УДК 519.85

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЭЛЕКТОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ В УСЛОВИЯХ РЫНКА [1]

А.В. Еремеев [a,b]

[a] *Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН,*
[b] *Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского*

e-mail:eremeev@ofim.oscsbras.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации потокораспределения в электроэнергетической системе, возникающая при расчете аукционов электроэнергии в условиях рынка «на сутки вперед» и балансирующего рынка. Установлено, что поиск допустимого потокораспределения в условиях балансирующего рынка является NP-трудной в сильном смысле задачей даже в случае одного генератора. Показана NP-трудность поиска оптимального потокораспределения в условиях рынка «на сутки вперед» даже при одном генераторе и при отсутствии контролируемых сечений.

Ключевые слова: вычислительная сложность, электроэнергетическая система, рынок.

Введение

Работа посвящена анализу сложности задачи оптимизации режима электроэнергетической системы (ЭЭС), возникающей при расчете аукциона оптового рынка электроэнергии в соответствии с моделью, предложенной в [7]. Детальное описание модели с небольшими вариациями приводится в [4, 5, 6, 8]. Данная модель описывает распределенный аукцион электроэнергии и электрическую сеть с учетом закона Ома для переменного тока, а потому включает в себя ограничения, выраженные тригонометрическими функциями. В качестве упрощающих аппроксимаций данной модели в литературе рассматриваются линейные модели постоянного тока (DC-load flow model) [11] и их модификации с кусочно-линейной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 15-11-10009).

аппроксимацией квадратичных потерь [10]. Для поиска оптимального решения в таких упрощенных моделях могут непосредственно применяться стандартные методы линейного программирования (ЛП). В то же время, для поиска оптимального решения в рамках исходной модели разработаны итерационные методы [4], основанные на декомпозиции задачи и позволяющие комбинировать стандартные программы для расчета режимов ЭЭС с коммерческими оптимизационными пакетами, решающими подзадачи ЛП в модели постоянного тока. Для поиска оптимального решения в рамках исходной модели также могут быть использованы методы, сочетающие наискорейший спуск с другими стандартными методами нелинейной оптимизации (см., например, [2], гл. 7). При некоторых дополнительных предположениях, требующих среди прочего неотрицательных узловых цен на электроэнергию, в [4] и [9] получены достаточные условия, гарантирующие глобальную оптимальность локальных оптимумов. Однако, как показано в [9], при возникновении отрицательных узловых цен данное свойство может нарушаться и в общем случае отыскание глобального оптимума рассматриваемой задачи является открытой проблемой. Как показано настоящей работе, поиск оптимального режима ЭЭС в общем случае является NP-трудной задачей, и это же относится к поиску приближенных решений с гарантированной относительной оценкой точности. Результаты получены за счет активного использования нижней границы на объем генерации, что также является необходимым условием для возникновения отрицательной узловой цены.

Следующий раздел содержит постановку задачи оптимизации режима ЭЭС и ее формулировку в терминах математического программирования. В разделе 2 приводятся доказательства трудноразрешаемости различных частных случаев задачи. Раздел 3 содержит заключительные замечания.

1 Постановка задачи оптимизации потокораспределения в электроэнергетической системе в условиях рынка

Приведем постановку задачи оптимизации потокораспределения в ЭЭС, возникающей при расчете аукциона на оптовом рынке электроэнергии [7]. В описании модели, как правило, будем пользоваться системой обозначений из модели конкурентного оптового рынка электроэнергии «на сутки вперед» [4, 6].

Входные данные задачи включают в себя информацию об электроэнергетической сети, о генераторах и потребителях электроэнергии, а также ценовые заявки на покупку и продажу электроэнергии в узлах сети, поданные участниками аукциона на некоторый период планирования (час), в течение которого режим функционирования системы не меняется.

