I^{(i)}} \{m_i^t, M_i^t\}$.*

По лемме 1, решение задачи (1)–(3) можно свести к решению n задач, обозначаемых через P_j, $\;j = 1, \ldots, n$, таких, что в P_j ограничения (3) заменены на

$$x_i \in \{0\} \cup \bigcup_{t=1}^{I^{(i)}} \{m_i^t, M_i^t\}, i = 1, \ldots, n,\, i \neq j, \quad x_j \in \{0\} \cup \bigcup_{t=1}^{I^{(j)}} [m_j^t, M_j^t]. \tag{4}$$

При заданном j рассмотрим задачу с более «жесткими» условиями, чем (1)–(3):

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n,\, i \neq j} c_i(x_i) \to \min, \tag{5}$$

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n,\, i \neq j} x_i \geqslant A, \tag{6}$$

$$x_i \in \{0\} \cup \bigcup_{t=1}^{I^{(i)}} \{m_i^t, M_i^t\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,\, i \neq j. \tag{7}$$

Данная задача представляет собой частный случай обобщеной задачи о рюкзаке [7]. Пусть $\mathbf{Z}$ обозначает множество целых чисел. Тогда при

$$c_i(x_i) \in \mathbf{Z}, \quad i = 1, \ldots, n,\, i \neq j, \tag{8}$$

задача (5)–(7) может быть решена следующим простым алгоритмом динамического программирования (ДП). Рассмотрим $j = n$ в задаче (5)–(8) и обозначим через $\varphi_k(c)$ максимальное количество продукции, которое могут обеспечить первые k поставщиков при стоимости поставок c, а через $\overline{U}$ – априорную верхнюю оценку на стоимость $\overline{Z}$ оптимального решения задачи (5)–(8). В этом случае уравнение Беллмана для (5)–(8) при любых $k = 1, \ldots, n-1$ и $c = 0, \ldots, \overline{U}$ имеет вид:

$$\varphi_k(c) = \max \left\{ V + \varphi_{k-1}(c - c_k(V)) \mid V \in \{0\} \cup \bigcup_{t=1}^{I^{(k)}} \{m_k^t, M_k^t\},\ c_k(V) \leqslant c \right\}$$

с начальным условием: $\varphi_0(c) = 0$ при $c = 0$; $\varphi_0(c) = -\infty$ при $c \neq 0$. Аналогичным образом могут быть рассмотрены случаи $j \neq n$.

Как показано в [7, 8], замена исходных стоимостей на их масштабированные и округленные значения позволяет управлять трудоемкостью и точностью алгоритма ДП для задачи о рюкзаке и ряда ее обобщений. Заменим все стоимости $c_i(x)$ на

$$\gamma_i(x) = \left\lfloor \frac{c_i(x)}{\delta} \right\rfloor,\ i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

где δ – масштабирующий множитель, который будет выбран далее. В таком случае задача (10),(6),(7) с целевой функцией

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\, i\neq j} \gamma_i(x_i) \to \min, \tag{10}$$

имеет только целочисленные стоимости доставки и к ней применим описанный выше алгоритм ДП. Для записи соответствующего уравнения Беллмана обозначим через $g_k(j,\gamma)$ максимальное количество продукции, которое могут обеспечить k поставщиков при отсутствии j-го и при заданной сумме γ масштабированных и округленных согласно (9) стоимостей поставок. Для определенности пусть $g_j(j,\gamma)=0$. Тогда:

$$g_k(j,\gamma) = \begin{cases} \max\{V + g_{k-1}(j,\gamma-\gamma_k(V)) \mid V \in \{0\} \cup \bigcup_{t=1}^{I^{(k)}} \{m_k^t, M_k^t\},\ \gamma_k(V)\leqslant\gamma\} \\ \text{при } k \notin \{j+1, j\}; \\ \max\{V + g_{k-2}(j,\gamma-\gamma_k(V)) \mid V \in \{0\} \cup \bigcup_{t=1}^{I^{(k)}} \{m_k^t, M_k^t\},\ \gamma_k(V)\leqslant\gamma\} \\ \text{при } k = j+1 \end{cases} \tag{11}$$

для всех $\gamma = 0,\dots,\lfloor \overline{U}/\delta \rfloor,\ k\neq j$. Начальное условие аналогично указанному выше для функционала $\varphi(\cdot)$.