Информация об электрической сети задана взвешенным ориентированным графом с множеством узлов N и множеством дуг A. Каждая дуга представляет собой ветвь электрической сети, т.е. линию электропередач (ЛЭП) или трансформатор. Множество узлов, непосредственно связанных линиями с узлом i, обозначим через $N(i)$. Для каждой ветви указаны следующие параметры: r_{ij} – активное сопротивление ветви; x_{ij} – реактивное сопротивление ветви; B_{ij} – шунтирующая емкостная проводимость ветви; t_{ij} – коэффициент трансформации (если ветвь (i, j) – трансформатор, в противном случае $t_{ij} = 1$); α_{ij} – фазосдвигающий коэффициент (если ветвь (i, j) – трансформатор, в противном случае $\alpha_{ij} = 0$). При наличии дуги (i, j) имеется и дуга (j, i), где $r_{ji} = r_{ij}$, $x_{ji} = x_{ij}$, B_{ji}=B_{ji}, $t_{ji} = 1/t_{ij}$ и $\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$. Обратная дуга (j, i) относится к той же ЛЭП или трансформатору, что и прямая дуга (i, j). Параметры r_{ij}, x_{ij} эквивалентно могут представляться парой параметров G_{ij}, Ω_{ij}, где G_{ij} – активная проводимость ветви, $G_{ij} = r_{ij}/(r_{ij}^2 + x_{ij}^2)$; Ω_{ij} – реактивная проводимость ветви, $\Omega_{ij} = x_{ij}/(r_{ij}^2 + x_{ij}^2)$ – см., например, [1]. В каждом узле $i \in N$ заданы минимальное и максимальное предельно допустимые напряжения $V_i^{\min}$ и $V_i^{\max}$, см. [6, 8, 7]. Кроме того, ЭЭС имеет некоторое (возможно пустое) множество $\mathcal{S}$ *контролируемых сечений*, где под сечением понимается набор дуг орграфа, по которым ограничивается суммарный поток активной мощности. Для каждого контролируемого сечения $S \in \mathcal{S}$ заданы его пропускные способности: $p_S^{\min}$ – нижний предел пропускной способности сечения S; $p_S^{\max}$ –

верхний предел пропускной способности сечения S. При подсчете суммарной загрузки сечения поток мощности, идущий по ветви в обратном направлении, учитывается с обратным знаком.

К узлам сети подключены генераторы и потребители: $\mathbf{G}(i)$ – множество генераторов, подключенных к узлу i, $i \in N$; $\mathbf{C}(i)$ – множество потребителей, подключенных к узлу i, $i \in N$. Для каждого потребителя c задана планируемая к потреблению реактивная мощность Q_c^{prg}, см. [6, 7]. Технические ограничения каждого генератора g представлены следующими параметрами: $P_g^{\min}$ – нижний предел регулирования; $P_g^{\max}$ – верхний предел регулирования; $Q_g^{\min}$ – нижний предел генерации реактивной мощности; $Q_g^{\max}$ – верхний предел генерации реактивной мощности.

На практике, при проведении аукционов электроэнергии рынка «на сутки вперед» и балансирующего рынка, задачи оптимизации потокораспределения в ЭЭС решаются на несколько последовательных часов одновременно и при этом учитываются также нижний и верхний пределы изменения нагрузки при переходе от часа к часу [5]. В настоящей работе для простоты обозначений рассматривается только один час работы ЭЭС, поэтому пределы изменения нагрузки не учитываются.

1.1 Рынок «на сутки вперед»

Предполагается, что рынок «на сутки вперед» организован в форме аукциона ценовых заявок продавцов и покупателей [4, 5]. Аукцион проводится ежедневно и одновременно для каждого часа следующих суток. На рынке «на сутки вперед» происходят торги только активной мощностью электроэнергии. Участник, желающий продать электроэнергию в некотором узле, обязан представить соответствующую ценовую заявку на продажу электроэнергии от генератора в этом узле. Заявка содержит информацию о ценах предложения электроэнергии, соответствующих определенным объемам производства электроэнергии в течение одного часа указанных торговых суток. Покупатель электроэнергии представляет заявки на покупку электроэнергии в каждый час операционных суток в заданном узе сети. Заявка покупателя содержит информацию о ценах спроса, соответствующих определенным объемам потребления электроэнергии.