Пусть x^*, Z^*, L и U – оптимальное решение, оптимальное значение целевой функции и ее нижняя и верхняя оценки соответственно для задачи (1)–(3).

Включая в рассмотрение поставщика j, от задачи (10),(6),(7) мы приходим к следующей задаче, обозначаемой через RP_j. Целевая функция задачи RP_j имеет вид

$$z^{(j)}(x) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n, k\neq j} \gamma_k(x_k) + \frac{c_j(x_j)}{\delta} \to \min, \tag{12}$$

а допустимая область задается ограничениями (2) и (4). Имеет место

Лемма 2. Оптимальное решение $x^{(jR)}$ задачи RP_j является ε-приближенным решением задачи P_j при $\delta = \varepsilon L/(n-1)$. Кроме того, $Z(x^{(jR)}) \leqslant Z^{(j)} + (n-1)\delta$, где $Z^{(j)}$ – оптимум задачи P_j.

Далее везде будем полагать, что $\delta = \varepsilon L/(n-1)$.

Задача RP_j может быть решена путем нахождения значений функционала $g_n(j,\gamma)$ для всех $\gamma = 0,\dots,\lfloor U/\delta \rfloor$ с последующим отысканием

$$Z^{(jR)} = \min\left\{\gamma + \frac{c_j(x_j)}{\delta} \mid g_n(j,\gamma) + x_j \geqslant A, x_j \in \{0\} \cup \bigcup_{t=1}^{I^{(j)}} [m_j^t, M_j^t], \gamma = 0,\dots, \left\lfloor \frac{U}{\delta} \right\rfloor \right\}.$$

Принимая во внимание леммы 1 и 2, достаточно найти оптимальное решение $x^{(jR)}$ для каждой задачи RP_j и выбрать из них наименьшее по стоимости. Полученное решение будет ε-приближенным решением исходной задачи (1)–(3). На этом основан приближенный алгоритм, описываемый ниже. В записи алгоритма величина $V(j,\gamma)$ указывает минимальный объем, который необходимо доставить от поставщика j при решении задачи RP_j, когда уже определен объем $g_n(j,\gamma)$, удовлетворяющий условию (2). Обозначим через $x^{(\gamma)}$ решение уравнения (11).

Алгоритм 1.

0. Положить $rec = +\infty$.
1. **Для** j **от** 1 **до** n выполнять шаги 2–3:
2. Вычислить с помощью алгоритма ДП, согласно (11), все значения $V(j,\gamma) = A - g_n(j,\gamma)$ и векторы $x^{(\gamma)}$, $\gamma = 0,\ldots,\left\lfloor \frac{U}{\delta} \right\rfloor$.
3. **Для** γ **от** 0 **до** $\left\lfloor \frac{U}{\delta} \right\rfloor$ выполнять шаги 3.1–3.2:
   3.1. **Если** $V(j,\gamma) \leqslant 0$ **и** $\gamma \leqslant rec$, **то** обновить рекорд $rec := \gamma$ и положить $\tilde{x}_k := x_k^{(\gamma)}$ для всех $k \neq j$; $\tilde{x}_j := 0$.
   3.2. **Для** t **от** 1 **до** $I^{(j)}$ выполнять шаги 3.2.1–3.2.2:
      3.2.1. **Если** $m_j^t \leqslant V(j,\gamma) \leqslant M_j^t$ **и** $\gamma + \frac{c_j(V(j,\gamma))}{\delta} \leqslant rec$
      то обновить рекорд $rec := \gamma + \frac{c_j(V(j,\gamma))}{\delta}$
      и положить $\tilde{x}_k := x_k{}^{(\gamma)}$ для всех $k \neq j$; $\quad \tilde{x}_j := V(j,\gamma)$.
      3.2.2. **Если** $0 < V(j,\gamma) < m_j^t$ **и** $\gamma + \frac{c_j(m_j^t)}{\delta} \leqslant rec$
      то обновить рекорд $rec := \gamma + \frac{c_j(m_j^t)}{\delta}$
      и положить $\tilde{x}_k := x_k{}^{(\gamma)}$ для всех $k \neq j$; $\tilde{x}_j := m_j^t$.
4. Если $rec < +\infty$, то $\tilde{x}$ является приближенным решением требуемой точности, иначе задача неразрешима.