Обозначим через $\mathbf{C}$ множество всех покупателей, а через $\mathbf{G}$ – множество всех продавцов электроэнергии. Пусть в заявке от каждого $g \in \mathbf{G}$ заданы суммарный объем активной мощности P_g^{bid} и K пар $(C_g^k, P_g^{\mathrm{bid}}(k))$, $k = 1, \ldots, K$, каждая из которых описывает k-ю ценовую компоненту и часть объема активной мощности заявки. При этом $C_g^1 \leq C_g^2 \leq \cdots \leq C_g^K$. Для каждого покупателя $c \in \mathbf{C}$ заданы суммарный объем активной мощности P_c^{bid} в его заявке и K пар $(C_c^k, P_c^{\mathrm{bid}}(k))$, $k = 1, \ldots, K$, каждая из которых описывает k-ю ценовую компоненту и часть объема активной мощности заявки. При этом $C_c^1 \geq C_c^2 \geq \cdots \geq C_c^K$.

Для записи модели аукциона оптового рынка электроэнергии введем следующие переменные. Обозначим через p_{ij} поток активной мощности, выходящий из узла i по линии (i, j), а через q_{ij} – поток *реактивной мощности,* выходящий из узла i по линии (i, j) (о физическом смысле реактивной мощности см., например, в [1]). Отрицательные значения p_{ij}, q_{ij} означают, что в действительности соответствующий поток мощности втекает в узел i из узла j. Далее, пусть V_i – амплитуда напряжения в узле i, а d_i – угол фазы напряжения в узле i. Обозначим через P_g активную мощность, а через Q_g – реактивную мощность, вырабатываемую генератором g. Переменная P_c – активная мощность, потребляемая потребителем c. Далее, P_g^k – проданный на рынке объем активной мощности из k-й части заявки генератора g, P_c^k – купленный на рынке объем активной мощности из k-й части заявки потребителя c.

Задача оптимизации потокораспределения для рынка «на сутки вперед» имеет следующую постановку в терминах математического программирования. Требуется выбрать такие объемы генерации и потребления, потоки мощности по ветвям сети, а также узловые напряжения и углы фаз, при которых достигается максимум функции благосостояния

$$\sum_{c \in \mathbf{C}} \sum_{k=1}^{K} C_c^k P_c^k - \sum_{g \in \mathbf{G}} \sum_{k=1}^{K} C_g^k P_g^k \to \max, \tag{1}$$

при ограничениях

$$0 \le P_c^k \le P_c^{\mathrm{bid}}(k), \quad c \in \mathbf{C}, \quad k = 1, \dots, K, \tag{2}$$

$$0 \le P_g^k \le P_g^{\mathrm{bid}}(k), \quad g \in \mathbf{G}, \quad k = 1, \dots, K, \tag{3}$$

$$P_c = \sum_{k=1}^{K} P_c^k, \quad c \in \mathbf{C}, \tag{4}$$

$$P_g = \sum_{k=1}^{K} P_g^k, \quad g \in \mathbf{G}, \tag{5}$$

$$\sum_{(i,j) \in S} p_{ij} \le p_S^{\max}, \quad S \in \mathcal{S}, \tag{6}$$

$$\sum_{(i,j) \in S} p_{ji} \le p_S^{\min}, \quad S \in \mathcal{S}, \tag{7}$$

$$P_g^{\min} \le P_g \le P_g^{\max}, \quad g \in \mathbf{G}, \tag{8}$$

$$Q_g^{\min} \le Q_g \le Q_g^{\max}, \quad g \in \mathbf{G}, \tag{9}$$

$$V_i^{\min} \le V_i \le V_i^{\max}, \quad g \in \mathbf{G}, \tag{10}$$

$$\sum_{g \in \mathbf{G}(i)} P_g - \sum_{c \in \mathbf{C}(i)} P_c - \sum_{j \in N(i)} p_{ij} = 0, \quad i \in N, \tag{11}$$

$$\sum_{g \in \mathbf{G}(i)} Q_g - \sum_{c \in \mathbf{C}(i)} Q_c^{\mathrm{prg}} - \sum_{j \in N(i)} q_{ij} = 0, \quad i \in N, \tag{12}$$

$$p_{ij} = G_{ij} \left[(V_i)^2 - \frac{V_i V_j}{t_{ij}} \cos(d_i - d_j + \alpha_{ij}) \right] + \frac{\Omega_{ij} V_i V_j}{t_{ij}} \sin(d_i - d_j + \alpha_{ij}), (i,j) \in A, \tag{13}$$

$$q_{ij} = \Omega_{ij} \left[(V_i)^2 - \frac{V_i V_j}{t_{ij}} \cos(d_i - d_j + \alpha_{ij}) \right] - \\ - \frac{G_{ij} V_i V_j}{t_{ij}} \sin(d_i - d_j + \alpha_{ij}) - B_{ij} (V_i)^2, \quad (i,j) \in A. \tag{14}$$