Утверждение 1. Пусть вместе с исходными данными задачи указаны нижняя оценка L и верхняя оценка U для стоимости оптимального решения Z^* $(0 < L \leqslant Z^* \leqslant U)$. Тогда для задачи (1)–(3) алгоритм 1 является ε-приближенным и имеет трудоемкость $O(I_{\max} n^3 U/\varepsilon L)$. Стоимость решения, получаемого данным алгоритмом, не превосходит величины $Z^* + (n-1)\delta$.

Следствие 1. Если $c_i(m_i^t), c_i(M_i^t) \in \mathbf{Z}$ для всех $i = 1,\ldots,n,\ t = 1,\ldots,I^{(i)}$, то при $\varepsilon = (n-1)/L$ псевдополиномиальный алгоритм 1 решает задачу (1)–(3) точно.

Следствие вытекает из того, что в указанных условиях задачи P_j и RP_j совпадают.

Неполнота утверждения 1 заключается в том, что требуется указывать конкретные значения L и U. В работе [6] предложена процедура улучшения оценок, представляющая собой модификацию двоичного поиска, которая позволяет с помощью приближенного алгоритма находить достаточно близкие к оптимуму априорные оценки LB и UB. Для применения этой процедуры требуется, чтобы приближенный алгоритм удовлетворял следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ и произвольных входных данных алгоритм находит решение со стоимостью

$$Z_{app} \leqslant U + \varepsilon L. \tag{13}$$

Приведенное в приложении доказательство теоремы 1 сводится к проверке условия (13) для алгоритма 1 и подсчету общей трудоемкости.

4. Заключение

Заметим, что из результатов [4], при наличии эффективно вычислимых обратных функций к стоимостям $c_i(\cdot)$, $\ i = 1,\ldots,n$, также следует существование вполне полиномиальной аппроксимационной схемы для рассмотренной задачи. Для обоснования этого достаточно ввести достаточно большие штрафы за выход из допустимых интервалов. При таком подходе величины n и $1/\varepsilon$ входят в оценку трудоемкости со степенью 2.

Использованный в работе подход позволил отказаться от требования целочисленности исходных данных и кусочно-линейных функций стоимости за счет дополнительного округления исходных данных, в отличие от [2].

Также стоит отметить, что указанная постановка может быть интерпретирована как задача со многими этапами поставки. В этом случае каждый интервал поставки может быть понят не только как ограничение на возможный объем поставки, но и возможно как ограничение на продолжительность поставки. При такой интерпретации временной параметр участвует в модели неявным образом, что позволяет избежать сложностей, связанных с его явным включением в модель.

В дальнейшем, представляет интерес развитие данной задачи на случай многих потребителей, а также на случай возможного промежуточного хранения поставляемой продукции на складе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1.

Пусть $X^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ является оптимальным решением задачи (1)–(3). Предположим, что существует пара индексов $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ таких, что $m_i^{k_1} < x_i^1 < M_i^{k_1}$ и $m_j^{k_2} < x_j^1 < M_j^{k_2}$ для некоторых k_1 и k_2. В случае, если $c_i(x_i^1 + \delta_1) - c_i(x_i^1) \leqslant c_j(x_j^1) - c_j(x_j^1 - \delta_1)$, где $\delta_1 = \min\{M_i^{k_1} - x_i^1, x_j^1 - m_j^{k_2}\}$, рассмотрим следующую замену: $x_i^2 = x_i^1 + \delta_1, x_j^2 = x_j^1 - \delta_1$. Очевидно, что при такой замене $\sum_i x_i^1 = \sum_i x_i^2$, кроме того все $x_j^2,\ \ j = 1, \ldots, n$, являются допустимыми и $Z(X^2) \leqslant Z(X^1)$. Аналогично, если $c_i(x_i^1) - c_i(x_i^1 - \delta_2) \geqslant c_j(x_j^1 + \delta_2) - c_j(x_j^1)$, где $\delta_2 = \min\{M_j^{k_2} - x_j^1, x_i^1 - m_i^{k_1}\}$, тогда рассматриваем замену $x_i^2 = x_i^1 - \delta_2, x_j^2 = x_j^1 + \delta_2$. Таким образом, X^2 также является оптимальным решением задачи (1)–(3) и имеет требуемый вид. Другие случаи невозможны при вогнутых на каждом из допустимых интервалов целевых функциях. Повторение подобных рассуждений конечное число раз дает требуемый результат.

Доказательство леммы 2.

Обозначим через $x^{(j)}$ оптимальное решение задачи P_j, $j = 1, \ldots, n$. Тогда имеем:

$$\frac{Z^{(j)}}{\delta} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k(x_k^{(j)})}{\delta} \geqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n,\, k \neq j} \left\lfloor \frac{c_k(x_k^{(j)})}{\delta} \right\rfloor + \frac{c_k(x_k^{(j)})}{\delta} = z^{(j)}(x^{(j)}).$$

Поскольку оптимальное решение задачи P_j является допустимым решением RP_j, то:

$$\frac{Z(x^{(jR)})}{\delta} \leqslant z^{(j)}(x^{(jR)}) + (n-1) \leqslant z^{(j)}(x^{(j)}) + (n-1) \leqslant \frac{Z^{(j)}}{\delta} + (n-1),$$

и

$$\frac{Z(x^{(jR)}) - Z^{(j)}}{Z^{(j)}} \leqslant \frac{Z^{(j)} + (n-1)\delta - Z^{(j)}}{Z^{(j)}} \leqslant \frac{(n-1)\delta}{L} = \varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство утверждения 1.

Обозначим через j^* индекс той задачи RP_j, оптимальное решение которой является наименьшим по стоимости среди всех оптимальных решений RP_j, $j = 1, \ldots, n$. Если таких задач несколько, то j^* – наибольший из этих индексов.

Следующая цепочка неравенств доказывает корректность верхней оценки $\lfloor U/\delta \rfloor$ на γ для j^* в силу лемм 1 и 2:

$$(\Pi.1)\qquad \sum_{1 \leqslant k \leqslant n,\, k \neq j^*} \left\lfloor \frac{c_k(x_k^{(j^*R)})}{\delta} \right\rfloor \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n,\, k \neq j^*} \left\lfloor \frac{c_k(x_k^{(j^*R)})}{\delta} \right\rfloor + \frac{c_{j^*}(x_{j^*}^{(j^*R)})}{\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n,\, k \neq j^*} \left\lfloor \frac{c_k(x_k^{(j^*)})}{\delta} \right\rfloor + \frac{c_{j^*}(x_{j^*}^{(j^*)})}{\delta} \leqslant \frac{U}{\delta}.$$

Таким образом, в силу целочисленности оцениваемой в (П.1) величины, в качестве верхней оценки можно взять $\lfloor U/\delta \rfloor$.