Неравенства (2)–(5) связывают объемы генерации и потребления с параметрами заявок участников аукциона (см., например, [4]). Ограничения (6) и (7) задают предельно допустимые потоки активной мощности по контролируемым сечениям в прямом и обратном направлениях, соответственно. Условия (8) накладывают нижние и верхние ограничения на производство активной мощности каждым из генераторов. Аналогичные ограничения по реактивной мощности задаются неравенствами (9). Неравенства (10) ограничивают узловые напряжения. Условия (11) и (12) задают балансовые ограничения по активной и реактивной мощности для каждого узла сети, соответственно. Равенства (13) и (14) задают зависимость потоков мощности по ветвям сети от напряжений и углов фаз в узлах.

1.2 Балансирующий рынок

На балансирующий рынок, в отличие от рынка «на сутки вперед», ценовые заявки подают только генераторы [5]. При этом объемы потребления полагаются равными некоторым прогнозным значениям P_c^{prg}. Такая модификация задачи имеет модель математического программирования, аналогичную модели рынка «на сутки вперед» с тем отличием, что целевая функция имеет вид

$$\sum_{g\in\mathbf{G}}\sum_{k=1}^{K} C_g^k P_g^k \to \min, \tag{15}$$

а ограничения (2) и (4) заменяются условиями $P_c = P_c^{\mathrm{prg}}$, $c \in \mathbf{C}$.

2 Сложность задачи оптимизации потокораспределения в электроэнергетической системе

Рассмотрим случай, когда в системе отсутствуют трансформаторы. Следующая лемма позволяет перейти от уравнений (13) и (14) к более компактной комплексной записи уравнений установившегося режима (см., например, § 6.1 в [2]). Определим комплексное напряжение в узле i, $i \in N$, как $U_i' + \boldsymbol{j}U_i''$, где $\boldsymbol{j}$ – мнимая единица, $U_i' = V_i\cos(d_i)$, $U_i'' = V_i\sin(d_i)$.

Лемма 1. *Пусть ветвь $(i,j) \in A$ имеет шунтирующую емкостную проводимость $B_{ij} = 0$, трансформатор отсутствует, т.е. $t_{ij} = 1$, $\alpha_{ij} = 0$, и выполнены уравнения (13) и (14). Тогда разница комплексных напряжений на концах ветви равна*

$$U_i' + \boldsymbol{j}U_i'' - (U_j' + \boldsymbol{j}U_j'') = \frac{(r_{ij} + \boldsymbol{j}x_{ij})(p_{ij} - \boldsymbol{j}q_{ij})}{U_i' - \boldsymbol{j}U_i''}. \tag{16}$$

Доказательство состоит в непосредственной проверке равества (16) с использованием соотношений (13), (14), $G_{ij} = r_{ij}/(r_{ij}^2 + x_{ij}^2)$ и $\Omega_{ij} = x_{ij}/(r_{ij}^2 + x_{ij}^2)$.

Для анализа сложности задачи оптимизации потокораспределения в ЭЭС рассмотрим частный случай одного генератора и однокомпонентными ценовыми заявками от генератора и от потребителей, т.е. случай $|\mathbf{G}| = 1$, $K = 1$. С целью упрощения обозначений индексы, отвечающие за номер компоненты ценовой заявки, далее будут опускаться.

Пусть $N = \{0, \ldots, n\}$, генератор g_0 находится в узле 0, потребители $c_1, \ldots, c_n$ находятся в узлах $1, \ldots, n$, т.е. $\mathbf{G}(0) = \{g_0\}$, $\mathbf{C}(0) = \emptyset$, $\mathbf{G}(i) = \emptyset$, $\mathbf{C}(i) = \{c_i\}$, $i = 1, \ldots, n$. Генераторный узел непосредственно соединен ЛЭП с каждым из узлов потребителей.