Пусть задача (1)–(3) разрешима. Тогда разрешима каждая задача P_j, а следовательно, разрешима и каждая задача RP_j, в частности, RP_{j^*}. Поскольку на шаге 2 алгоритма 1 находятся значения $g_n(j, \gamma), \gamma = 0, \ldots, \lfloor U/\delta \rfloor$, а на шаге 3 рассматриваются такие значения x_{j^*}, что выполняются ограничения задачи RP_{j^*}, то решение $\tilde{x}$, найденное алгоритмом 1, является допустимым.

Предположим, что существует допустимое решение x' задачи RP_{j^*} такое, что $z^{(j^*)}(x') < z^{(j^*)}(\tilde{x})$. Пусть $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n, k \neq j^*} \lfloor c_k(x'_k)/\delta \rfloor = \gamma'$. Значение $\gamma = \gamma'$, в частности, рассматривается в силу корректности верхней оценки на γ. На шаге 3 при заданном γ в каждом допустимом интервале, содержащем точки, удовлетворяющие (2), проверяется такая точка с наименьшим значением $c_{j^*}(x_{j^*})$. Поэтому возможен лишь случай, когда $z^{(j^*)}(x') = z^{(j^*)}(\tilde{x})$, что противоречит предположению. Поэтому решение $\tilde{x}$ является оптимальным решением RP_{j^*}, и по лемме 2 является ε-приближенным решением задачи (1)–(3) и выполнено неравенство $Z(x^{(jR)}) \leqslant Z^* + (n-1)\delta$.

Отметим, что если $V(j, \gamma) > M_j^{I(j)}$ для всех j и γ, то задача (1)–(3) неразрешима.

Алгоритм совершает n итераций решения задач RP_j, заполняя $n - 1$ множество состояний, каждое из которых содержит $\lfloor U/\delta \rfloor + 1$ элементов. На шаге 3 алгоритма выполняется $O(I_{\max} U/\delta)$ сравнений, таким образом, временная сложность алгоритма 1 составляет $O(I_{\max} n^3 U/\varepsilon L)$.

Доказательство теоремы 1.

С учетом утверждения 1, условие (13) вытекает из того, что

$$Z_{app} \leqslant Z^* + (n-1)\delta \leqslant U + \varepsilon L.$$

Как следует из утверждения 1 и описания процедуры улучшения оценок, трудоемкость этой процедуры составляет $O(I_{\max} n^3 \log_2 \log_2(U/L))$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ применение ε-приближенного алгоритма 1 с использованием LB и UB, найденных в процедуре улучшения оценок, дает вполне полиномиальный ε-приближенный алгоритм с общей трудоемкостью $O((\log_2 \log_2(U/L) + 1/\varepsilon) I_{\max} n^3)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Еремеев А.В., Романова А.А., Сервах В.В., Чаухан С.С.* Приближенное решение одной задачи управления поставками // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2006. Сер. 2. Т. 13. № 1. С. 27–39.

2. *Еремеев А.В., Кузнецов П.М.* Приближенное решение задачи управления поставками со многими интервалами // Вестник Омского универс. 2006. № 3. С. 26–28.

3. *Chauhan S.S., Eremeev A.V., Romanova A.A., Servakh V.V., Woeginger G.J.* Approximation of the supply scheduling problem // Oper. Res. Lett. 2005. V. 33. No 3. P. 249–254.

4. *Ng C.T., Kovalyov M.Y., Cheng T.C.E.* An FPTAS for a supply scheduling problem with non-monotone cost functions // Accepted in Naval Research Logistics. 2007.

5. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.

6. *Танаев В.С., Ковалев М.Я., Шафранский Я.М.* Теория расписаний. Групповые технологии. Минск: ИТК НАН Беларуси, 1998.

7. *Kovalyov M.Y.* A rounding technique to construct approximation algorithms for knapsack and partition type problems // Appl. Math. and Comp. Sci. 1996. No 6. P. 101–113.

8. *Ibarra O.H., Kim C.E.* Fast approximation algorithms for the knapsack and sum of subset problems // J. of the ACM. 1975. V. 22. No 4. P. 463–468.