Потребитель узла $i, i = 1, \ldots, n$, получает активную мощность $P_{c_i} \geq 0$ и реактивную мощность $Q_{c_i}^{\text{prg}}$. При этом для каждого $i = 1, \ldots, n$ верхний предел потребляемой активной мощности определяется величиной $P_{c_i}^{\text{bid}}$, а реактивная мощность $Q_{c_i}^{\text{prg}}$ фиксирована.

Не теряя общности, далее предполагаем что в генерирующем узеле 0 фаза равна нулю, то есть, $U_0'' = 0$. Применение леммы 1 к ветви $(i, 0)$, $i = 1, \ldots, n$, дает

$$U_i' + \boldsymbol{j} U_i'' - U_0' = \frac{(r_{i0} + \boldsymbol{j} x_{i0})(-P_{c_i} + \boldsymbol{j} Q_{c_i}^{\text{prg}})}{U_i' - \boldsymbol{j} U_i''}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

т.к. $p_{i0} = -P_{c_i}$, $q_{i0} = -Q_{c_i}^{\text{prg}}$. Аналогичным образом, используя уравнения баланса (11) и (12) в узле 0, получаем:

$$P_{g_0} - \boldsymbol{j} Q_{g_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{U_0'(U_0' - U_i' - \boldsymbol{j} U_i'')}{r_{0i} + \boldsymbol{j} x_{0i}}. \tag{18}$$

Утверждение 1. *Поиск допустимого решения задачи оптимизации потокораспределения в условиях балансирующего рынка в случае одного генератора является NP-трудной в сильном смысле задачей.*

Доказательство. Построим полиномиальную сводимость от NP-полной в сильном смысле задачи НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО (см., например, [3]): дан граф $G = (V, E)$ и целое число L; требуется установить, существует ли такое подмножество $I \subseteq V$, любые две вершины из которого несмежны в G и $|I| \geq L$.

По данному графу G строим индивидуальную задачу оптимизации потокораспределения в ЭЭС с одним генератором и $n = |V|$ потребителями, где

$$V_0^{\min} = V_0^{\max} = 1, \quad P_{g_0}^{\min} = 6n + L, \quad P_{g_0}^{\text{bid}} = P_{g_0}^{\max} = 7n$$

$$r_{0i} = x_{0i} = \frac{1}{34}, \quad P_{c_i}^{\mathrm{prg}} = 2,\ Q_{c_i}^{\mathrm{prg}} = 6, \quad i = 1, \dots, n.$$

Кроме того, определяем $|E|$ контролируемых сечений, сопоставляя каждому ребру $e = \{v_i, v_k\} \in E$ контролируемое сечение из двух линий $S_e = \{(0, i), (0, k)\}$ с пропускной способностью $p_{S_e}^{\max} = 13$. Ценовые компоненты заявок могут быть выбраны произвольно.

Построенная индивидуальная задача соответствует гипотетической ситуации, когда активная мощность генератора ограничена снизу величиной $6n + L$, а набор контролируемых сечений отражает структуру заданного графа.

Заметим, что при указанных значениях параметров, (17) представляет собой квадратное уравнение относительно U_i'. Из (17) следует, что для данной сети $U_i' = \frac{8+y_i}{17}$, где $y_i \in \{0, 1\}$, $U_i'' = \frac{2}{17}, i = 1, \dots, n$. Кроме того, из (18) имеем $P_{g_0} = 6n + \sum_{i=1}^{n}(1 - y_i)$. Однако, ввиду условия $P_{g_0} \geq 6n + L$, задача оптимизации потокораспределения в ЭЭС имеет допустимое решение в том и только том случае, когда существует набор $(y_1, \dots, y_n) \in \{0, 1\}^n$, такой что $\sum_{i=1}^{n}(1 - y_i) \geq L$, и для каждого $S_e \in \mathcal{S}$ выполнено

$$p_{0i} + p_{0k} = 6 + (1 - y_i) + 6 + (1 - y_k) = 14 - y_i - y_k \leq 13, \quad \text{где } v_i, v_k \text{ – концы ребра } e \in E. \tag{19}$$

Условие (19) следует из равенства (16), которое выполнено для каждой ветви $(0, j)$.

Таким образом, в графе G найдется подмножество из не менее, чем L попарно несмежных вершин $I = \{v_i : y_i = 0\}$. Следовательно, ввиду того, что числовые параметры построенной задачи ограничены сверху величиной $O(n)$, задача получения допустимого решения является NP-трудной в сильном смысле.

Утверждение 2. *Поиск допустимого решения задачи оптимизации потокораспределения в условиях балансирующего рынка в случае одного генератора даже при отсутствии контролируемых сечений является NP-трудной задачей.*

Доказательство. Построим полиномиальную сводимость от NP-полной задачи РАЗБИЕНИЕ [3]: дан набор натуральных чисел $a_1, \dots, a_m$ и требуется установить, существует ли в нем такое подмножество J, что $\sum_{i \in J} a_i = \frac{B}{2}$, где $B = \sum_{i=1}^{m} a_i$.

По данному набору $a_1, \ldots, a_m$ эффективно строится индивидуальная задача оптимизации потокораспределения в ЭЭС с одним генератором и $n = m$ потребителями, где

$$V_0^{\min} = V_0^{\max} = 1, \quad P_{g_0}^{\min} = P_{g_0}^{\text{bid}} = P_{g_0}^{\max} = \frac{13}{2}B,$$

$$r_{0i} = x_{0i} = \frac{1}{34a_i}, \quad P_{c_i}^{\text{prg}} = 2a_i,\ Q_{c_i}^{\text{prg}} = 6a_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ценовые компоненты определяем произвольным образом.

Из (17) следует, что для данной сети $U_i' = \frac{8+y_i}{17}$, где $y_i \in \{0, 1\}$, $U_i'' = \frac{2}{17}, i = 1, \ldots, n$. Кроме того, из (18) имеем $P_{g_0} = 7B - \sum_{i=1}^n a_i y_i$. Однако из заданных пределов $P_{g_0}^{\min}, P_{g_0}^{\max}$ вытекает равенство $P_{g_0} = 7B - \frac{B}{2}$, поэтому задача оптимизации потокораспределения в ЭЭС имеет допустимое решение в том и только том случае, когда искомое подмножество J существует. Следовательно, задача получения допустимого решения является NP-трудной.

Утверждение 3. *Задача оптимизации потокораспределения в условиях рынка «на сутки вперед» в случае одного генератора даже при отсутствии контролируемых сечений является NP-трудной.*

Доказательство. Покажем, что NP-трудной является задача верификации свойств: существует ли допустимое решение указанной задачи со значением функции благосостояния не менее L. Для этого модифицируем сводимость задачи РАЗБИЕНИЕ, описанную в утверждении 2, полагая $P_{g_0}^{\text{bid}} = P_{g_0}^{\max} = 7B$, $P_{c_i}^{\text{bid}} = 2a_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ценовые компоненты заявок полагаем равными единице: $C_{g_0} = 1$, $C_{c_i} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Все прочие параметры сводимости выберем как в утверждении 2.

Из (17) следует, что если каждый потребитель получает максимально возможную для него мощность, то есть, $P_i = P_{c_i}^{\text{bid}} = 2a_i$, $i = 1, \ldots, n$, то для допустимого решения выполнены равенства $U_i' = \frac{8+y_i}{17}$, где $y_i \in \{0, 1\}$ и $U_i'' = \frac{2}{17}$, $i = 1, \ldots, n$. Кроме того, из (18) имеем $P_{g_0} = 6B + \sum_{i=1}^n a_i(1 - y_i)$.

Пусть существует такой набор индексов J, что $\sum_{i \in J} a_i = \frac{B}{2}$. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, n$ положим $y_i = 0$, если $i \in J$, если же $i \notin J$, то $y_i = 1$. В результате полученный набор напряжений определяет оптимальное решение задачи оптимизации потокораспределения. Действительно, данный набор напряжений достраивается до допустимого решения, причем первая сумма в критерии оптимизации максимальна и равна $2B$, а вторая сумма минимальна и равна $\frac{13B}{2}$. Оптимум целевой функции составляет $-\frac{9B}{2}$.

С другой стороны, если оптимальное значение функции благосостояния меньше, чем $L = -\frac{9B}{2}$, из этого следует, что не существует такого набора булевых переменных $y_1, \ldots, y_n$, при которых $P_{g_0} = \frac{13B}{2}$ и $P_{c_i} = P_{c_i}^{\mathrm{bid}}$, $i = 1, \ldots, n$, а значит, не существует и подмножества J, обеспечивающего равенство $\sum_{i \in J} a_i = \frac{B}{2}$.

Таким образом, распознавание индивидуальных задач оптимизации потокораспределения, где существует допустимое решение со значением функции благосостояния не менее $-\frac{9B}{2}$ эквивалентно решению NP-полной задачи РАЗБИЕНИЕ. Утверждение доказано.

Заметим, что полагая $C_{g_0} = \frac{4}{13}$ в сводимости из доказательства утверждения 3, получаем ноль в качестве оптимума целевой функции во всех тех случаях, когда искомое разбиение J существует. Таким образом, даже в случае $\mathcal{S} = \emptyset$, поиск приближенного решения с какой-либо гарантированной относительной погрешностью является NP-трудной задачей.

3 Заключение

Полученные результаты показывают, что рассмотренные варианты задачи оптимизации потокораспределения в электроэнергетической системе могут представлять существенную сложность комбинаторного характера. В таких случаях получение оптимального решения стандартными методами выпуклой оптимизации не может быть гарантировано. Тем не менее, задачи, возникающие на практике, значительно отличаются по структуре от построенных в результате сводимостей в данной работе. В связи с этим, вопросы вычислительной сложности практически важных классов задач оптимизации потокораспределения в ЭЭС требуют дальнейшего исследования.

Автор благодарен А.А. Мельникову за полезные замечания к предварительному варианту статьи.

Список литературы

[1] Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи. СПб: Издательство «Лань», 2009. 592 с.

[2] Горнштейн В.М., Мирошниченко Б.П., Пономарев А.В. и др. Методы оптимизации режимов энергосистем / В.М. Горнштейн ред. М: Энергия, 1981. 336 с.

[3] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М: Мир, 1982. 416 с.

[4] Давидсон М.Р., Догадушкина Ю.В., Крейнес Е.М., Новикова Н.М., Ю.А. Удальцов, Ширяева Л.В. Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. 2004. № 3. С. 72–83.

[5] Давидсон М.Р., Догадушкина Ю.В., Крейнес Е.М., Новикова Н.М., Селезнев А.В., Удальцов Ю.А., Ширяева Л.В. Математическая модель управления энергосистемой в условиях конкурентного оптового рынка электроэнергии и мощности в России // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 84–94.

[6] Приложение 7. «Регламент проведения конкурентного отбора ценовых заявок на сутки вперед» к Договору о присоединении. НП «Администратор торговой системы оптового рынка электроэнергии», 2016.
http://www.np-sr.ru/regulation/joining/reglaments/index.htm

[7] Caramanis M.C., Bohn R.E. and Schweppe F.C. Optimal spot pricing: Practice and theory, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. 1982. Vol. PAS-101. No 9. P. 3234–3245.

[8] Hogan W.W. Contract networks for electric power transmission // Journal of Regulatory Economics. 1992. Vol. 4, Issue 3. P. 211–242.

[9] Palma-Benhke R., Philpott A., Jofré, A. et al. Modelling network constrained economic dispatch problems // Optim. Eng. 2013. Vol. 14. No 3. P. 417–430.

[10] River M., Pérez-Arriaga I.J., Junac L.G. A model for computation of spot prices in interconnected power systems // Proc. 10-th Power Systems Computation Conf. (Graz, August 19-24, 1990). London: Butterworths, 1990. P. 254-261.

[11] Schweppe F.C., Caramanis M.C., Tabors R.D., Bohn R.E. Spot pricing in electricity. Norwell, MA: Kluwer Acad. Pbs., 1988. 355 p.

Антон Валентинович Еремеев,
Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, проспект академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, пр. Мира, 55А, Омск, 644077, Россия
`e-mail:eremeev@ofim.oscsbras.ru`

Anton V. Eremeev,
Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Acad. Koptyug avenue, 4, Novosibirsk, Russia,

Omsk State University n.a. F.M. Dostoevsky, Mira avenue, 55A, Omsk, Russia, 630077
e-mail:eremeev@ofim.oscsbras.ru